

А.Г. Мерзляк,
В.Б. Полонский,
Е.М. Рабинович,
М.С. Якир

СБОРНИК

задач и заданий
для тематического оценивания
по геометрии
для 8 класса

*Рекомендовано
Министерством науки и образования Украины*

Харьков
«Гимназия»

2004

Тематическое распределение тренировочных упражнений

Тема	Номера упражнений
Четырехугольник. Параллелограмм	1–30
Прямоугольник	31–45
Ромб	46–60
Квадрат	61–70
Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках	71–80
Средняя линия треугольника	81–96
Трапеция	97–118
Средняя линия трапеции	119–134
Теорема Пифагора	135–163
Перпендикуляр и наклонная	164–173
Неравенство треугольника	174–186
Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника	187–206
Изменение синуса, косинуса и тангенса при возрастании угла	207–211
Декартовы координаты на плоскости	212–218
Координаты середины отрезка.	
Расстояние между двумя точками	219–233
Уравнение окружности	234–241
Уравнение прямой	242–254
Симметрия относительно точки (центральная симметрия)	255–273
Симметрия относительно прямой (осевая симметрия)	274–290
Поворот	291–300
Параллельный перенос	301–308
Равенство векторов. Координаты вектора	309–319
Сложение векторов	320–328
Умножение вектора на число.	
Коллинеарные векторы	329–345
Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Единичный вектор	346–349

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Вариант 1

Четырехугольник. Параллелограмм

1. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 1) $AB = BC$, $AD = DC$. Доказать, что углы A и C равны.
2. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 2) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доказать, что $AB = AD$ и $CB = CD$.

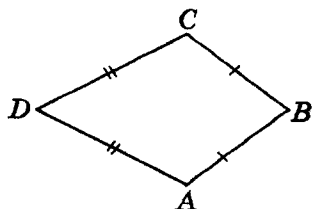


Рис. 1

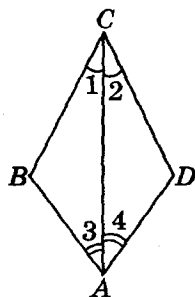


Рис. 2

3. Можно ли начертить выпуклый четырехугольник, у которого три угла прямые, а четвертый — острый?
4. В четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны (рис. 3). Верно ли определены его углы?
5. Найти углы параллелограмма, если:

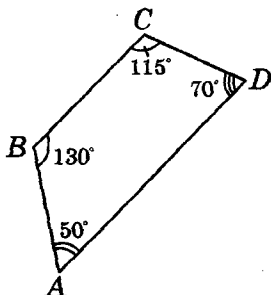


Рис. 3

- 1) один из его углов равен 46° ;
- 2) сумма двух его углов равна 186° ;
- 3) один из его углов на 56° больше другого;

- 4) один из его углов в 3 раза меньше другого;
 5) два угла параллелограмма относятся как 5:7.
6. Найти углы параллелограмма $ABCD$ (рис. 4).
7. Даны параллелограмм $ABCD$ и треугольник PEF . Могут ли одновременно выполняться равенства: $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$? Ответ обосновать.
8. Периметр параллелограмма равен 56 см. Найти стороны параллелограмма, если одна из них на 6 см больше другой.
9. Периметр параллелограмма равен 126 см. Найти его стороны, если две из них относятся как 4:5.
10. Какие ошибки допущены в изображении параллелограмма на рис. 5?

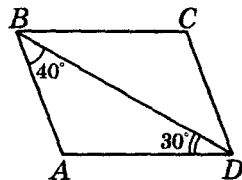


Рис. 4

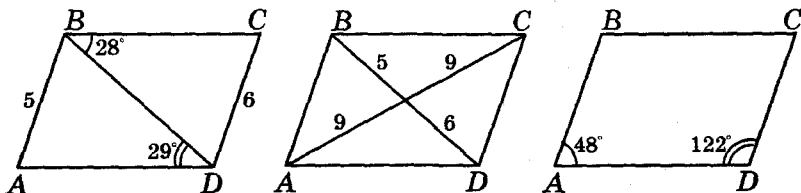


Рис. 5

11. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 6) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.
12. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 7) $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.
13. На сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ отметили точки K и E такие, что $\angle AKC = \angle AEC$ (рис. 8). Доказать, что $AKCE$ — параллелограмм.

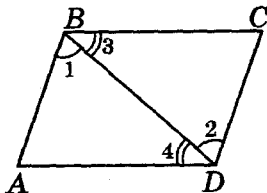


Рис. 6

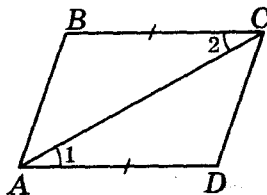


Рис. 7

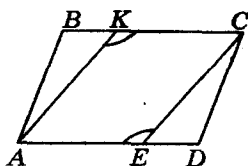


Рис. 8

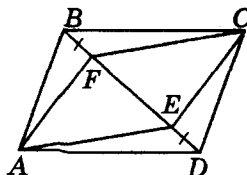


Рис. 9

14. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки BF и DE (рис. 9). Доказать, что $AFCE$ — параллелограмм.
15. Доказать, что биссектрисы углов параллелограмма, прилежащие к одной стороне, пересекаются под прямым углом.
16. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Доказать, что $OE = OF$.
17. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и D пересекают диагональ AC в точках K и P соответственно (рис. 10). Доказать, что четырехугольник BPK — параллелограмм.
18. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 7$ см, $AD = 12$ см. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E . Найти длины отрезков BE и EC .
19. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении $1:3$, считая от вершины тупого угла. Периметр параллелограмма равен 84 см. Найти его стороны.
20. В параллелограмме $ABCD$ угол A равен 60° . Высота BE делит сторону AD на две равные части. Найти длину диагонали BD , если периметр параллелограмма равен 48 см.
21. На рис. 11 точка O — общая середина отрезков AD , BE и CF . Какие из четырехугольников на этом рисунке являются параллелограммами?

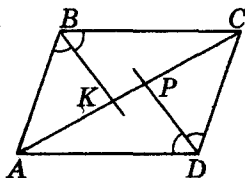


Рис. 10

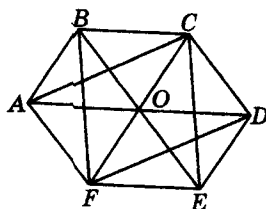


Рис. 11

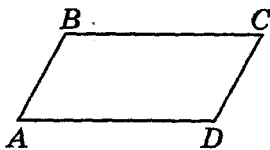


Рис. 12

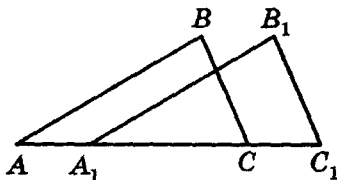


Рис. 13

22. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 12) $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180^\circ$. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.
23. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BK . Доказать, что углы MBK и BAD равны.
24. Два угла параллелограмма относятся как 1:5. Найти угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины: 1) тупого угла; 2) острого угла.
25. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны (рис. 13). $AC_1 = 18$ см, $A_1C = 10$ см. Найти расстояние между точками B и B_1 .
26. Каждая из боковых сторон равнобедренного треугольника равна 6 см. На основании треугольника взята точка и проведены через нее две прямые, параллельные боковым сторонам треугольника. Найти периметр полученного параллелограмма.
27. Построить параллелограмм:
 - 1) по двум сторонам и углу между ними;
 - 2) по стороне и двум диагоналям.
28. Даны отрезок DE и точка M , не лежащая на прямой DE . Построить параллелограмм так, чтобы одной из его сторон был отрезок DE , а точка M была бы точкой пересечения его диагоналей.
29. Через точку внутри угла провести прямую так, чтобы отрезок ее, лежащий между сторонами угла, делился этой точкой пополам.
30. Построить треугольник по двум его сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

Прямоугольник

31. О параллелограмме известно, что ни один из его углов не является острым. Что можно сказать о виде этого параллелограмма?

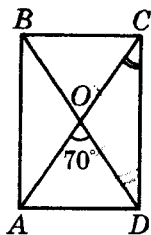


Рис. 14

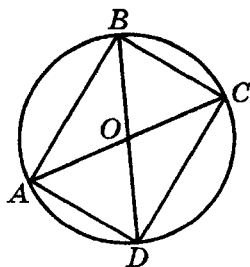


Рис. 15

32. В прямоугольнике $ABCD$ (рис. 14) O — точка пересечения диагоналей, $\angle AOD = 70^\circ$. Найти угол OCD .
33. В прямоугольнике диагональ образует с большей стороной угол, равный 32° . Найти угол между диагоналями, лежащий против большей стороны прямоугольника.
34. Найти угол между меньшей стороной и диагональю прямоугольника, если он на 30° меньше угла между диагоналями, лежащего против меньшей стороны.
35. В окружности с центром O проведены диаметры AC и BD (рис. 15). Доказать, что $ABCD$ — прямоугольник.
36. В прямоугольнике $ABCD$ точка K — середина стороны AD . Точки M и N принадлежат сторонам AB и CD соответственно, причем $BM = CN$. Доказать, что $KM = KN$.
37. Диагонали параллелограмма образуют равные углы с одной из его сторон. Доказать, что этот параллелограмм — прямоугольник.
38. В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону CD в точке E — середине CD . Доказать, что BE — биссектриса угла B .
39. Перпендикуляры, проведенные из точки пересечения диагоналей прямоугольника к двум его смежным сторонам, равны 5 см и 7 см. Определить периметр прямоугольника.
40. Точка пересечения диагоналей прямоугольника отстоит от большей стороны на 5 см ближе, чем от меньшей стороны. Найти стороны прямоугольника, если его периметр равен 44 см.
41. В прямоугольнике $ABCD$ точка K — середина стороны AB , угол CKD равен 90° . Найти стороны прямоугольника, если его периметр равен 36 см.

42. Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.
43. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 8 см. Через точку K — середину гипотенузы, проведены прямые, параллельные катетам треугольника и пересекающие их в точках D и E . Определить длину отрезка DE .
44. В равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен 12 см, вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр прямоугольника.
45. Перпендикуляр, проведенный из вершины прямоугольника к диагонали, делит ее в отношении 3:1. Найти длину диагоналей прямоугольника, если точка пересечения диагоналей удалена от большей стороны на 6 см.

Ромб

46. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC делит угол A пополам. Доказать, что $ABCD$ — ромб.

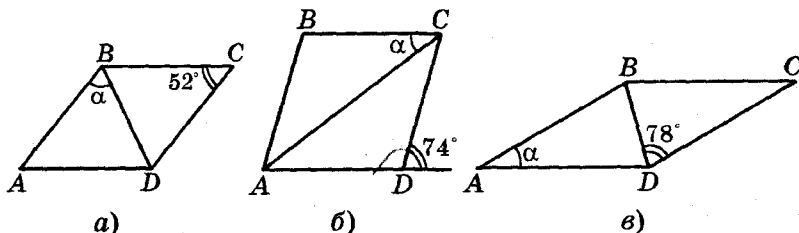


Рис. 16

47. На рис. 16 $ABCD$ — ромб. Найти угол α .
48. Найти углы ромба, если его сторона образует с диагоналями углы, разность которых равна 20° .
49. Найти углы ромба, если его сторона образует с диагоналями углы, которые относятся как 2:7.
50. BF и DE — высоты ромба $ABCD$ (рис. 17). Доказать, что $BF = DE$.
51. Высоты, проведенные из вершины тупого угла ромба, образуют угол 48° . Найти углы, образованные диагоналями ромба с его сторонами.

52. В ромбе $ABCD$ точки E и F — середины сторон BC и CD соответственно. Доказать, что $AE = AF$.
53. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ отложены равные отрезки AE и AF . Доказать, что EF и AC перпендикулярны.
54. Угол между высотой и диагональю ромба, проведенными из одной вершины, равен 42° . Определить углы ромба.
55. Высота, проведенная из вершины тупого угла ромба, делит его сторону пополам. Найти: 1) углы ромба; 2) сторону ромба, если его меньшая диагональ равна 16 см.
56. Два равных ромба расположены так, как показано на рис. 18. Определить вид четырехугольника $OMCT$.

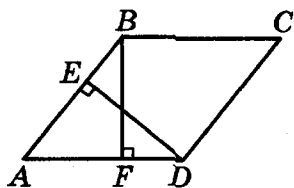


Рис. 17

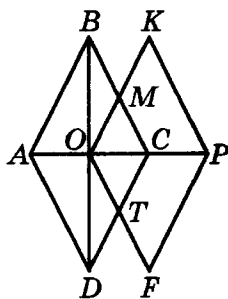


Рис. 18

57. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекают стороны BC и AD в точках E и F соответственно. Доказать, что $ABEF$ — ромб.
58. В треугольнике ABC через середину его биссектрисы AK проведена прямая, перпендикулярная ей. Эта прямая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Доказать, что четырехугольник $AEKF$ — ромб.
59. Построить ромб:
 1) по стороне и диагонали;
 2) по высоте и диагонали.
60. Используя только линейку с параллельными краями, провести перпендикуляр к отрезку через его середину (длина отрезка больше ширины линейки).

Квадрат

61. Доказать, что прямоугольник, у которого диагонали перпендикулярны, является квадратом.
62. Периметр квадрата равен 36 см. Определить расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до его сторон.
63. На диагонали AC квадрата $ABCD$ выбраны точки K и M такие, что $AK = CM$ (рис. 19). Доказать, что $BMDK$ — ромб.
64. Диагональ квадрата равна 4 см. Его сторона является диагональю другого квадрата. Определить сторону второго квадрата.
65. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат, две вершины которого лежат на гипотенузе треугольника, а две другие — на катетах. Найти периметр квадрата, если гипотенуза равна 18 см.
66. В прямоугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекают стороны BC и AD в точках E и K соответственно. Доказать, что $ABEK$ — квадрат.
67. На продолжении стороны AD квадрата $ABCD$ за точку D взяли точку E такую, что луч BE делит угол ABC в отношении 1:2. Найти периметр квадрата, если $BE = 6$ см.
68. В квадрат вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата находится одна вершина прямоугольника, а стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Найти стороны прямоугольника, если одна из них в 2 раза меньше другой, а диагональ квадрата равна 12 см.
69. Построить квадрат по данному его периметру.
70. Построить квадрат по данной разности его диагонали и стороны.

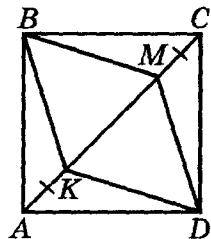


Рис. 19

Теорема Фалеса.

Теорема о пропорциональных отрезках

71. Разделить данный отрезок на семь равных частей.
72. Точки M и N — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$ соответственно. Отрезки BM и DN пере-

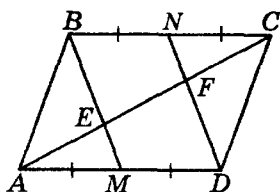


Рис. 20

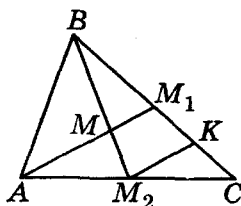


Рис. 21

секают диагональ AC в точках E и F (рис. 20). Доказать, что точки E и F делят отрезок AC на три равные части.

73. Медианы AM_1 и BM_2 треугольника ABC пересекаются в точке M . Используя рис. 21, доказать, что точка M делит медианы в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника (отрезки AM_1 и M_2K параллельны).
74. Стороны угла ABC пересекаются параллельными прямыми m , n и k (рис. 22). Найти отношение отрезков BD_1 , D_1E_1 и E_1F_1 , если $BD = 5$, $DE = 4$, $EF = 6$.
75. Параллельные прямые a и b пересекают стороны угла AOF (рис. 23). Найти длину отрезка OD , если $OC = 4$, $BC = 6$, $DE = 9$.

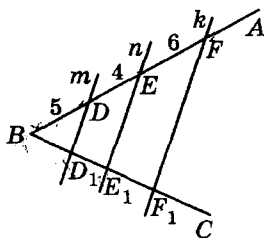


Рис. 22

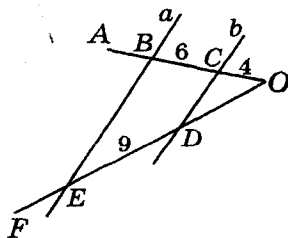


Рис. 23

76. Параллельные прямые l , m и n пересекают стороны угла MAN (рис. 24). Найти длины отрезков AB_1 и BC , если $AB = 4$, $CD = 8$, $B_1C_1 = 5$, $C_1D_1 = 6$.
77. Параллельные прямые c и d пересекают стороны угла BAC (рис. 25). Найти длину

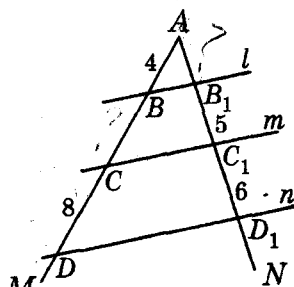


Рис. 24

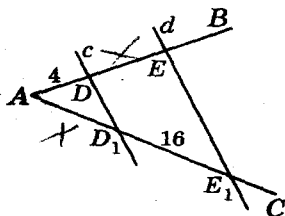


Рис. 25

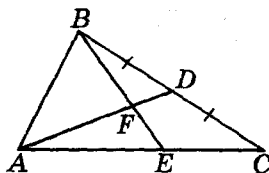


Рис. 26

отрезка DE , если $AD = 4$, $D_1E_1 = 16$ и $DE = AD_1$.

78. Точка D — середина стороны BC треугольника ABC , а отрезок BE делит AD в отношении $8:3$, считая от точки A (рис. 26). Найти отношение отрезков AE и EC .

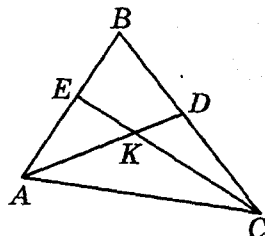


Рис. 27

79. На рис. 27 $BE : EA = 4 : 5$, $BD : DC = 6 : 7$. Найти отношение $CK : KE$.
80. Даны отрезки a, b, c, d и e . Построить отрезки:

1) $\frac{ab}{c}$; 2) $\frac{a^2}{b}$; 3) $\frac{abc}{de}$; 4) $\frac{ab^2}{c^2}$.

Средняя линия треугольника

81. Найти стороны треугольника, если его средние линии равны 6 см, 7 см и 9 см.
82. Периметр треугольника 18 см. Найти периметр треугольника, вершины которого — середины сторон данного треугольника.
83. Стороны треугольника относятся как $3:5:7$, а его периметр 60 см. Найти периметр и стороны треугольника, вершины которого — середины сторон данного треугольника.
84. Определить вид треугольника, если две его средние линии равны между собой.
85. Стороны параллелограмма $ABCD$ равны 4 см и 6 см. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины отрезков OA, OB, OC и OD соответственно (рис. 28), где точка O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Определить вид образовавшегося четырехугольника и вычислить его периметр.

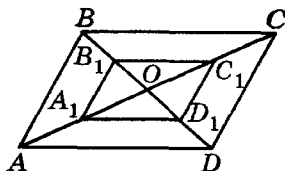


Рис. 28

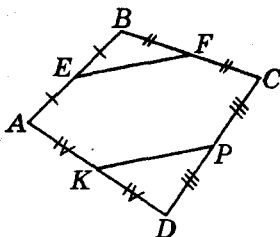


Рис. 29

86. Точки E, F, P и K — середины сторон AB, BC, CD и AD четырехугольника $ABCD$ соответственно (рис. 29). Доказать, что $EF \parallel KP$.
87. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l на расстоянии 5 см и 9 см от нее соответственно. Найти расстояние от середины C отрезка AB до прямой l .
88. Точка M — середина катета AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC , гипотенуза которого AB равна 12 см. Найти расстояние от точки M до AB .
89. Определить вид четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного:
 - 1) произвольного четырехугольника;
 - 2) четырехугольника, у которого диагонали равны.
90. Диагонали четырехугольника 2 см и 5 см, а угол между ними 42° . Найти стороны и углы четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон данного.
91. Меньшая сторона прямоугольника равна 16 см и образует с диагоналями угол, равный 60° . Середины сторон прямоугольника последовательно соединены. Определить вид и периметр образовавшегося четырехугольника.
92. Через вершины треугольника ABC проведены прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые пересекаются в точках A_1, B_1 и C_1 . Доказать, что стороны треугольника $A_1B_1C_1$ делятся точками A, B и C пополам.
93. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точка M пересечения медиан удалена от основания на 4 см. Найти расстояние от точки M до точки B .
94. Середина боковой стороны равнобедренного треугольника удалена от основания треугольника на 6 см. Найти расстояние от точки пересечения медиан треугольника до основания.

95. Построить треугольник по трем точкам — серединам его сторон.
96. Через точку A , данную внутри угла COD , провести прямую, отрезок которой, лежащий между сторонами угла, делится этой точкой пополам.

Трапеция

97. Два угла трапеции равны 32° и 143° . Найти два других ее угла.
98. Существует ли трапеция, у которой два противоположных угла острые? Если ответ положителен, сделать рисунок.
99. Существует ли трапеция, у которой два противоположных угла равны? Если ответ положителен, сделать рисунок.
100. Могут ли углы трапеции, взятые в последовательном порядке, относиться как $7:3:5:2$?
101. Боковая сторона равнобедренной трапеции и высота, проведенная из вершины тупого угла, образуют угол 17° . Вычислить углы трапеции.
102. В прямоугольной трапеции тупой угол больше острого в 5 раз. Вычислить углы трапеции.
103. Диагональ равнобедренной трапеции образует с основанием угол 32° , а ее боковая сторона равна меньшему основанию. Найти углы трапеции.
104. Определить углы равнобедренной трапеции, если разность ее противоположных углов равна 86° .
105. O — точка пересечения биссектрис углов A и B трапеции $ABCD$ (рис. 30). Доказать, что $\angle AOB = 90^\circ$.

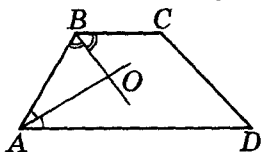


Рис. 30

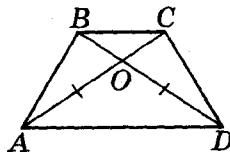


Рис. 31

106. Диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне, а острый угол, лежащий против этой диагонали, равен 52° . Найти другие углы трапеции, если ее меньшее основание равно второй боковой стороне.
107. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам. Найти углы трапеции.

108. В трапеции $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей (рис. 31). Отрезки OA и OD равны. Доказать, что $AB = CD$.
109. Доказать, что высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки, один из которых равен полусумме ее оснований, а второй — полуразности.
110. Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание трапеции на отрезки длиной 3 см и 11 см. Найти основания трапеции.
111. В равнобедренной трапеции один из острых углов равен 60° , а длина боковой стороны равна 16 см. Найти основания трапеции, если их сумма равна 38 см.
112. В равнобедренной трапеции биссектриса, проведенная из вершины тупого угла, параллельна боковой стороне. Вычислить основания трапеции, если ее периметр равен 60 см, а боковая сторона — 14 см.
113. Большее основание равнобедренной трапеции равно 18 см, а ее диагональ является биссектрисой острого угла трапеции. Найти меньшее основание трапеции, если ее периметр 54 см.
114. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) через вершину B проведена прямая, параллельная CD . Периметр полученного треугольника 16 см. Найти периметр трапеции, если ее меньшее основание BC равно 7 см.

115. Основания равнобедренной трапеции равны 10 см и 16 см, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найти высоту трапеции.

116. В равнобедренной трапеции диагональ является биссектрисой тупого угла, а ее основания равны 8 см и 14 см. Найти периметр трапеции.

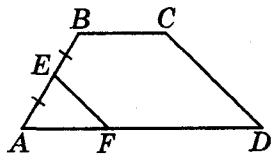


Рис. 32

117. В трапеции $ABCD$ (рис. 32) отрезок EF параллелен стороне CD , а точка E — середина AB . Доказать, что $EF = \frac{1}{2} CD$.

118. Построить трапецию по четырем ее сторонам.

Средняя линия трапеции

119. Найти среднюю линию трапеции, если ее основания равны: 1) 6 см и 11 см; 2) $3a$ и $4a$.
120. Найти основание трапеции, если ее другое основание и средняя линия соответственно равны: 1) 7 см и 11 см; 2) a и $5a$; 3) m и n .
121. Может ли средняя линия трапеции быть меньше меньшего основания? Ответ обосновать.
122. Основания трапеции равны 10 см и 6 см. Ее боковая сторона разделена на 4 равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям. Найти длины отрезков этих прямых, расположенных между сторонами трапеции.
123. Сторона AB треугольника ABC равна 12 см. Сторона BC разделена на 3 равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне AB . Найти длины отрезков прямых, расположенных между сторонами треугольника.
124. Средняя линия трапеции равна 19 см, а одно из оснований меньше другого на 6 см. Найти основания трапеции.
125. Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на отрезки длиной 8 см и 15 см. Найти основания трапеции.
126. Найти основания трапеции, если ее средняя линия длиной 15 см делится диагональю на отрезки, разность которых равна 3 см.
127. Основания трапеции 8 см и 12 см. Найти длину отрезка средней линии, который расположен между диагоналями трапеции.
128. Средняя линия трапеции в 2 раза больше меньшего основания и на 8 см меньше большего основания. Найти основания трапеции.
129. В равнобедренной трапеции диагональ делит острый угол пополам, а ее основания относятся как 3:5. Найти среднюю линию трапеции, если ее периметр равен 168 см.
130. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Доказать, что ее высота равна средней линии.
131. Диагонали равнобедренной трапеции являются биссектрисами ее тупых углов, а одна из диагоналей

делит среднюю линию на отрезки длиной 7 см и 9 см. Найти периметр трапеции.

132. Средняя линия прямоугольной трапеции равна 12 см, а высота, проведенная из вершины тупого угла трапеции, делит ее основание на отрезки, длины которых относятся как 3:2, считая от вершины прямого угла. Вычислить основания трапеции.
133. Диагональ AC трапеции $ABCD$ перпендикулярна ее основаниям. Длина большего основания AD равна 14 см, $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = 6$ см. Найти длину средней линии трапеции.
134. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее среднюю линию на отрезки длиной 5 см и 11 см, а боковая сторона трапеции равна 12 см. Найти углы трапеции.

Теорема Пифагора

135. Построить угол, косинус которого равен: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{6}{7}$; 3) 0,2.
136. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны: 1) 6 см и 8 см; 2) 4 см и 7 см.
137. Найти катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза и другой катет соответственно равны: 1) 15 см и 9 см; 2) 8 см и 4 см.
138. Сторона квадрата равна 5 см. Найти длину его диагоналей.
139. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 7$ см, $AC = 6$ см. Найти длину высоты BD .
140. Сторона ромба равна 13 см, а одна из его диагоналей — 10 см. Найти длину другой диагонали ромба.
141. Две стороны прямоугольного треугольника равны 5 см и 8 см. Найти третью сторону треугольника. Рассмотреть все возможные случаи.
142. Существует ли прямоугольный треугольник с острым углом 30° , стороны которого выражаются целыми числами?

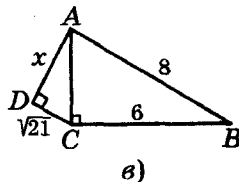
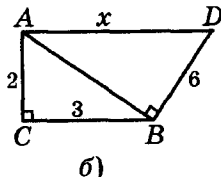
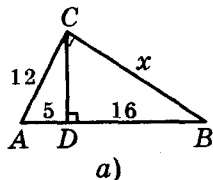


Рис. 33

143. Треугольник ABC прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$ (рис. 33). Найти x .
144. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3:4, а его гипотенуза равна 20 см. Найти катеты треугольника.
145. Разность между гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника равна 2 см, а длина второго катета 6 см. Найти неизвестные стороны треугольника.
146. Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, а медиана, проведенная к нему, — 5 см. Найти гипотенузу треугольника.
147. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 13 см. Найти стороны треугольника, если его периметр равен 60 см.
148. В остроугольном треугольнике ABC $AB = 10$ см, $BC = 15$ см, а высота $BD = 8$ см. Найти сторону AC .
149. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, делит ее на отрезки длиной 4 см и 16 см, считая от вершины угла при основании. Найти основание треугольника.
150. Отношение боковой стороны к основанию равнобедренного треугольника равно 5:6, а высота треугольника, проведенная к основанию, равна 12 см. Найти стороны треугольника.
151. Найти стороны равнобедренного треугольника, если его периметр равен 54 см, а высота, проведенная к основанию, — 9 см.
152. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит один из катетов на отрезки длиной 3 см и 9 см, считая от вершины прямого угла. Найти второй катет и гипотенузу треугольника.
153. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 17 см, а медиана, проведенная к одному из катетов, — 15 см. Найти катеты треугольника.
154. Высота равнобедренного треугольника на 4 см меньше его стороны. Найти сторону треугольника.
155. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см. Найти катеты треугольника.
156. Боковая сторона равнобедренного треугольника меньше основания на 9 см, а отрезки, на которые биссектриса угла при основании делит высоту, прове-

- денную к основанию, относятся как 5:4. Найти высоту треугольника, проведенную к основанию.
157. Найти боковую сторону равнобедренного треугольника, если его основание равно 24 см, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 30 см.
158. В равнобедренной трапеции диагональ равна 17 см, а высота трапеции — 8 см. Найти среднюю линию трапеции.
159. Основание AD равнобедренной трапеции $ABCD$ делится высотой BE на отрезки длиной 5 см и 16 см, а длина боковой стороны трапеции 13 см. Найти диагонали трапеции.
160. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Найти высоту треугольника, проведенную к его средней стороне.
161. В равнобедренную трапецию вписана окружность, радиус которой равен 12 см. Найти основание трапеции, если длина боковой стороны 25 см.
162. В окружности с центром O и радиусом 10 см проведена хорда AB длиной 16 см. Из центра окружности к хорде проведен перпендикуляр, пересекающий хорду в точке E , а окружность — в точке F . Найти длину отрезка EF .
163. Радиусы двух окружностей равны 8 см и 3 см, а расстояние между их центрами 13 см. Найти длину их внешней общей касательной.

Перпендикуляр и наклонная

164. Из одной точки к данной прямой проведены две равные наклонные. Расстояние между их основаниями 14 см. Определить проекции наклонных на данную прямую.
165. Точка находится на расстоянии 6 см от прямой. Из нее к прямой проведена наклонная, образующая с прямой угол 45° . Найти проекцию наклонной на эту прямую.
166. Из точки вне прямой проведены к ней две наклонные, длина одной из них 25 см, а длина ее проекции — 15 см. Найти длину второй наклонной, если она образует с прямой угол 30° .
167. Из точки, взятой на расстоянии 5 см от прямой, проведены к ней две наклонные. Длина одной из них 13 см, а вторая образует с прямой угол 45° . Найти

расстояние между основаниями наклонных. Сколько решений имеет задача?

168. Точки M и N лежат по разные стороны от прямой a на расстоянии 2 см и 3 см от нее соответственно. Найти расстояние между проекциями этих точек на прямую, если $MN = 13$ см.
169. Из точки вне прямой проведены к ней две наклонные, проекции которых равны 5 см и 9 см. Найти длины наклонных, если их разность равна 2 см.
170. Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых равны 10 см и 6 см, а длины их проекций относятся как 5:2. Найти расстояние от точки до прямой.
171. Стороны треугольника равны 11 см, 15 см и 16 см. Найти проекции наименьшей и наибольшей сторон треугольника на среднюю сторону.
172. Из точки к прямой проведены две наклонные длиной 7 см и 11 см. Найти разность квадратов их проекций на эту прямую.
173. Из точки к прямой проведены две наклонные, разность длин которых 2 см, а разность длин их проекций 4 см. Найти расстояние от точки до прямой, если длина меньшей наклонной — целое число, меньше 6 см.

Неравенство треугольника

174. Какие из приведенных троек чисел могут быть длинами сторон одного треугольника: 1) 17; 19; 36; 2) 23; 38; 52; 3) 83; 47; 35?
175. Могут ли стороны треугольника относиться как:
1) 4:5:6; 2) 2:5:7; 3) 1:7:9?
176. Периметр треугольника равен 16 см. Может ли одна из его сторон быть равной: 1) 7 см; 2) 8 см; 3) 9 см?
177. Существует ли треугольник, одна сторона которого на 2 см больше второй и на 6 см больше третьей, а периметр треугольника равен 16 см?
178. Может ли диагональ ромба быть в 2 раза длиннее его стороны?
179. Доказать, что каждая сторона треугольника меньше половины его периметра.
180. Доказать, что сумма диагоналей трапеции больше суммы ее оснований.
181. Доказать, что $AB + BC + CD > AD$ (рис. 34).

182. Доказать, что медиана AM треугольника ABC меньше полусуммы сторон AB и AC .

183. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 14 см, а вторая — 6 см. Найти третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?

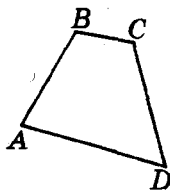
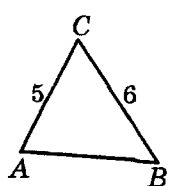


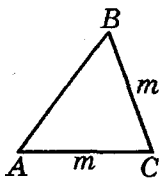
Рис. 34

184. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 8 см, а вторая — 11 см. Найти третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?

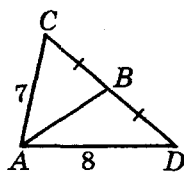
185. Периметр равнобедренного треугольника равен 110 см, а две его стороны относятся как 3:4. Найти стороны треугольника.



а)



б)



в)

Рис. 35

186. В каких пределах изменяется длина отрезка AB (рис. 35)?

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

187. Построить угол, если:

1) тангенс его равен: а) $\frac{4}{7}$; б) 3; в) 0,4;

2) синус его равен: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{7}$; в) 0,3;

3) косинус его равен: а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{6}$; в) 0,7.

188. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника соответственно равны 5 см и 13 см. Найти:

1) синус острого угла, лежащего против меньшего катета;

2) косинус острого угла, прилежащего к большему катету;

- 3) тангенс острого угла, лежащего против меньшего катета.
189. В прямоугольном треугольнике катеты равны 3 см и 8 см. Найти:
- 1) тангенс острого угла, лежащего против меньшего катета;
 - 2) синус острого угла, прилежащего к большему катету;
 - 3) косинус острого угла, лежащего против большего катета.
190. Найти неизвестные стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), если:
- 1) $BC = 2$ см, $\cos \angle B = \frac{2}{3}$;
 - 2) $AC = 3$ см, $\sin \angle B = \frac{1}{4}$;
 - 3) $AC = 4$ см, $\operatorname{tg} \angle B = 2$;
 - 4) $AB = 8$ см, $AC = 5$ см;
 - 5) $AC = 2$ см, $\sin \angle A = \frac{3}{5}$;
 - 6) $AB = 6$ см, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{12}{13}$.
191. По двум данным элементам прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) определить его другие стороны и углы:
- 1) $AB = 10$ см, $\angle A = 60^\circ$;
 - 2) $AC = 9$ см, $\angle A = 45^\circ$;
 - 3) $BC = 7$ см, $\angle A = 37^\circ$;
 - 4) $AB = 8$ см, $AC = 5$ см;
 - 5) $AC = 8$ см, $BC = 5$ см.
192. Основание равнобедренного треугольника равно 6 см, а боковая сторона 5 см. Найти все тригонометрические функции угла при основании треугольника.
193. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 6$ см, $\angle A = 58^\circ$. Найти сторону AC и высоту BD .
194. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) $AB = 8$ см, $\angle B = 46^\circ$. Найти сторону AC и высоту BD .
195. Из точки, лежащей на расстоянии 12 см от прямой, проведены к ней две наклонные, образующие с прямой углы 45° и 60° . Найти длины наклонных и их проекций на прямую.
196. Из точки, находящейся на расстоянии 8 см от прямой, проведены к ней две наклонные, образующие с прямой углы 30° и 45° . Найти расстояние между основаниями наклонных. Сколько решений имеет задача?

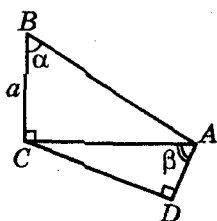
197. Определить неизвестные стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), если:

1) $AB = c$, $\angle A = \alpha$;

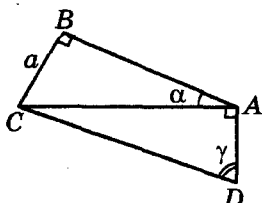
3) $BC = a$, $\angle B = \beta$.

2) $AC = b$, $\angle B = \beta$;

198. По рис. 36 определить длины отрезков AD и CD .



а)



б)

Рис. 36

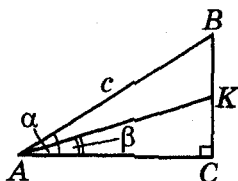


Рис. 37

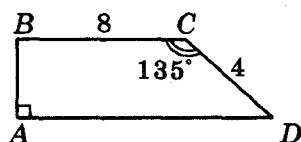


Рис. 38

199. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 37) $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle KAC = \beta$. Найти длину отрезка BK .

200. Сторона AB прямоугольника $ABCD$ равна a , а диагональ AC образует со стороной AD угол α . Найти длины стороны AD и диагонали AC .

201. Большая диагональ ромба равна m , а острый угол ромба — α . Найти сторону ромба и меньшую диагональ.

202. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание BC равно 6 см, высота CE — $2\sqrt{3}$ см, а боковая сторона образует с основанием AD угол 60° . Найти основание AD трапеции.

203. В прямоугольной трапеции $ABCD$ (рис. 38) $BC = 8$ см, $CD = 4$ см, $\angle BCD = 135^\circ$. Найти стороны AB и AD трапеции.

204. В равнобедренной трапеции большее основание равно a , а высота h образует с боковой стороной угол β . Найти периметр трапеции.

205. В трапеции $ABCD$ (рис. 39)

$AB = 8$ см, $BC = 4$ см,

$\angle A = 30^\circ$, $\angle D = 120^\circ$.

Найти основание AD трапеции.

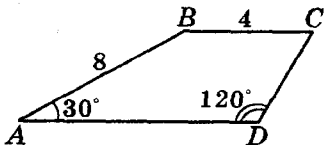


Рис. 39

206. В равнобедренной трапеции

$ABCD$ $AB = CD = 4$ см,

$BC = 6$ см, $AD = 10$ см. Найти углы трапеции.

Изменение синуса, косинуса и тангенса при возрастании угла

207. Сравнить синусы, косинусы и тангенсы углов A и B прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), если катет AC больше катета BC .
208. Катеты прямоугольного треугольника равны 4 см и 6 см. Найти: 1) тангенс большего острого угла; 2) синус меньшего острого угла; 3) косинус большего острого угла.
209. Как изменяются синус, косинус и тангенс угла, если угол возрастает от 30° до 45° ?
210. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\sin \angle A = 3 \sin \angle B$. Сравнить катеты AC и BC .
211. Для каких острых углов синус больше, чем косинус?

Декартовы координаты на плоскости

212. В каких координатных четвертях находятся точки $A(3; -4)$, $B(-3; 1)$, $C(-4; -5)$, $D(1; 9)$?
213. В какой четверти находится точка M , если ее абсцисса положительна, а ордината отрицательна?
214. Что можно сказать о координатах точки A , если:
- 1) точка A лежит на оси абсцисс;
 - 2) точка A лежит на биссектрисе четвертого координатного угла?
215. Какие особенности взаимного расположения двух точек, если их абсциссы одинаковы, а ординаты различны?
216. Указать координаты вершин прямоугольника $ABCD$ (рис. 40).
217. Указать координаты точки F (рис. 41).

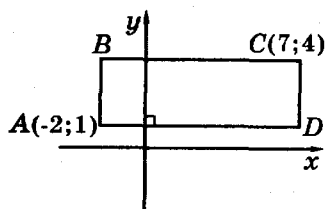


Рис. 40

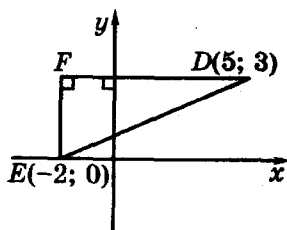


Рис. 41

218. Найти расстояния от точек $M(4; -5)$ и $N(-2; -3)$ до координатных осей.

**Координаты середины отрезка.
Расстояние между двумя точками**

219. Найти координаты середины отрезка MN , если:
- 1) $M(4; 3)$, $N(6; 1)$;
 - 2) $M(-3; -2)$, $N(-1; 4)$;
 - 3) $M(-4; -5)$, $N(-1; 4)$.
220. C — середина отрезка AB . Найти координаты точки B , если $A(-3; 8)$, $C(-5; 4)$.
221. Найти координаты точки, делящей отрезок AB в отношении $3:1$, считая от точки A , если $A(3; -5)$, $B(-1; 7)$.
222. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(3; -4)$, $B(-6; 1)$, $C(-5; 2)$, $D(4; -3)$ является параллелограммом.
223. Точки $C_1(2; -3)$ и $A_1(-4; 1)$ — середины сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Вершина A имеет координаты $(5; 6)$. Найти координаты вершин B и C .
224. Точки $A(-3; 1)$, $B(2; 4)$ и $C(1; -3)$ — середины сторон треугольника. Найти координаты его вершин.
225. Найти расстояние между точками A и B , если:
- 1) $A(2; 4)$, $B(5; 8)$;
 - 2) $A(-3; 1)$, $B(4; 1)$;
 - 3) $A(5; -2)$, $B(-1; -3)$.
226. В треугольнике ABC $A(3; -1)$, $B(-5; 7)$, $C(1; 5)$. Найти длину средней линии KP треугольника ABC , где K и P — середины сторон AB и BC соответственно.
227. Найти длину отрезка, концы которого лежат на осях координат, а его серединой является точка $M(-4; 3)$.

228. Доказать, что точки $A(-2; -3)$, $B(2; 1)$ и $C(7; 6)$ лежат на одной прямой. Какая из точек лежит между двумя другими?
229. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-2; 1)$, $B(-1; 5)$, $C(-6; 2)$. Доказать, что треугольник ABC — равнобедренный.
230. Расстояние между точками $A(5; -2)$ и $B(9; x)$ равно 5. Найти x .
231. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точек $A(3; -2)$ и $B(1; 2)$.
232. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-2; 1)$, $B(1; 4)$, $C(5; 0)$ и $D(2; -3)$ является прямоугольником.
233. Найти координаты вершины A равностороннего треугольника ABC , если известны координаты вершин $B(-2; 0)$ и $C(4; 0)$.

Уравнение окружности

234. Записать уравнение окружности, зная координаты ее центра K и радиус R :
- 1) $K(2; 5)$, $R = 2$; 3) $K(0; 5)$, $R = \sqrt{3}$.
 2) $K(-4; 0)$, $R = 1$;
235. Записать уравнение окружности, проходящей через точку $D(-8; -2)$, центр которой лежит на оси ординат, а радиус равен 10.
236. Записать уравнение окружности с центром в точке $P(3; -1)$, проходящей через точку $M(-2; -4)$.
237. Записать уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB , если $A(3; -6)$, $B(-1; 4)$.
238. Записать уравнение окружности, центр которой находится в точке $A(-5; 8)$ и которая касается оси ординат.
239. Определить по уравнению окружности координаты ее центра и радиус:
- 1) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$; 4) $(x - 2)^2 + y^2 = 14$;
 2) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$; 5) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 7 = 0$;
 3) $x^2 + (y + 5)^2 = 25$; 6) $x^2 + y^2 - 8y = 0$.
240. Найти координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 9 = 0$. Определить положение точек $A(1; -5)$, $B(4; -3)$ и $C(3; -3)$ относительно окружности.

241. Определить взаимное расположение двух окружностей:

- 1) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$ и $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$;
- 2) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ и $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$;
- 3) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ и $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$;
- 4) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$ и $(x - 9)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Уравнение прямой

242. Найти координаты точек пересечения прямой $3x + 7y - 21 = 0$ с осями координат. Принадлежат ли этой прямой точки $P(2; 3)$ и $K(4; -1)$?

243. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 4)$ и $B(3; -8)$.

244. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(5; -7)$ и параллельной: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат.

245. Точки $A(-4; 1)$, $B(3; 4)$ и $C(-1; -6)$ — вершины треугольника ABC . Записать уравнение прямой, содержащей медиану AM треугольника.

246. При каком значении a точки $K(5; -4)$, $P(-1; a)$ и $F(3; -9)$ лежат на одной прямой?

247. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки:

- 1) $A(3; 2)$ и $B(-4; 1)$;
- 3) $A(-6; 5)$ и $B(-9; 5)$.
- 2) $A(5; -7)$ и $B(4; 2)$;

248. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $C(3; -1)$ и угловой коэффициент которой равен:

- 1) 5;
- 2) -2;
- 3) 0.

249. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $F(3; -5)$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол: 1) 45° ; 2) 135° .

250. Среди прямых, заданных своими уравнениями, указать пары параллельных:

- 1) $3x - 4y + 8 = 0$;
- 4) $5x - 10y + 7 = 0$;
- 2) $6x - 8y - 9 = 0$;
- 5) $x - 2y - 1 = 0$.
- 3) $4x - 7y + 6 = 0$;

251. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $K(-2; 5)$ и параллельной прямой $y = 4x - 2$.

252. Записать уравнение прямой l (рис. 42).

253. Найти координаты точки пересечения прямых $9x + 5y - 1 = 0$ и $2x + 3y - 8 = 0$.

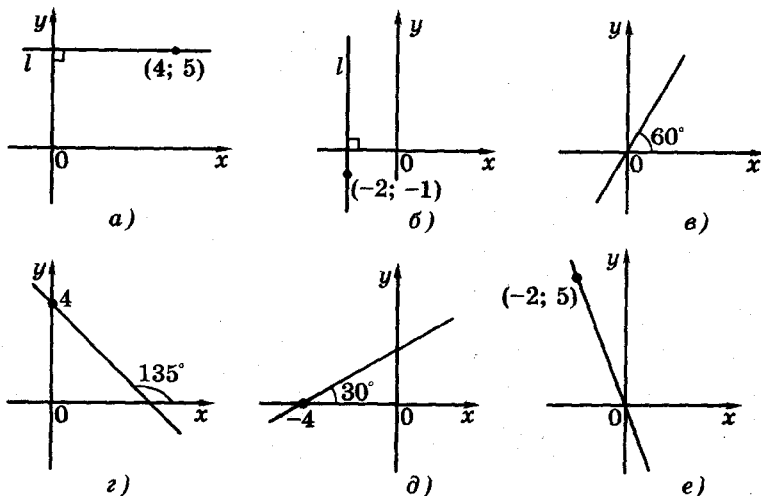


Рис. 42

254. Найти координаты точек пересечения прямой $y = x + 3$ и окружности $x^2 + y^2 = 9$.

Симметрия относительно точки (центральная симметрия)

255. Даны две точки M и K . Построить точку M_1 , симметричную точке M относительно точки K .

256. Даны отрезок AB и точка O , ему не принадлежащая. Построить отрезок, симметричный отрезку AB относительно точки O .

257. Даны луч OE и точка P , ему не принадлежащая. Построить луч, симметричный данному относительно точки P .

258. Даны угол ABC и точка O , лежащая внутри угла. Построить угол, симметричный углу ABC относительно точки O .

259. Имеет ли центр симметрии: 1) отрезок; 2) луч; 3) пара пересекающихся прямых? Если ответ положительный, то указать центр симметрии.

260. Может ли прямая при симметрии относительно точки отобразиться сама в себя?

261. На рис. 43 прямые AB и CD параллельны. Точки A и D симметричны относительно точки O . Прямая BC проходит через точку O . Доказать, что точки B и C симметричны относительно точки O .

262. Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке O (рис. 44). Отрезок AB делится точкой O на две равные части. Доказать, что данные окружности симметричны относительно точки O .

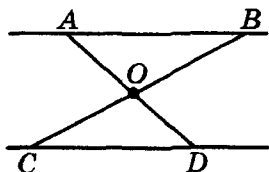


Рис. 43

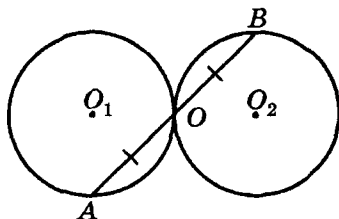


Рис. 44

263. Точки D и E симметричны точкам A и B соответственно относительно точки C , не принадлежащей прямой AB . Доказать, что прямые AB и DE параллельны.

264. Найти точку, симметричную точке $D(-5; -7)$ относительно начала координат.

265. Среди точек $A(3; -4)$, $B(-3; -4)$, $C(-3; 4)$, $D(4; -7)$, $K(-4; 7)$ и $P(3; 4)$ указать пары точек, симметричных относительно начала координат.

266. Симметричны ли точки $M(-5; 8)$ и $N(-3; 4)$ относительно точки $K(-1; 2)$?

267. Найти координаты центра симметрии точек $A(-4; 3)$ и $B(2; -7)$.

268. Найти координаты точки C , симметричной точке $B(-3; 1)$ относительно точки $A(2; -5)$.

269. Точки $A(-4; m)$ и $B(n; 3)$ симметричны относительно точки $K(5; -2)$. Найти m и n .

270. Записать уравнение окружности, симметричной окружности $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 11$ относительно:

1) начала координат; 2) точки $M(-4; 2)$.

271. Записать уравнение прямой, симметричной прямой $2x - 5y + 7 = 0$ относительно:

1) начала координат; 2) точки $K(2; -1)$.

272. Построить отрезок с серединой в данной точке и концами на двух данных прямых.

273. Даны две окружности, пересекающиеся в точках K и P . Провести через точку K прямую так, чтобы данные окружности отсекали на ней равные отрезки.

Симметрия относительно прямой (осевая симметрия)

274. Даны прямая l и точка P , ей не принадлежащая. Построить точку, симметричную точке P относительно прямой l .
275. Построить в тетради окружность радиусом 3 см и провести прямую, не проходящую через ее центр. Построить окружность, симметричную данной относительно этой прямой.
276. Указать, какие условия должны выполняться, чтобы прямая l была осью симметрии отрезка?
277. На рис. 45 $AB = AD$, $CB = CD$. Доказать, что точки B и D симметричны относительно прямой AC .
278. Доказать, что если треугольник имеет ось симметрии, то он равнобедренный.

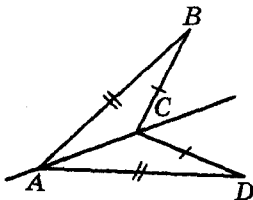


Рис. 45

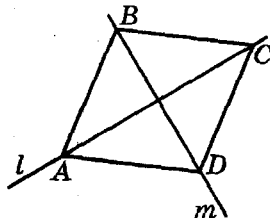


Рис. 46

279. Сколько осей симметрии имеет: 1) прямоугольник; 2) окружность; 3) равнобедренная трапеция?
280. Точки A и B лежат на одном и том же перпендикуляре к прямой l . Можно ли считать, что прямая l — ось симметрии этих точек?
281. Начертить четырехугольник так, чтобы прямые, которым принадлежат диагонали четырехугольника, были его осями симметрии.
282. Прямая AC является осью симметрии четырехугольника $ABCD$. Имеет ли этот четырехугольник пары равных сторон? Ответ обосновать.
283. Прямые l и m — оси симметрии четырехугольника $ABCD$ (рис. 46). Доказать, что $ABCD$ — ромб.
284. Найти координаты точек, симметричных точке $K(3; -1)$ относительно осей координат и начала координат.

285. Найти x и y , если точки $A(x; -2)$ и $B(3; y)$ симметричны относительно оси Oy .
286. Построить точки, симметричные точкам $M(3; -4)$, $K(4; 0)$ и $P(0; -5)$ относительно: 1) оси Ox ; 2) оси Oy ; 3) прямой, содержащей биссектрисы I и III координатных углов. Записать координаты полученных точек.
287. Оси симметрии прямоугольника — прямые $y = 5$ и $x = 3$. Одна из его вершин имеет координаты $(-2; 3)$. Найти координаты других вершин прямоугольника.
288. Диагонали ромба лежат на осях координат. Найти координаты вершин ромба, если середина одной из его сторон имеет координаты $(4; -3)$.
289. Построить ромб $ABCD$, у которого диагональ AC длиной m лежит на данной прямой, а вершины B и D — на двух данных окружностях.
290. Построить квадрат, у которого две противоположные вершины лежат на данной прямой l , а две другие — на данной окружности и данной прямой m .

Поворот

291. Даны две точки K и O . Построить точку K_1 , в которую переходит точка K при повороте относительно точки O : 1) на угол 30° против часовой стрелки; 2) на угол 100° по часовой стрелке.
292. Даны отрезок AB и точка O , ему не принадлежащая. Построить отрезок A_1B_1 , в который переходит отрезок AB при повороте на угол 45° относительно точки O по часовой стрелке.
293. Дан луч OA . Построить луч, в который переходит луч OA при повороте на угол 80° против часовой стрелки относительно: 1) точки O ; 2) точки B , не принадлежащей лучу.
294. Построить точки, в которые переходят точки $A(4; 0)$, $B(0; -3)$, $C(4; 1)$, $D(-1; -4)$ при повороте на угол 90° по часовой стрелке относительно начала координат. Указать координаты полученных точек.
295. Точка $A(5; a)$ переходит в точку $B(-4; b)$ при повороте на угол 90° против часовой стрелки относительно начала координат. Найти b и a .
296. На какой минимальный угол необходимо повернуть квадрат относительно его центра симметрии, чтобы он перешел сам в себя?

- 297.** Построить равнобедренный прямоугольный треугольник, вершина прямого угла которого лежит в заданной точке A , а две другие — на двух данных прямых l_1 и l_2 .
- 298.** Построить равносторонний треугольник, одна из вершин которого лежит в заданной точке, а две другие — на данной прямой и данной окружности.
- 299.** Построить квадрат, если известно положение точки пересечения его диагоналей и две соседние вершины лежат на двух данных окружностях.
- 300.** Построить квадрат с центром в данной точке так, чтобы середины двух его соседних сторон принадлежали двум данным прямым.

Параллельный перенос

- 301.** Параллельный перенос задается формулами $x' = x + 3$, $y' = y - 4$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки $A(3; -1)$, $B(0; 4)$, $C(-2; 0)$? Какие точки при этом параллельном переносе переходят в точки $M(-2; 1)$, $N(5; 0)$, $P(0; -3)$?
- 302.** При параллельном переносе точка $A(-2; 3)$ переходит в точку $B(-3; 5)$. В какую точку при этом параллельном переносе переходит точка $C(4; -3)$? Записать формулы этого параллельного переноса.
- 303.** Записать формулы параллельного переноса, при котором точка $A(3; 1)$ переходит в точку $B(-1; 4)$ и наоборот, точка B — в точку A .
- 304.** Построить образы точек $A(1; 3)$, $B(0; -4)$ и $C(2; 0)$ при параллельном переносе в положительном направлении оси Ox на 2 единицы. Записать координаты построенных точек.
- 305.** Даны точки $K(-4; 7)$ и $P(8; -1)$. При параллельном переносе середина отрезка KP переходит в точку $M(-3; -1)$. Найти координаты точек, в которые переходят точки K и P . Записать формулы этого параллельного переноса.

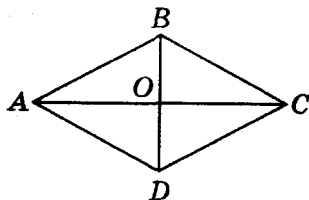


Рис. 47

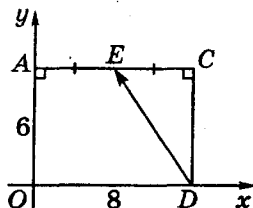


Рис. 48

306. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-2; 4)$, $B(3; -2)$, $C(-1; -3)$. Осуществить параллельный перенос, при котором точка B переходит в точку C . Записать координаты вершин полученного треугольника. Сделать рисунок.
307. Записать уравнение окружности, в которую переходит окружность $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 14$ при параллельном переносе, заданном формулами $x' = x + 2$, $y' = y - 1$.
308. Выполнен параллельный перенос прямой $2x + 3y - 6 = 0$. Записать уравнение полученной прямой, если она проходит через точку: 1) $O(0; 0)$; 2) $B(-1; 4)$.

Равенство векторов. Координаты вектора

309. $ABCD$ — ромб (рис. 47). Указать равные векторы.
310. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если:
- 1) $A(2; 3)$, $B(-1; 4)$; 3) $A(0; 0)$, $B(-2; -8)$;
 - 2) $A(3; 0)$, $B(0; -3)$; 4) $A(m; n)$, $B(p; k)$.
311. Даны точки $A(3; -7)$, $B(4; -5)$, $C(5; 8)$, $D(x; y)$.
Найти x и y , если $\overline{AB} = \overline{CD}$.
312. Найти координаты вектора $\overline{DE}$ (рис. 48).
313. От точки $A(4; -3)$ отложен вектор $\overline{m}(-1; 8)$. Найти координаты конца вектора.
314. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(3; -4)$, $B(-2; 7)$, $C(-4; 16)$, $D(1; 5)$ является параллелограммом.
315. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(3; -2)$, $B(-4; 1)$, $C(-2; -3)$. Найти координаты вершины D .

316. Среди векторов $\bar{a}(3; -4)$, $\bar{b}(-4; 2)$, $\bar{c}(3; \sqrt{11})$, $\bar{d}(-2; -4)$, $\bar{e}(-1; -2\sqrt{6})$, $\bar{f}(-4; 5)$ найти те, которые имеют равные модули.
317. Модуль вектора $\bar{a}(x; -8)$ равен 10. Найти x .
318. Модуль вектора $\bar{c}$ равен 2, а его координаты равны. Найти координаты вектора $\bar{c}$.
319. Две вершины прямоугольника $ABCD$ — точки $A(2; 5)$ и $B(7; 5)$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ равен 13. Найти координаты точек C и D .

Сложение векторов

320. Даны векторы $\bar{a}(4; -5)$ и $\bar{b}(-1; 7)$. Найти:
- 1) $\bar{a} + \bar{b}$; 2) $\bar{a} - \bar{b}$; 3) $|\bar{a} + \bar{b}|$; 4) $|\bar{a} - \bar{b}|$.
321. Даны точки $A(4; 0)$ и $B(0; -3)$. Найти координаты точки C такой, что $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.
322. Найти координаты векторов $\bar{m}$ и $\bar{n}$, если их сумма имеет координаты $(5; -2)$, а разность — $(7; 5)$.
323. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 49). Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{CO} = \bar{a}$, $\overrightarrow{BO} = \bar{b}$.
324. $ABCD$ — параллелограмм. Найти:
- 1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$;
 - 2) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$;
 - 3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA}$.

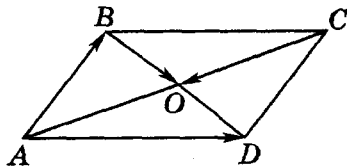


Рис. 49

325. Может ли быть нулевым вектором сумма трех векторов, модули которых равны:
- 1) 2; 3; 6; 2) 4; 5; 9; 3) 5; 8; 12?
326. Построить такие ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, что $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{a} + \bar{b}|$.
327. Даны векторы $\bar{a}(3; -4)$, $\bar{b}(-2; 7)$, $\bar{c}(-6; y)$. При каком значении y модуль вектора $\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$ наименьший?
328. Найти множество точек $C(x; y)$ координатной плоскости таких, что для точек $A(-3; 2)$ и $B(1; 5)$ выполняется равенство:
- 1) $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}|$; 2) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{AB}|$.

Умножение вектора на число. Коллинеарные векторы

329. Даны векторы $\vec{a}$ (2; -3) и $\vec{b}$ (4; -5). Найти:

1) $2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $3\vec{a} + 4\vec{b}$; 3) $5\vec{a} - \vec{b}$; 4) $3\vec{b} - 4\vec{a}$.

330. Вычислить модуль вектора $\vec{m} = -3\vec{p}$, где $\vec{p}$ (4; -3).

331. Найти модуль вектора $\vec{n} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, где $\vec{a}$ (1; -2); $\vec{b}$ (-1; 3).

332. Точки E и F — середины сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$ соответственно (рис. 50). Выразить вектор $\vec{FE}$ через векторы $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$.

333. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N соответственно, причем $BM = \frac{1}{3} BC$ (рис. 51), $CN = \frac{4}{5} CD$. Выразить:

1) векторы $\vec{AM}$ и $\vec{AN}$ через векторы $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$;

2) векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ через векторы $\vec{AM} = \vec{m}$, $\vec{AN} = \vec{n}$.

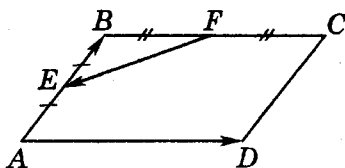


Рис. 50

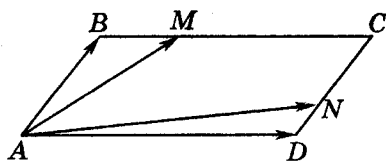


Рис. 51

334. O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, $AO : OC = 5 : 7$, $BO : OD = 3 : 4$. Выразить векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ и $\vec{DA}$ через векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$.

335. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно такие точки D и E , что $AD : DC = 3 : 2$, $BE : EC = 1 : 3$. Выразить:

1) векторы $\vec{BC}$, $\vec{AC}$, $\vec{AB}$, $\vec{AE}$ и $\vec{BD}$ через векторы $\vec{BE} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$;

2) векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ и $\vec{AC}$ через векторы $\vec{AE} = \vec{a}$, $\vec{BD} = \vec{b}$.

336. M — середина отрезка AB , а точка C лежит вне прямой AB . Доказать, что $\vec{CM} = \frac{1}{2} (\vec{CA} + \vec{CB})$.

337. Коллинеарны ли векторы $\vec{MN}$ и $\vec{KP}$, если M (3; -2), N (-7; 4), K (6; -3), P (1; 0)?

338. Среди векторов $\bar{a} (3; -2)$, $\bar{b} (-9; 6)$, $\bar{c} (6; -4)$, $\bar{d} (-27; 18)$ найти сонаправленные и противоположно направленные векторы.
339. Найти значение k , при котором векторы $\bar{m} (-2; k)$ и $\bar{n} (3; 6)$ коллинеарны.
340. Даны вектор $\bar{a} (5; -4)$ и точка $K (-3; 7)$. Найти координаты точки P такой, что векторы $\bar{a}$ и $\overline{KP}$ равны по модулю, но противоположны по направлению.
341. Найти координаты вектора $\bar{b}$, коллинеарного вектору $\bar{a} (-6; 8)$, если $|\bar{b}| = 20$.
342. Для ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется равенство $3\bar{a} - 4\bar{b} = 5\bar{a} + 7\bar{b}$. Доказать, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — коллинеарны.
343. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A (-4; -5)$, $B (-3; 2)$, $C (3; 4)$ и $D (8; -1)$ — трапеция.
344. Лежат ли точки $A (4; 2)$, $B (5; 6)$ и $C (7; 14)$ на одной прямой?
345. O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), $BC = 3$, $AD = 7$. Найти такие числа x и y , что: 1) $\overline{OC} = x \cdot \overline{AC}$; 2) $\overline{OB} = y \cdot \overline{OD}$.

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Единичный вектор

346. Среди векторов $\bar{a} \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2} \right)$; $\bar{b} \left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5} \right)$; $\bar{c} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\sqrt{\frac{2}{3}} \right)$; $\bar{d} (1; 0)$, $\bar{e} \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$ указать единичные векторы.
347. Найти координаты единичного вектора, сонаправленного с вектором:
 1) $\bar{a} (-5; 12)$; 2) $\bar{b} (4; 5)$; 3) $\bar{c} (m; n)$.
348. Даны единичные векторы $\bar{e}_1 (1; 0)$ и $\bar{e}_2 (0; 1)$. Найти координаты и абсолютную величину векторов:
 1) $6\bar{e}_1 + 8\bar{e}_2$; 2) $5\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$; 3) $m\bar{e}_1 + n\bar{e}_2$.
349. Разложить вектор $\bar{m} (8; -5)$ по векторам $\bar{a} (3; -4)$ и $\bar{b} (2; 3)$.

Скалярное произведение векторов

350. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a} (3; 4)$, $\vec{b} (5; 2)$; 3) $\vec{a} (-8; 4)$, $\vec{b} (3; 6)$.

2) $\vec{a} (4; -3)$, $\vec{b} (-6; 1)$;

351. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$;

2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$;

3) $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{b}| = 8$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

352. Даны векторы $\vec{a} (3; -2)$ и $\vec{b} (x; 4)$. При каком значении x $\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$?

353. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} (-2; 3)$ и $\vec{b} (3; -4)$.

354. Найти косинусы углов треугольника ABC , если $A(-3; 2)$, $B(5; 3)$, $C(-4; -3)$. Определить вид треугольника.

355. Даны векторы $\vec{a} (5; 2)$ и $\vec{b} (-4; y)$. При каком значении y векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?

356. Даны векторы $\vec{a} (3; -5)$ и $\vec{b} (x; 6)$. При каких значениях x угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$: 1) острый? 2) прямой? 3) тупой?

357. Найти косинусы углов, которые образует вектор $\overrightarrow{AB}$, где $A(-5; 4)$, $B(1; -4)$, с положительными направлениями координатных осей.

358. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(-2; 1)$, $B(2; 5)$, $C(5; 2)$, $D(1; -2)$ — прямоугольник.

359. Найти координаты вектора $\vec{m}$, коллинеарного вектору $\vec{n} (-3; 1)$, если $\vec{m} \cdot \vec{n} = 24$.

360. Найти координаты вектора, перпендикулярного вектору $\vec{m} (2; 5)$ и равного ему по абсолютной величине.

361. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120° , $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$. Найти:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$; 3) $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{a}$; 4) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot \vec{a}$.

362. Даны векторы $\vec{a} (-2; 3)$ и $\vec{b} (1; -3)$. Найти значение m , при котором векторы $\vec{a} + m\vec{b}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

363. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.
364. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — единичные векторы, угол между которыми равен 30° . Вычислить скалярное произведение $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.
365. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Найти:
 1) $|\vec{a} + \vec{b}|$; 2) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.
366. Даны векторы $\vec{a}$ (4; -2) и $\vec{b}$ (1; 3). Найти:
 1) $|\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|2\vec{a} + \vec{b}|$.
367. Найти косинус угла, который образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $3\vec{a} + \vec{b}$ перпендикулярны.
368. Найти множество точек $K(x; y)$ координатной плоскости таких, что для точек $A(3; -2)$ и $B(5; 4)$ выполняется равенство:
 1) $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; 3) $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BK} = 0$;
 2) $(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; 4) $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BK} = 4$.
369. Записать уравнение прямой, касающейся окружности с центром $M(3; -1)$ в точке $E(2; 4)$.
370. Основание и высота, опущенная на него, в равнобедренном треугольнике равны по 4 см. Найти косинус угла между медианами, проведенными к боковым сторонам треугольника, лежащего против основания треугольника.
371. Доказать с помощью векторов, что диагонали ромба перпендикулярны.

Вариант 2

Четырехугольник. Параллелограмм

1. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 52) $AB = AD$, $\angle BAC = \angle CAD$. Доказать, что углы B и D равны.
2. В четырехугольнике $ABDC$ (рис. 53) $AB = AC$, $BD = DC$. Доказать, что $AD \perp BC$.

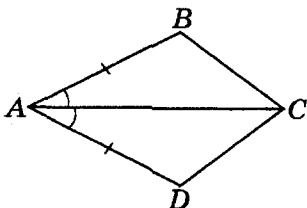


Рис. 52

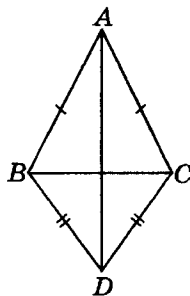


Рис. 53

3. Можно ли начертить выпуклый четырехугольник, у которого все углы будут острыми?
4. В четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны (рис. 54). Верно ли определены его углы?
5. Найти углы параллелограмма, если:

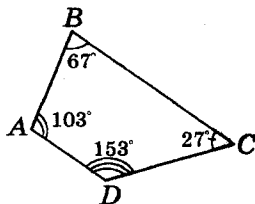


Рис. 54

- 1) один из его углов равен 52° ;
- 2) сумма двух его углов равна 174° ;
- 3) один из его углов на 28° больше другого;
- 4) один из его углов в 4 раза меньше другого;

- 5) два угла параллелограмма относятся как 4:5.
6. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 55) $\angle ABC = 102^\circ$, $\angle BDC = 54^\circ$. Найти углы ADB и BAD .
7. Даны параллелограмм $ABCD$ и треугольник MNP . Могут ли одновременно выполняться равенства: $\angle A = \angle M$, $\angle D = \angle N$, $\angle C = \angle P$? Ответ обосновать.
8. Периметр параллелограмма равен 84 см. Найти стороны параллелограмма, если одна из них на 12 см меньше другой.
9. Периметр параллелограмма равен 90 см. Найти его стороны, если две из них относятся как 2:3.
10. Какие ошибки допущены в изображении параллелограмма на рис. 56?

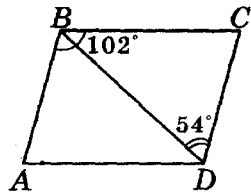


Рис. 55

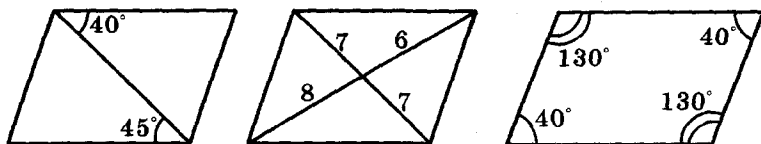


Рис. 56

11. Диагональ AC делит четырехугольник $ABCD$ на равные треугольники ABC и CDA (рис. 57). Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.
12. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ (рис. 58) отмечены точки K и F такие, что $\angle ADK = \angle CBF$. Доказать, что $KBFD$ — параллелограмм.

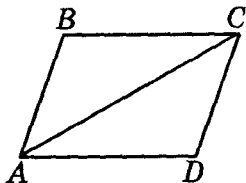


Рис. 57

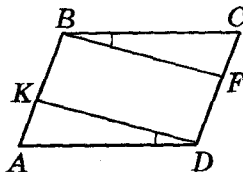


Рис. 58

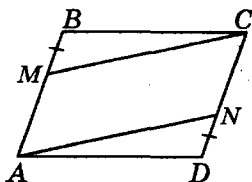


Рис. 59

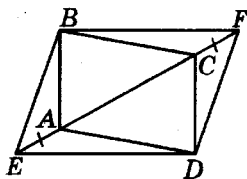


Рис. 60

13. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки MB и DN (рис. 59). Доказать, что четырехугольник $AMCN$ — параллелограмм.
14. На прямой AC , содержащей диагональ параллелограмма $ABCD$, отложены равные отрезки AE и FC (рис. 60). Доказать, что $EBFD$ — параллелограмм.
15. Доказать, что биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны или совпадают.
16. Доказать, что противоположные вершины параллелограмма находятся на одинаковом расстоянии от диагонали, соединяющей две другие вершины.
17. В параллелограмме $ABCD$ $BK \perp AC$ и $DP \perp AC$ (рис. 61). Доказать, что $KBPD$ — параллелограмм.
18. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A делит сторону BC на отрезки $BK = 4$ см и $KC = 3$ см. Найти периметр параллелограмма.
19. Биссектриса острого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении $2:3$, считая от вершины тупого угла. Периметр параллелограмма равен 42 см. Найти его стороны.
20. Углы параллелограмма относятся как $1:2$. Высота, проведенная из вершины тупого угла, делит противоположную сторону на отрезки 4 см и 7 см, считая от вершины тупого угла. Найти периметр параллелограмма.
21. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведен отрезок EF так, что $EO = OF$ (рис. 62). Какие из четырехугольников на этом рисунке являются параллелограммами?

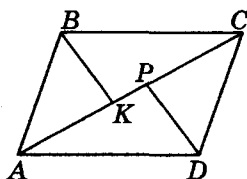


Рис. 61

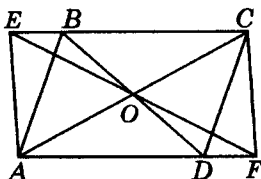


Рис. 62

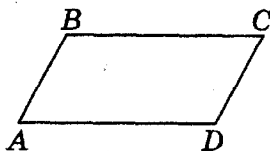


Рис. 63

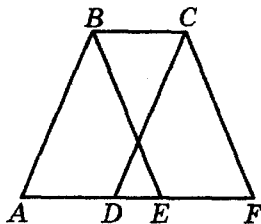


Рис. 64

22. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 63) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.
23. В параллелограмме $ABCD$ из вершины острого угла A проведены высоты AM и AN . Доказать, что углы MAN и ADC равны.
24. Два угла параллелограмма относятся как 3:7. Найти угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины: 1) острого угла; 2) тупого угла.
25. $ABCD$ и $BCFE$ — параллелограммы (рис. 64). Доказать, что $\triangle ABE = \triangle DCF$.
26. На основании равнобедренного треугольника выбрана точка, через которую проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Периметр образованного параллелограмма равен 24 см. Найти периметр треугольника, если его основание равно 8 см.
27. Построить параллелограмм:
 - 1) по двум сторонам и диагонали;
 - 2) по стороне, диагонали и углу между ними.
28. Даны три точки A , B и C — последовательные вершины параллелограмма $ABCD$. Построить параллелограмм.
29. Даны угол и точка внутри него. Построить параллелограмм, стороны которого лежат на сторонах данного угла, а точка пересечения диагоналей совпадает с данной точкой.
30. Доказать, что если две стороны и медиана, проведенная к третьей стороне, одного треугольника, соответственно равны двум сторонам и медиане к третьей стороне другого треугольника, то такие треугольники равны.

Прямоугольник

31. О параллелограмме известно, что ни один из его углов не является тупым. Что можно сказать о виде этого параллелограмма?

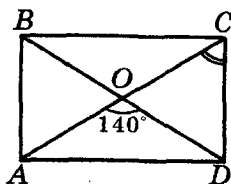


Рис. 65

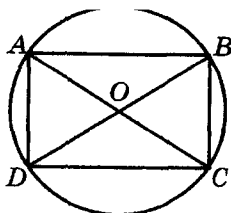


Рис. 66

32. В прямоугольнике $ABCD$ (рис. 65) O — точка пересечения диагоналей, $\angle AOD = 140^\circ$. Найти угол ACD .
33. В прямоугольнике диагональ образует с меньшей стороной угол, равный 46° . Найти угол между диагоналями, лежащий против большей стороны прямоугольника.
34. Найти угол между большей стороной и диагональю прямоугольника, если он на 20° меньше угла между диагоналями, лежащего против большей стороны.
35. В окружности с центром в точке O проведены диаметр AC и равные хорды AD и BC (рис. 66). Доказать, что $ABCD$ — прямоугольник.
36. В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах AB и CD выбраны точки M и N так, что $BM = CN$. Доказать, что $AN = DM$.
37. В параллелограмме отрезок, соединяющий точку пересечения диагоналей с серединой стороны, перпендикулярен этой стороне. Доказать, что этот параллелограмм — прямоугольник.
38. Биссектрисы углов A и B прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , лежащей на стороне CD . Доказать, что точка E — середина CD .
39. Стороны прямоугольника равны 12 см и 8 см. Найти расстояния от точки пересечения диагоналей до смежных сторон прямоугольника.
40. Сумма расстояний от точки пересечения диагоналей прямоугольника до смежных сторон равна 24 см. Одна из сторон прямоугольника на 6 см меньше другой. Найти эти стороны.
41. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB в два раза больше стороны AD . K — середина AB . Найти угол CKD .

42. Доказать, что если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.
43. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = 8$ см. Через точку D , лежащую на гипотенузе, проведены прямые, параллельные его катетам. Найти периметр этого четырехугольника.
44. В прямоугольный треугольник ABC вписан прямоугольник $CMXN$ (рис. 67). Найти положение точки X на гипотенузе AB , при котором длина отрезка MN будет наименьшей.
45. В прямоугольнике угол между диагоналями равен 60° . В каком отношении перпендикуляр, проведенный из вершины прямоугольника к диагонали, делит эту диагональ?

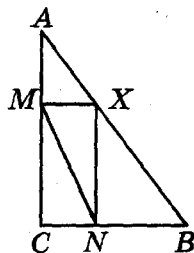


Рис. 67

Ромб

46. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD являются биссектрисами его углов. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — ромб.
47. На рис. 68 $ABCD$ — ромб. Найти угол α .

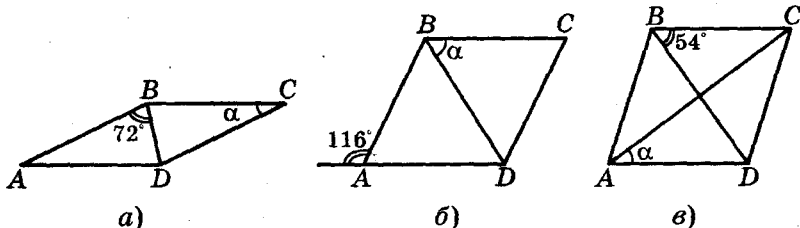


Рис. 68

48. Найти углы ромба, если его сторона образует с диагоналями углы, разность которых равна 30° .
49. Найти углы ромба, если его сторона образует с диагоналями углы, относящиеся как 3:7.
50. CM и CN — высоты ромба $ABCD$ (рис. 69). Доказать, что $BM = DN$.

51. Высоты, проведенные из вершины острого угла ромба, образуют угол 140° . Найти углы ромба.

52. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ выбраны соответственно точки E и F так, что $BE = DF$.

Доказать, что $AE = AF$.

53. На сторонах AB и BC ромба $ABCD$ выбрано соответственно точки K и E так, что $BK = BE$.

Доказать, что отрезок KE параллелен диагонали AC .

54. Угол между продолжением высоты ромба, опущенной из вершины острого угла, и продолжением диагонали, соединяющей вершины тупых углов, равен 34° . Найти углы ромба.

55. Найти углы ромба, высота которого равна 2 см, а периметр 16 см.

56. Два равных ромба расположены так, как показано на рис. 70. Определить вид четырехугольника $OEBF$.

57. В параллелограмме $ABCD$ через точку пересечения диагоналей проведена прямая, перпендикулярная диагонали AC , пересекающая стороны BC и AD в точках E и F соответственно. Доказать, что $AECF$ — ромб.

58. AE — биссектриса треугольника ABC . Через точку E , лежащую на стороне BC , проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC . Доказать, что образованный четырехугольник — ромб.

59. Построить ромб:

1) по двум диагоналям;

2) по углу и диагонали, выходящей из вершины этого угла.

60. Используя только линейку с параллельными краями, провести перпендикуляр к данной прямой через данную точку этой прямой.

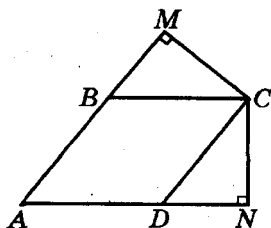


Рис. 69

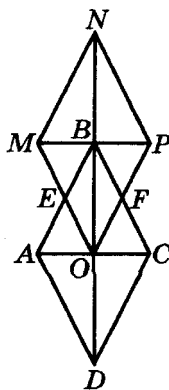


Рис. 70

Квадрат

61. Доказать, что ромб с равными диагоналями является квадратом.
62. Точка пересечения диагоналей квадрата удалена от стороны квадрата на 8 см. Найти периметр квадрата.
63. На сторонах AB , BC , CD , AD квадрата $ABCD$ выбраны соответственно точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 так, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Доказать, что $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.
64. Диагональ квадрата равна 8 см. Через каждую из вершин квадрата проведена прямая, параллельная соответствующей диагонали. Определить периметр и вид образованного четырехугольника.
65. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найти периметр квадрата, если катет треугольника равен 4 см.
66. Доказать, что биссектрисы углов прямоугольника своим пересечением образуют квадрат.
67. В квадрате $ABCD$ на продолжении стороны BC за точку C выбрана точка K так, что $\angle KAD = 2\angle CAK$. Найти периметр квадрата, если $AK = 8$ см.
68. В квадрат вписан прямоугольник так, что на каждой из сторон квадрата находится одна вершина прямоугольника, а стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Найти периметр прямоугольника, если диагональ квадрата равна 16 см.
69. Построить квадрат по заданной диагонали.
70. Построить квадрат по заданной сумме длин диагонали и стороны.

Теорема Фалеса.

Теорема о пропорциональных отрезках

71. Поделить данный отрезок на пять равных частей.
72. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ (рис. 71) обозначили точки M и N , а на стороне CD — точки E и F так, что $BN = NM = MA = CE = EF = FD$. Отрезки BE , NF , MD пересекают диагональ AC в точках R , Q , P соответственно. Доказать, что $AP = PQ = QR = RC$.

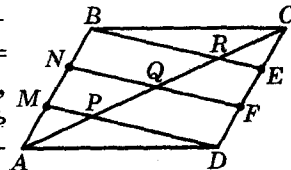


Рис. 71

73. Точка K — середина медианы AD треугольника ABC (рис. 72). Найти отношение $AP : PC$.

74. Стороны угла ABC пересекают параллельные прямые a , b , c (рис. 73). Найти отношение длин отрезков BP_1 , P_1N_1 , N_1M_1 , если $BP = 2$, $PN = 3$, $MN = 6$.

75. Параллельные прямые m и n пересекают стороны угла ABC (рис. 74). Найти длину отрезка MN , если $BE = 4$, $EF = 12$, $BM = 5$.

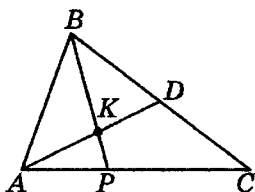


Рис. 72

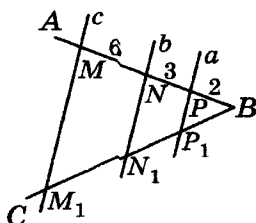


Рис. 73

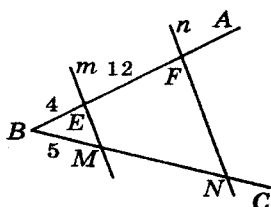


Рис. 74

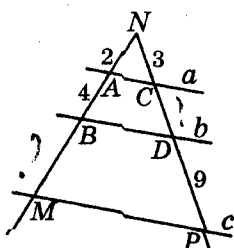


Рис. 75

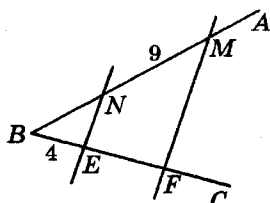


Рис. 76

76. Параллельные прямые a , b , c пересекают стороны угла MNP (рис. 75). Найти длины отрезков CD и MB , если $AN = 2$, $NC = 3$, $DP = 9$, $AB = 4$.

77. Параллельные прямые c и d пересекают стороны угла ABC (рис. 76). Найти длину отрезка EF , если $BE = 4$, $MN = 9$, $BN = EF$.

78. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка E так, что $AE : EC = 5 : 4$ (рис. 77). В каком отношении отрезок BE делит медиану AD ?

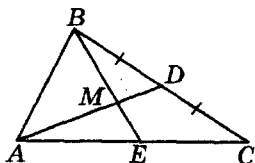


Рис. 77

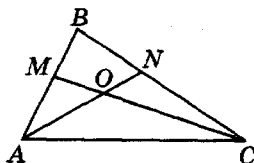


Рис. 78

79. На рис. 78 $BN : NC = 5 : 9$, $CO : OM = 3 : 1$. Найти отношение $AM : MB$.

80. Даны отрезки a , b , c , d и e . Построить отрезки:

- 1) $\frac{cb}{a}$; 2) $\frac{b^2}{c}$; 3) $\frac{a^2c}{db}$; 4) $\frac{abc}{d^2}$.

Средняя линия треугольника

81. Периметр треугольника, образованного средними линиями данного треугольника, равен 12 см. Найти периметр данного треугольника.

82. Стороны треугольника равны 16 см, 8 см, 12 см. Найти стороны треугольника, вершины которого являются серединами средних линий начального треугольника.

83. Периметр треугольника, вершины которого — середины сторон данного треугольника, равен 54 см, а стороны данного треугольника относятся как 3:7:8. Найти стороны данного треугольника.

84. Определить вид треугольника, если две его средние линии взаимно перпендикулярны и равны.

85. Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 56 см и 8 см (рис. 79). Точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 — середины отрезков OA , OB , OC , OD соответственно. Определить вид образованного четырехугольника и его периметр.

86. В ромбе $ABCD$ точки E , F , K — середины сторон AB , BC , CD соответственно (рис. 80). Доказать, что $EF \perp FK$.

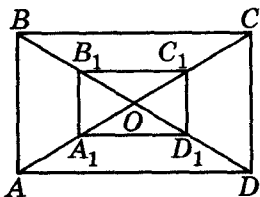


Рис. 79

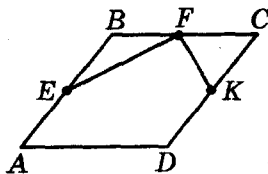


Рис. 80

87. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l . M — середина отрезка AB . Точки A и M удалены от прямой l на 6 см и 1 см соответственно. На каком расстоянии находится точка B от прямой l ?
- ✓ 88. Точка K — середина катета BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$). Расстояние от точки K до гипотенузы AB равно 3 см. Найти гипотенузу.
89. Определить вид четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон:
1) прямоугольника; 2) ромба.
90. Диагонали данного четырехугольника перпендикулярны и равны 8 см. Найти периметр четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон данного четырехугольника, и определить его вид.
91. Меньшая сторона прямоугольника равна 6 см, а периметр четырехугольника, вершины которого — середины сторон данного прямоугольника, равен 24 см. Определить вид образованного четырехугольника, найти угол, образованный диагональю прямоугольника с большей стороной.
92. Через вершины треугольника ABC проведены прямые, параллельные противоположным сторонам. Эти прямые при пересечении образовали треугольник $A_1B_1C_1$. Доказать, что высоты треугольника ABC являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$.
93. В равностороннем треугольнике медиана равна 12 см. Найти расстояние от точки пересечения медиан до сторон треугольника.
94. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точка M пересечения медиан удалена от вершины B на 4 см. Найти расстояние от середины боковой стороны до основания треугольника.
95. Построить треугольник по двум точкам — серединам двух сторон треугольника и углом, образованным этими сторонами с третьей стороной треугольника.
96. Даны угол ABC , точка M на стороне BA и точка K внутри угла такая, что $MK \parallel BC$. Провести через точку K прямую, пересекающую стороны угла ABC , отрезок которой, лежащий между сторонами угла, делится точкой K пополам. Сколько решений имеет задача?

Трапеция

97. Два угла трапеции равны 37° и 126° . Найти два других ее угла.
98. Существует ли трапеция, у которой два противоположных угла тупые? Если ответ положителен, сделать рисунок.
99. Существует ли трапеция, у которой три угла прямые? Если ответ положителен, сделать рисунок.
100. Могут ли углы трапеции, взятые в последовательном порядке, относиться как $5:4:6:3$?
101. Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины острого угла, образует с боковой стороной угол 24° . Найти углы трапеции.
102. В прямоугольной трапеции острый угол в 4 раза меньше тупого. Найти углы трапеции.
103. В равнобедренной трапеции диагональ равна большому основанию и образует с ней угол 38° . Найти углы трапеции.
104. Определить углы равнобедренной трапеции, если величины ее противоположных углов относятся как $1:3$.
105. Внутри трапеции $ABCD$ отмечена точка O , равноудаленная от основания трапеции и боковой стороны AB . Доказать, что угол AOB равен 90° .
106. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна меньшему основанию, а угол между диагоналями равен 110° . Найти углы трапеции.
107. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна боковой стороне и является биссектрисой острого угла. Найти углы трапеции.
108. O — точка пересечения диагоналей равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AB = CD$). Доказать, что $AO = OD$.
109. Основания равнобедренной трапеции равны 9 см и 15 см. Найти отрезки, на которые делит большее основание высота, проведенная из вершины тупого угла.
110. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 5 см. Высота, проведенная из вершины тупого угла, образует прямоугольный треугольник, катет которого, лежащий на большем основании, равен 2 см. Найти большее основание трапеции.
111. В равнобедренной трапеции большее основание равно 12 см, а боковая сторона — 4 см. Острый угол трапеции равен 60° . Найти меньшее основание трапеции.

112. В равнобедренной трапеции с тупым углом 120° через вершину тупого угла проведена прямая, параллельная боковой стороне и отсекающая от большего основания отрезок длиной 12 см. Найти периметр трапеции, если меньшее основание равно 16 см.
113. В равнобедренной трапеции диагональ является биссектрисой угла при основании. Большее основание трапеции равно 26 см, а периметр — 50 см. Найти меньшее основание трапеции.
114. Периметр трапеции равен 36 см, а ее меньшее основание равно 5 см. Через вершину тупого угла проведена прямая, параллельная боковой стороне. Вычислить периметр образованного треугольника.
115. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Высота трапеции равна 8 см. Найти периметр трапеции, если боковая сторона равна 12 см.
116. В прямоугольной трапеции диагональ является биссектрисой тупого угла. Основания трапеции равны 18 см и 12 см. Найти периметр трапеции, если острый угол равен 30° .
117. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 81) точки E, K, P являются серединами сторон AD, AB, BC соответственно. Доказать, что $KP = KE$.
118. Построить трапецию по основаниям и диагоналям.

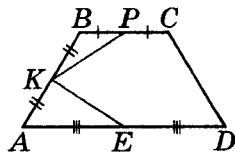


Рис. 81

Средняя линия трапеции

119. Найти среднюю линию трапеции, если ее основания равны: 1) 7 см и 9 см; 2) a и $7a$.
120. Найти основание трапеции, если ее другое основание и средняя линия соответственно равны:
1) 9 см и 5 см; 2) $3a$ и $7a$; 3) a и b .
121. Может ли средняя линия трапеции быть равной одному из оснований? Ответ обосновать.
122. Боковая сторона трапеции разделена на 4 равных части. Через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям. Два первых отрезка этих прямых, считая от меньшего основания, расположенных между боковыми сторонами трапеции, соответственно равны 4 см и 7 см. Найти основания трапеции.

123. Сторона AB треугольника ABC разделена на три равных части. Через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC . Наименьший из образованных отрезков равен 3 см. Найти длину стороны BC .
124. Средняя линия трапеции равна 24 см. Основания трапеции относятся как 3:5. Найти основания трапеции.
125. Основания трапеции равны 8 см и 14 см. Найти отрезки, на которые диагональ делит среднюю линию.
126. Диагональ трапеции делит среднюю линию на отрезки, один из которых на 5 см больше другого. Найти большее основание трапеции, если меньшее равно 6 см.
127. Средняя линия трапеции делится диагоналями на три равные части. Найти большее основание трапеции, если ее меньшее основание равно 6 см.
128. Отрезки, на которые диагональ трапеции делит среднюю линию, относятся как 5 : 9, а их разность равна 12 см. Найти основания трапеции.
129. В равнобедренной трапеции диагональ является биссектрисой острого угла, одно из оснований на 6 см больше другого. Найти среднюю линию трапеции, если ее периметр равен 74 см.
130. Средняя линия равнобедренной трапеции равна ее высоте. Доказать, что диагонали этой трапеции взаимно перпендикулярны.
131. В равнобедренной трапеции диагональ является биссектрисой острого угла и делит среднюю линию на отрезки длиной 6 см и 8 см. Найти периметр трапеции.
132. В прямоугольной трапеции большее основание равно 21 см. Высота, проведенная из вершины тупого угла, делит среднюю линию на отрезки, длины которых относятся как 3:2, считая от меньшей боковой стороны. Найти меньшее основание трапеции.
133. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 18 см, а большее основание — 32 см. Угол между ними равен 60° . Найти среднюю линию трапеции.
134. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее среднюю линию на отрезки длиной 3 см и 8 см. Найти углы трапеции, если ее высота равна 5 см.

Теорема Пифагора

135. Построить угол, косинус которого равен:

- 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) 0,3.

136. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны:

- 1) 5 см и 12 см; 2) 25 см и 60 см.

137. Найти второй катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза и первый катет соответственно равны: 1) 17 см и 15 см; 2) 9 см и 5 см.

138. Диагональ квадрата равна $2\sqrt{2}$ см. Найти сторону квадрата.

139. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 37$ см, $AC = 24$ см. Найти длину высоты BD .

140. Сторона ромба равна 41 см, а одна из его диагоналей — 18 см. Найти вторую диагональ ромба.

141. Две стороны прямоугольного треугольника равны 4 см и 7 см. Найти третью сторону. Рассмотреть все возможные случаи.

142. Существует ли прямоугольный треугольник, длины всех сторон которого выражаются нечетными числами?

143. Найти неизвестный отрезок x на рис. 82.

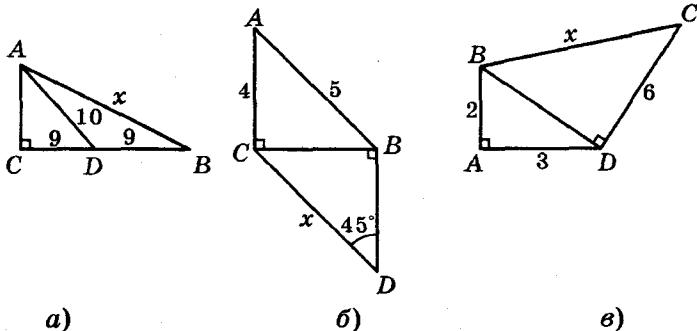


Рис. 82

144. Периметр прямоугольного треугольника равен 80 см, а катеты относятся как 8:15. Найти стороны треугольника.

145. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 8 см, а второй меньше гипотенузы на 4 см. Найти стороны треугольника.

146. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) катет AC равен 5 см, а медиана AM равна 13 см. Найти гипотенузу AB .
147. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 75 см, катеты относятся как 3:4. Найти периметр треугольника.
148. В треугольнике ABC угол C тупой, $AC = 13$ см, $AB = 15$ см, а высота AE равна 12 см. Найти сторону BC .
149. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) высота AD равна 8 см. Найти длину боковой стороны, если $BD - DC = 2$ см.
150. Основание равнобедренного треугольника на 2 см больше боковой стороны. Найти стороны треугольника, если высота, проведенная к основанию, равна 8 см.
151. Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к основанию как 5:8. Периметр треугольника равен 36 см. Найти длину высоты, проведенной к основанию.
152. В прямоугольный треугольник вписана окружность радиусом 4 см. Точка касания делит гипотенузу на отрезки, длины которых относятся как 10:3. Найти стороны треугольника.
153. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит один из катетов на отрезки длиной 3 см и 5 см, считая от вершины прямого угла. Найти гипотенузу и второй катет треугольника.
154. Найти диагональ квадрата, если она больше его стороны на 3 см.
155. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3:4, а разность отрезков, на которые делит гипотенузу биссектриса прямого угла, равна 10 см. Найти периметр треугольника.
156. Отношение боковой стороны к основанию равнобедренного треугольника равно 5:6, а разность отрезков, на которые биссектриса угла при основании делит высоту, проведенную к основанию, равна 6 см. Найти стороны треугольника.
157. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = \sqrt{97}$ см. Точка пересечения медиан удалена от вершины B на 6 см. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне.

158. Высота равнобедренной трапеции равна 9 см, а боковая сторона — 15 см. Найти разность длин оснований трапеции.
159. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 17 см, а сторона AD делится высотой BE на отрезки $AE = 8$ см и $ED = 20$ см. Найти диагональ BD параллелограмма.
160. Основания трапеции равны 9 см и 11 см, а диагонали 12 см и 16 см. Найти высоту трапеции.
161. Основания равнобедренной трапеции относятся как 1:5, а радиус окружности, вписанной в эту трапецию, равен 7,5 см. Найти стороны трапеции.
162. Хорда AB перпендикулярна радиусу ON (O — центр окружности) и делит ее на отрезки $OM = 9$ см и $MN = 6$ см. Найти длину хорды AB .
163. Радиусы двух окружностей, касающихся внешне, равны 2 см и 8 см. Найти длину их общей внешней касательной.

Перпендикуляр и наклонная

164. Из одной точки к прямой проведены две равные наклонные. Проекция этих наклонных равны по 5 см. Найти расстояние между основаниями наклонных.
165. Точка находится на расстоянии 8 см от прямой. Из этой точки к прямой проведена наклонная, образующая угол 30° с прямой. Найти длину наклонной.
166. Из точки к прямой проведены две наклонные. Длина одной из них равна 15 см, а ее проекция — 12 см. Найти длину второй наклонной, если она образует с прямой угол 45° .
167. Из точки, находящейся на расстоянии 10 см от прямой, проведены две наклонные, длины которых равны 26 см и 20 см. Найти расстояние между основаниями наклонных. Сколько решений имеет задача?
168. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a на расстоянии 3 см и 9 см. Найти расстояние между проекциями этих точек на прямую, если $AB = 10$ см.
169. Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых равны 5 см и 7 см, а разность проекций наклонных — 4 см. Найти расстояние от точки до прямой.

170. Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых относятся как 2:3, а длины их проекций соответственно равны 2 см и 7 см. Найти длины этих наклонных.
171. Стороны треугольника равны 9 см, 11 см и 12 см. Найти проекции двух меньших сторон на большую.
172. Доказать, что разность квадратов длин двух наклонных, проведенных к прямой из одной точки, равна разности квадратов длин их проекций.
173. Из точки к прямой проведены две наклонные, разность длин которых равна 5 см, а разность длин их проекций — 7 см. Найти расстояние от точки до прямой, если длины большей наклонной и ее проекции — целые числа, причем длина наклонной не более 13 см.

Неравенство треугольника

174. Какие из приведенных троек чисел могут быть длинами сторон одного треугольника:
 1) 16, 19, 28; 2) 39, 63, 24; 3) 80, 25, 54?
175. Могут ли стороны треугольника относиться как:
 1) 2:3:4; 2) 7:9:17; 3) 8:3:11?
176. Периметр треугольника равен 24 см. Может ли одна из его сторон быть равной:
 1) 11 см; 2) 12 см; 3) 13 см?
177. Существует ли треугольник с периметром 18 см, одна сторона которого на 10 см больше второй и на 1 см меньше третьей?
178. Может ли сумма диагоналей параллелограмма быть больше его периметра?
179. Доказать, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.
180. Доказать, что сумма диагоналей четырехугольника больше его периметра.
181. Доказать, что $AB + BC + CD > AD$ (рис. 83).
182. Доказать, что сумма медиан треугольника меньше его периметра.

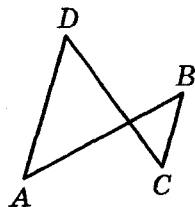


Рис. 83

183. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 2 см. Найти длину основания, если известно, что она выражается целым числом. Сколько решений имеет задача?
184. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 12 см, а вторая — 10 см. Найти третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?
185. Периметр равнобедренного треугольника равен 36 см, а две его стороны относятся как 2:5. Найти стороны треугольника.

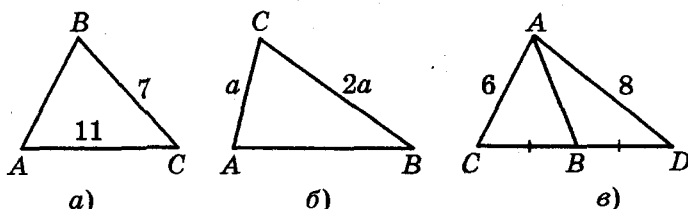


Рис. 84

186. В каких пределах изменяется длина отрезка AB (рис. 84)?

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

187. Построить угол, если:

1) тангенс его равен: а) $\frac{3}{5}$; б) 2; в) 0,8;

2) синус его равен: а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{2}{5}$; в) 0,5;

3) косинус его равен: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{7}$; в) 0,3.

188. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника соответственно равны 6 см и 10 см. Найти:

① синус острого угла, лежащего против большего катета;

② косинус острого угла, прилежащего к меньшему катету;

3) тангенс острого угла, лежащего против большего катета.

189. В прямоугольном треугольнике катеты равны 5 см и 12 см. Найти:

- 1) тангенс острого угла, лежащего против большего катета;
- 2) косинус острого угла, противоположного меньшему катету;
- 3) синус острого угла, прилежащего к большему катету.
190. Найти неизвестные стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), если:
- 1) $AC = 3$ см, $\cos \angle A = \frac{1}{4}$; 4) $AB = 12$ см, $\cos \angle B = \frac{4}{5}$;
- 2) $BC = 5$ см, $\sin \angle A = \frac{2}{3}$; 5) $AC = 6$ см, $\cos \angle B = \frac{1}{3}$;
- 3) $AC = 8$ см, $\operatorname{tg} \angle B = 3$; 6) $AB = 8$ см, $\operatorname{tg} \angle B = \frac{6}{7}$.
191. По двум данным элементам прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) найти его другие стороны и углы:
- 1) $AB = 12$ см, $\angle B = 52^\circ$; 4) $AB = 14$ см, $BC = 6$ см;
- 2) $BC = 6$ см, $\angle B = 60^\circ$; 5) $BC = 9$ см, $AC = 12$ см.
- 3) $AC = 10$ см, $\angle B = 73^\circ$;
192. Основание равнобедренного треугольника равно 10 см, а боковая сторона — 13 см. Найти значение всех тригонометрических функций половины угла при вершине равнобедренного треугольника.
193. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) высота BD равна 6 см, $\angle A = 24^\circ$. Найти боковую сторону и основание.
194. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) $AC = 12$ см, $\angle B = 64^\circ$. Найти боковую сторону и высоту, проведенную к основанию.
195. Из точки, лежащей на расстоянии 8 см от прямой, проведены две наклонные, образующие с прямой углы 30° и 45° . Найти длины наклонных и их проекций на прямую.
196. Из точки, лежащей на расстоянии 10 см от прямой, проведены две наклонные, образующие с прямой углы 30° и 60° . Найти расстояние между основаниями наклонных. Сколько решений имеет задача?

197. Найти неизвестные стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), если:

1) $AB = c$, $\angle B = \beta$;

3) $BC = a$, $\angle A = \alpha$.

2) $AC = b$, $\angle A = \alpha$;

198. По рисунку определить длины отрезков AD и CD (рис. 85).

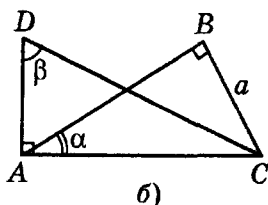
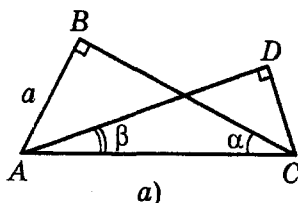


Рис. 85

199. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 86) $\angle C = 90^\circ$, $BK = m$, $\angle CBK = \alpha$, $\angle ABK = \beta$. Найти длину отрезка AK .

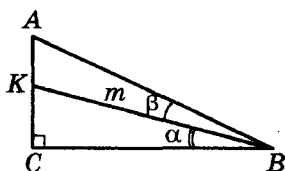


Рис. 86

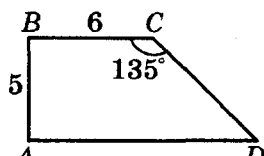


Рис. 87

200. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ равна d . Диагональ BD образует со стороной CD угол β . Найти стороны прямоугольника.

201. Сторона ромба равна a , а тупой угол — α . Найти диагонали ромба.

202. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC соответственно равны 18 см и 12 см. Боковая сторона образует угол 30° с основанием. Найти диагональ трапеции.

203. В прямоугольной трапеции $ABCD$ (рис. 87) $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $\angle BCD = 135^\circ$. Найти стороны AD и CD трапеции.

204. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно b , а высота h образует с боковой стороной угол α . Найти периметр трапеции.

205. В трапеции $ABCD$ (рис. 88)
 $BC = 4$ см, $CD = 6$ см, $\angle BAD = 60^\circ$,
 $\angle ADC = 135^\circ$. Найти основание AD
 трапеции.

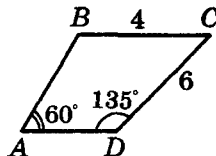


Рис. 88

206. В равнобедренной трапеции $ABCD$
 $AB = CD = 2$, $BC = 6\sqrt{2}$, $AD = 8\sqrt{2}$.
 Найти углы трапеции.

Изменение синуса, косинуса и тангенса при возрастании угла

207. Сравнить синусы, косинусы и тангенсы углов прямо-
 угольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), если катет AC
 не меньше катета BC .
208. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 см и
 12 см. Найти:
 1) тангенс меньшего острого угла;
 2) синус меньшего острого угла;
 3) косинус большего острого угла.
209. Как изменяются синус, косинус и тангенс угла, если
 угол уменьшается от 60° до 30° ?
210. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$)
 $2 \sin \angle A = 3 \sin \angle B$. Сравнить катеты AC и BC .
211. Для каких острых углов косинус меньше синуса?

Декартовы координаты на плоскости

212. В каких координатных четвертях находятся точки
 $A(2; 3)$, $B(-7; 9)$, $C(-8; -1)$, $D(5; -12)$?
213. В каких четвертях может находиться точка N , если
 произведение ее абсциссы и ординаты — отрица-
 тельное число?
214. Что можно сказать о координатах точки A , если:
 1) точка A лежит на оси ординат;
 2) точка A лежит на биссектрисе третьего координат-
 ного угла?
215. Каковы особенности взаимного расположения двух
 точек, если их абсциссы имеют различные знаки, а
 ординаты равны нулю?

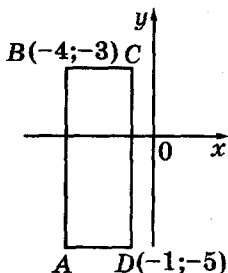


Рис. 89

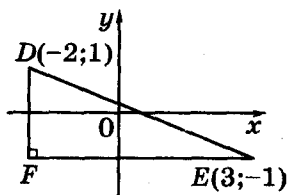


Рис. 90

216. Указать координаты вершин прямоугольника $ABCD$ (рис. 89).
217. Найти координаты точки F (рис. 90).
218. Найти расстояния от точек $A(-2; 6)$ и $B(3; -8)$ до координатных осей.

**Координаты середины отрезка.
Расстояние между двумя точками**

219. Найти координаты середины отрезка MN , если:
- 1) $M(2; -5)$, $N(8; 3)$; 3) $M(5; 4)$, $N(-6; -3)$.
 - 2) $M(-7; 9)$, $N(-1, 11)$;
220. M — середина отрезка AB . Найти координаты точки A , если $B(6; -9)$, $M(2; 5)$.
221. Найти координаты точки, делящей отрезок AB в отношении $1:3$, считая от точки A , если $A(5; -7)$, $B(7; -9)$.
222. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-3; -2)$, $B(5; 3)$, $C(3; -5)$. Найти координаты четвертой вершины.
223. Точки $B_1(3; -1)$ и $C_1(-4; 2)$ — середины сторон AC и BA треугольника ABC соответственно. Найти координаты точек B и C , если $A(-5; 3)$.
224. Точки $M(5; -2)$, $N(3; 4)$, $P(-3; -6)$ — середины сторон треугольника. Найти координаты его вершин.
225. Найти расстояние между точками A и B , если:
- 1) $A(3; -7)$, $B(6; -3)$; 3) $A(-1; 3)$, $B(4; -9)$.
 - 2) $A(5; -2)$, $B(-3; 4)$;

- 226.** В треугольнике ABC $A(3; -5)$, $B(7; 1)$, $C(-3; 9)$.
Найти длину MN средней линии треугольника ABC ,
где M и N — середины сторон AC и BC соответственно.
- 227.** Найти длину отрезка, концы которого лежат на осях
координат, а его серединой является точка $M(-6; 4)$.
- 228.** Доказать, что точки $A(-3; -7)$, $B(2; 3)$, $C(0; -1)$
лежат на одной прямой. Какая из точек лежит между
двумя другими?
- 229.** Вершины треугольника ABC имеют координаты
 $A(4; -2)$, $B(-4; 4)$, $C(-12; 10)$. Доказать, что тре-
угольник ABC — равнобедренный.
- 230.** Расстояние между точками $A(x; 3)$ и $B(1; -5)$ равно
10. Найти x .
- 231.** На оси ординат найти точку, равноудаленную от
точек $A(4; -5)$ и $B(2; 3)$.
- 232.** Доказать, что четырехугольник с вершинами
 $A(-1; 1)$, $B(-3; 7)$, $C(3; 5)$, $D(5, -1)$ — ромб.
- 233.** Найти координаты вершины B равностороннего тре-
угольника ABC , если известны координаты вершин
 $A(0; -4)$, $C(0; 2)$.

Уравнение окружности

- 234.** Записать уравнение окружности, зная координаты
центра K и радиус R :
- 1) $K(-3; 1)$, $R = 3$; 3) $K(-4; 0)$, $R = \sqrt{5}$;
2) $K(0; 2)$, $R = 2$;
- 235.** Записать уравнение окружности радиуса 5, проходя-
щей через точку $M(2; -3)$, центр которой лежит на
оси абсцисс.
- 236.** Записать уравнение окружности с центром в точке
 $T(-1; 2)$, проходящей через точку $A(3; -5)$.
- 237.** Записать уравнение окружности, диаметром которой
является отрезок AB , если $A(-3; 9)$, $B(5; -7)$.
- 238.** Записать уравнение окружности, центр которой на-
ходится в точке $A(2; -3)$, и которая касается оси
абсцисс.
- 239.** По уравнению окружности определить координаты
ее центра и радиус:
- 1) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$; 2) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 49$;

$$3) x^2 + (y - 4)^2 = 16; \quad 5) x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0;$$

$$4) (x + 3)^2 + y^2 = 12; \quad 6) x^2 + y^2 - 12x - 36 = 0.$$

240. Найти координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 - 8x + y^2 + 10y - 41 = 0$. Определить положение точек $O(0; 0)$, $A(-1; 1)$, $B(10; 1)$ относительно окружности.

241. Определить взаимное расположение двух окружностей:

$$1) (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1 \text{ и } (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9;$$

$$2) (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9 \text{ и } (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9;$$

$$3) (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \text{ и } (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16;$$

$$4) (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \text{ и } (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 1.$$

Уравнение прямой

242. Найти координаты точек пересечения прямой $4x - 3y + 12 = 0$ с осями координат. Принадлежат ли этой прямой точки $M(1; 5)$ и $N(3; 8)$?

243. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2; 1)$ и $B(4; 7)$.

244. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $E(-2; -3)$ и параллельной:

1) оси абсцисс;

2) оси ординат.

245. Точки $A(-3; 5)$, $B(2; 4)$, $C(1; 3)$ — вершины треугольника ABC . Записать уравнение прямой, содержащей медиану BM треугольника.

246. При каком значении a точки $A(2; -3)$, $B(4; 1)$, $C(a; -2)$ лежат на одной прямой?

247. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки:

$$1) A(5; -2) \text{ и } B(-3; 1); \quad 3) A(-5; 1) \text{ и } B(2; -7).$$

$$2) A(4; 3) \text{ и } B(-3; -1);$$

248. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -4)$ и угловой коэффициент которой равен:

$$1) 4; 2) -1; 3) 0.$$

249. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $E(-4; 3)$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол: 1) 30° ; 2) 120° .

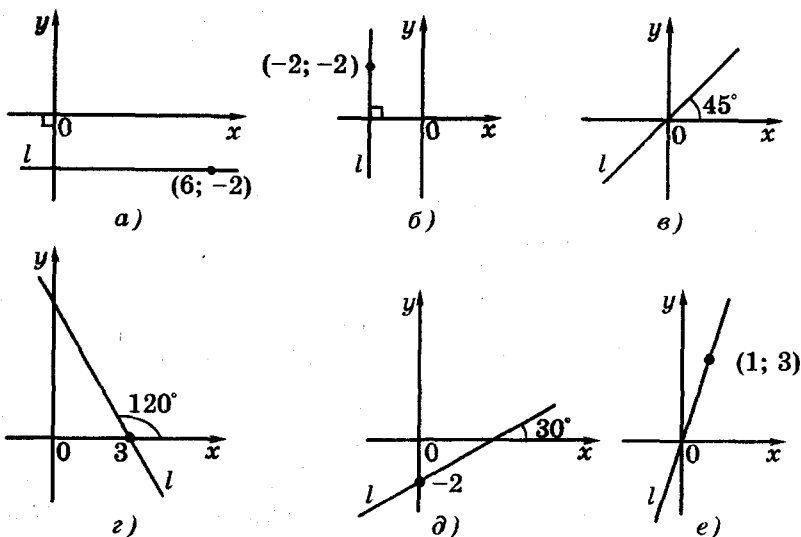


Рис. 91

250. Среди прямых, заданных своими уравнениями, указать пары параллельных:

1) $x - 3y + 5 = 0$;

4) $8x - y + 19 = 0$;

2) $3x + 2y + 15 = 0$;

5) $9x + 6y - 1 = 0$.

3) $-2x + 6y + 17 = 0$;

251. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $K(2; -3)$ и параллельной прямой $y = -3x + 1$.

252. Записать уравнение прямой l (рис. 91).

253. Найти координаты точки пересечения прямых $2x - 5y - 7 = 0$ и $-x + 3y - 12 = 0$.

254. Найти координаты точек пересечения прямой $y = -x + 2$ и окружности $x^2 + y^2 = 4$.

Симметрия относительно точки (центральная симметрия)

255. Даны две точки A и B . Построить точку B_1 , симметричную точке B относительно точки A .

256. Даны отрезок AB и точка O , принадлежащая этому отрезку. Построить отрезок, симметричный отрезку AB относительно точки O .

257. Дан луч AB . Построить луч, симметричный данному относительно точки A .
258. Даны угол ABC и точка O , принадлежащая лучу BA . Построить угол, симметричный углу ABC относительно точки O .
259. Имеет ли центр симметрии: 1) окружность; 2) острый угол; 3) пара параллельных прямых? Если ответ положителен, то указать центр симметрии.
260. Может ли луч при симметрии относительно некоторой точки отобразиться сам в себя?
261. Точки A и E симметричны относительно точки F , лежащей на стороне BC параллелограмма $ABCD$ (рис. 92). Доказать, что точки E и D симметричны относительно точки C .

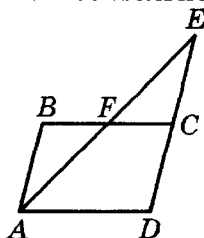


Рис. 92

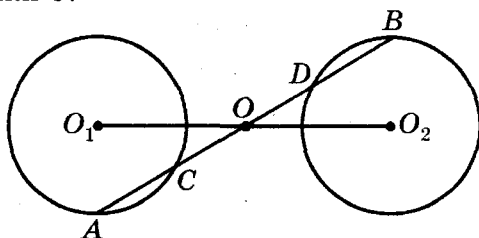


Рис. 93

262. O_1 и O_2 — центры окружностей с равными радиусами (рис. 93). Точка O является серединой отрезков AB и CD . Доказать, что данные окружности симметричны относительно точки O .
263. Доказать, что если четырехугольник имеет центр симметрии, то он — параллелограмм.
264. Найти точку, симметричную точке $A(-7; 3)$ относительно начала координат.
265. Среди точек $A(2; 3)$, $B(-2; 3)$, $C(2; -3)$, $D(-2; 3)$, $E(2; -3)$, $F(-2; 3)$ указать пары точек, симметричных относительно начала координат.
266. Симметричны ли точки $A(-3; 6)$, $B(5; 4)$ относительно точки $Q(-1; 5)$?
267. Найти координаты центра симметрии точек $A(-3; 8)$ и $B(-9; 6)$.
268. Найти координаты точки C , симметричной точке $A(2; -4)$ относительно точки $B(3; 5)$.
269. Точки $A(5; y)$ и $B(x; -7)$ симметричны относительно точки $P(3; -8)$. Найти x и y .

- 270.** Записать уравнение окружности, симметричной окружности $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 7$ относительно:
- 1) начала координат;
 - 2) точки $M(0; 3)$.
- 271.** Записать уравнение прямой, симметричной прямой $3x - 4y + 9 = 0$ относительно:
- 1) начала координат;
 - 2) точки $M(-1; -2)$.
- 272.** Построить отрезок с серединой в данной точке и концами на данной окружности и данной прямой.
- 273.** Даны две окружности равных радиусов, касающиеся внешне. Доказать, что окружности отсекают на любой прямой, проходящей через точку касания, равные отрезки.

Симметрия относительно прямой (осевая симметрия)

- 274.** Даны прямая l и точка M , не принадлежащая этой прямой. Построить точку, симметричную точке M относительно прямой l .
- 275.** Построить в тетради равносторонний треугольник со стороной 3 см, провести прямую, проходящую через одну вершину. Построить треугольник, симметричный данному относительно этой прямой.
- 276.** Указать условия, при которых прямая l будет осью симметрии некоторой другой прямой.
- 277.** На рис. 94 $AB = AD$, $BC = CD$. Доказать, что точки B и D симметричны относительно прямой AC .
- 278.** Доказать, что если треугольник имеет две оси симметрии, то он равносторонний.
- 279.** Сколько осей симметрии имеет:
- 1) квадрат;
 - 2) прямая;
 - 3) отрезок?

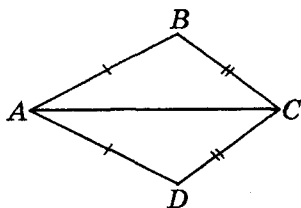


Рис. 94

- 280.** Точки A и B лежат на одинаковом расстоянии от прямой l . Можно ли считать, что эти точки симметричны относительно прямой l ?
- 281.** Начертить четырехугольник, имеющий только одну ось симметрии, причем ни одна из диагоналей не должна принадлежать этой оси.

282. Может ли диагональ трапеции быть ее осью симметрии? Ответ обосновать.

283. Прямые l и m , проходящие через середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, — его оси симметрии (рис. 95). Доказать, что $ABCD$ — прямоугольник.

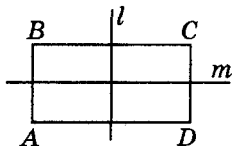


Рис. 95

284. Найти координаты точек, симметричных точке $M(-2; 5)$ относительно осей координат и начала координат.

285. Найти x и y , если точки $A(3; y)$ и

$B(x; -4)$ симметричны относительно оси абсцисс.

286. Построить точки, симметричные точкам $M(1; -2)$, $N(0; -1)$, $K(-3; 0)$ относительно: 1) оси Ox ; 2) оси Oy ; 3) прямой, содержащей биссектрисы II и IV координатных углов. Записать координаты полученных точек.

287. Оси симметрии ромба — прямые $x = -2$, $y = 1$. Две его вершины имеют координаты $A(-2; 3)$ и $B(2; 1)$. Найти координаты других вершин ромба.

288. Оси симметрии прямоугольника лежат на осях координат. Координаты одной его вершины $(2; -3)$. Найти координаты вершин ромба, для которого вершины данного прямоугольника являются серединами сторон.

289. Построить ромб $ABCD$, в котором диагональ AC длиной m лежит на данной прямой, а вершины B и D лежат на двух других данных прямых.

290. Построить квадрат, в котором две противоположные вершины лежат на данной прямой, а две другие — на двух данных окружностях.

Поворот

291. Даны две точки M и O . Построить точку M_1 , в которую переходит точка M при повороте вокруг точки O : 1) против часовой стрелки на угол 70° ; 2) по часовой стрелке на угол 110° .

292. Даны отрезок AB и точка O , ему не принадлежащая. Построить отрезок A_1B_1 , в который переходит отрезок AB при повороте вокруг точки O на угол 60° против часовой стрелки.

- 293.** Дан луч OA . Построить луч, в который переходит луч OA при повороте на угол 50° по часовой стрелке относительно: 1) точки M , принадлежащей лучу; 2) точки F , не принадлежащей лучу.
- 294.** Построить точки, в которые переходят точки $A(2; -1)$, $B(-3; 2)$, $C(1; -5)$, $D(0; -3)$, $E(6; 0)$ при повороте на угол 90° против часовой стрелки относительно начала координат. Указать координаты полученных точек.
- 295.** Точка $A(a; -2)$ переходит в точку $B(b; 3)$ при повороте вокруг начала координат на угол 90° по часовой стрелке. Найти a и b .
- 296.** На какой минимальный угол необходимо повернуть отрезок относительно его середины, чтобы он перешел сам в себя?
- 297.** Построить равносторонний треугольник, одна из вершин которого находится в данной точке, лежащей внутри угла, а две других — на сторонах этого угла.
- 298.** Построить равнобедренный прямоугольный треугольник, вершина прямого угла которого находится в данной точке, а две другие вершины — на данных окружностях.
- 299.** Построить квадрат, если известно положение его центра, а две соседние вершины лежат на данной прямой и данной окружности.
- 300.** Построить квадрат с центром в данной точке так, чтобы середины двух его соседних сторон принадлежали двум данным окружностям.

Параллельный перенос

- 301.** Параллельный перенос задается формулами $x' = x - 4$, $y' = y + 2$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки $M(4; -2)$, $N(-2; 0)$, $K(0; -6)$? Какие точки при этом параллельном переносе переходят в точки $D(-6; -9)$, $E(0; -4)$, $F(11; 0)$?
- 302.** При параллельном переносе точка $M(-8; 6)$ переходит в точку $T(3; -7)$. В какую точку при этом параллельном переносе переходит точка $Q(-1; -9)$? Записать формулы этого параллельного переноса.
- 303.** Записать формулы параллельного переноса, при котором точка $F(-6; 4)$ переходит в точку $K(3; -2)$ и наоборот, точка K — в точку F .

304. Построить образы точек $D(-4; 2)$, $E(0; 3)$, $F(-2; 0)$ при параллельном переносе в отрицательном направлении оси Ox на 3 единицы. Записать координаты построенных точек.
305. Точка $M(-5; 9)$ — середина отрезка AB , $A(3; 5)$. При параллельном переносе точка B переходит в точку $B_1(4; -7)$. Найти координаты точек, в которые переходят точки A и M . Записать формулы этого параллельного переноса.
306. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(3; -2)$, $B(0; 1)$, $C(-3; 4)$. Выполнить параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B . Записать координаты вершин полученного треугольника. Сделать рисунок.
307. Записать уравнение окружности, в которую переходит окружность $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 11$ при параллельном переносе, заданном формулами $x' = x - 4$, $y' = y + 1$.
308. Выполнен параллельный перенос прямой $3x - 4y + 5 = 0$. Записать уравнение полученной прямой, если она проходит через точку: 1) $O(0; 0)$; 2) $K(3; -2)$.

Равенство векторов. Координаты вектора

309. $MKPE$ — параллелограмм (рис. 96). Указать равные векторы.
310. Найти координаты вектора $\overrightarrow{PK}$, если:
- 1) $P(3; -4)$, $K(-1; 5)$; 3) $P(6; 9)$, $K(0; 0)$;
 - 2) $P(-4; 0)$, $K(0; -4)$; 4) $P(a; b)$, $K(c; d)$.
311. Даны точки $D(5; -4)$, $E(-3; -5)$, $F(x; y)$, $K(2; 7)$. Найти x и y , если $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FK}$.
312. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ (рис. 97).

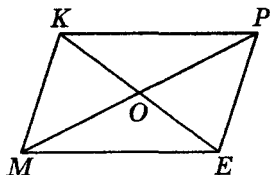


Рис. 96

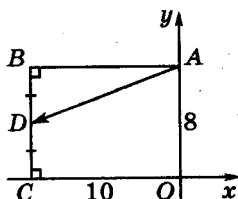


Рис. 97

313. Точка $K(-8; 3)$ — конец вектора $\vec{a}(6; -9)$. Найти координаты начала вектора.
314. Доказать, что четырехугольник $MNKP$ с вершинами в точках $M(-3; 2)$, $N(-1; 6)$, $K(6; 7)$, $P(4; 3)$ является параллелограммом.
315. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(4; -5)$, $B(2; 3)$, $D(-3; -4)$. Найти координаты вершины C .
316. Среди векторов $\vec{a}(5; -3)$, $\vec{b}(-6; 8)$, $\vec{c}(4; -3)$, $\vec{d}(-3; -5)$, $\vec{e}(-\sqrt{21}; 2)$, $\vec{f}(7; -\sqrt{51})$ найти те, которые имеют равные модули.
317. Модуль вектора $\vec{m}(-5; y)$ равен 13. Найти y .
318. Модуль вектора $\vec{n}(x; y)$ равен $\sqrt{5}$, а координата x этого вектора больше координаты y на 1. Найти координаты вектора $\vec{n}$.
319. Две вершины прямоугольника $MNPK$ — точки $M(-2; 4)$ и $N(-2; 7)$, а модуль вектора $\vec{NK}$ равен 5. Найти координаты точек P и K .

Сложение векторов

320. Даны векторы $\vec{c}(-3; 1)$ и $\vec{d}(5; -6)$. Найти:
 1) $\vec{c} + \vec{d}$; 2) $\vec{c} - \vec{d}$; 3) $|\vec{c} + \vec{d}|$; 4) $|\vec{d} - \vec{c}|$.
321. Даны точки $M(0; 5)$ и $N(-6; 0)$. Найти координаты точки K такой, что $\vec{MK} - \vec{NK} = \vec{0}$.
322. Найти координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если их сумма имеет координаты $(-4; 5)$, а разность $-(3; 7)$.
323. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 98). Выразить векторы $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$ через векторы $\vec{AO} = \vec{m}$, $\vec{OD} = \vec{n}$.
324. $ABCD$ — параллелограмм. Найти:
 1) $\vec{AB} - \vec{DB} - \vec{CD}$;
 2) $\vec{CB} + \vec{CD} - \vec{BA} - \vec{DB}$;
 3) $\vec{AB} - \vec{CB} + \vec{CA}$.

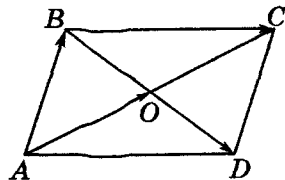


Рис. 98

325. Может ли быть нулевым вектором сумма трех векторов, модули которых равны:
 1) 5; 2; 3; 2) 4; 6; 3; 3) 8; 9; 18?

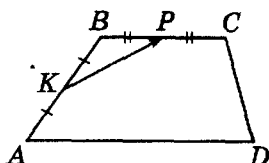


Рис. 99

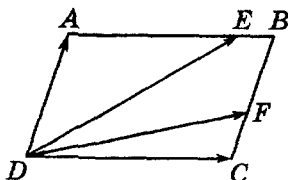


Рис. 100

326. Построить такие ненулевые векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, что $|\vec{m}| = |\vec{n}| = |\vec{m} - \vec{n}|$.

327. Даны векторы $\vec{m}(-2; 4)$, $\vec{n}(3; 1)$, $\vec{k}(x; -1)$. При каком значении x модуль вектора $\vec{m} - \vec{n} - \vec{k}$ наименьший?

328. Найти множество точек $M(x; y)$ координатной плоскости таких, что для точек $C(5; -6)$ и $D(-3; -4)$ выполняется равенство:

$$1) |\vec{DC}| = 2 |\vec{MC}|; \quad 2) |\vec{MC} + \vec{DC}| = \sqrt{3} |\vec{CD}|.$$

Умножение вектора на число. Коллинеарные векторы

329. Даны векторы $\vec{a}(4; -7)$ и $\vec{b}(-3; 6)$. Найти:

$$1) 3\vec{a} + \vec{b}; \quad 2) 4\vec{a} + 6\vec{b}; \quad 3) \vec{b} - 4\vec{a}; \quad 4) 3\vec{b} - 5\vec{a}.$$

330. Вычислить модуль вектора $\vec{a} = 4\vec{c}$, где $\vec{c}(5; -12)$.

331. Найти модуль вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, где $\vec{a}(-4; 2)$, $\vec{b}(1; -2)$.

332. Точки K и P — середины сторон $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ трапеции $ABCD$ (рис. 99). Выразить вектор $\overline{KP}$ через векторы $\overline{AD} = \vec{a}$, $\overline{CD} = \vec{b}$.

333. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ взяты такие точки E и F соответственно, что $\overline{AE} = \frac{5}{6} \overline{AB}$, $\overline{BF} = \frac{2}{3} \overline{BC}$ (рис. 100). Выразить:

$$1) \text{ векторы } \overline{DE} \text{ и } \overline{DF} \text{ через векторы } \overline{DA} = \vec{a}, \overline{DC} = \vec{b};$$

$$2) \text{ векторы } \overline{DA} \text{ и } \overline{DC} \text{ через векторы } \overline{DE} = \vec{m}, \overline{DF} = \vec{n}.$$

334. D — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $MKPF$, $\overline{MD} : \overline{DP} = 4:9$, $\overline{KD} : \overline{DF} = 7:3$. Выразить векторы $\overline{MK}$, $\overline{KP}$, $\overline{PF}$ и $\overline{FM}$ через векторы $\overline{KD} = \vec{m}$, $\overline{MD} = \vec{p}$.

- 335.** На сторонах DF и EF треугольника DEF взяты соответственно такие точки P и K , что $DP : PF = 1 : 4$, $EK : KF = 4 : 3$. Выразить:
- 1) векторы $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$, $\overline{KD}$, $\overline{PE}$ через векторы $\overline{DP} = \overline{m}$, $\overline{FK} = \overline{n}$;
 - 2) векторы $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$, $\overline{EK}$, $\overline{PF}$ через векторы $\overline{KD} = \overline{m}$, $\overline{PE} = \overline{n}$.
- 336.** Точки E и K — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ соответственно. Доказать, что $\overline{EK} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$.
- 337.** Коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, если $A(2; -5)$, $B(1; 4)$, $C(-4; -6)$, $D(-2; 0)$?
- 338.** Среди векторов $\overline{m}(4; -3)$, $\overline{n}(-8; 6)$, $\overline{p}(12; -9)$, $\overline{k}(-0,8; 0,6)$ найти сонаправленные и противоположно направленные векторы.
- 339.** Найти значение n , при котором векторы $\overline{a}(n; -8)$ и $\overline{b}(-4; -2)$ коллинеарны.
- 340.** Даны вектор $\overline{c}(3; -2)$ и точка $M(-4; 5)$. Найти координаты точки F такой, что векторы $\overline{c}$ и $\overline{FM}$ противоположно направлены, а модуль $\overline{FM}$ в 2 раза больше модуля $\overline{c}$.
- 341.** Найти координаты вектора $\overline{c}$, коллинеарного вектору $\overline{p}(12; -5)$, если $|\overline{c}| = 26$.
- 342.** Для ненулевых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ выполняется равенство $4\overline{a} - 9\overline{b} + 5\overline{c} = 2\overline{a} - 7\overline{b} + 6\overline{c}$, причем векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — коллинеарны.
- 343.** Доказать, что четырехугольник $MPFK$ с вершинами в точках $M(-2; 3)$, $P(4; 6)$, $F(4; 1)$, $K(-4; -3)$ — трапеция.
- 344.** Лежат ли точки $D(4; -2)$, $E(5; 1)$ и $F(7; -1)$ на одной прямой?
- 345.** В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 4$, $AD = 9$, M — точка пересечения продолжений боковых сторон. Найти такие числа x и y , что:
- 1) $\overline{BM} = x \cdot \overline{AB}$;
 - 2) $\overline{MC} = y \cdot \overline{MD}$.

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Единичный вектор

- 346.** Среди векторов $\vec{m} \left(\frac{1}{4}; -\frac{2}{3} \right)$, $\vec{p} (0; -1)$, $\vec{k} (1; 1)$, $\vec{n} \left(\frac{5}{13}; -\frac{12}{13} \right)$, $\vec{f} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ указать единичные векторы.
- 347.** Найти координаты единичного вектора, сонаправленного с вектором:
- 1) $\vec{a} (-6; 8)$; 2) $\vec{b} (8; -15)$; 3) $\vec{c} (p; -k)$.
- 348.** Даны единичные векторы $\vec{e}_1 (0; -1)$ и $\vec{e}_2 (1; 0)$. Найти координаты и абсолютную величину векторов:
- 1) $3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$; 2) $4\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$; 3) $k\vec{e}_1 - p\vec{e}_2$.
- 349.** Разложить вектор $\vec{k} (5; -7)$ по векторам $\vec{a} (2; -4)$ и $\vec{b} (3; -5)$.

Скалярное произведение векторов

- 350.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:
- 1) $\vec{a} (2; -1)$, $\vec{b} (4; 3)$; 3) $\vec{a} (6; -3)$, $\vec{b} (2; 4)$.
 2) $\vec{a} (-3; 4)$, $\vec{b} (3; -2)$;
- 351.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:
- 1) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$;
 2) $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$;
 3) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 12$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.
- 352.** Даны векторы $\vec{m} (5; -y)$, $\vec{b} (4; 6)$. При каком значении y $\vec{m} \cdot \vec{b} = -18$?
- 353.** Найти косинус угла между векторами $\vec{a} (4; -1)$ и $\vec{b} (-6; -8)$.
- 354.** Найти косинусы углов треугольника ABC , если $A (-1; 2)$, $B (3; 7)$, $C (2; -1)$. Установить вид треугольника.
- 355.** Даны векторы $\vec{c} (x; 6)$ и $\vec{d} (3; -2)$. При каком значении x векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ перпендикулярны?
- 356.** Даны векторы $\vec{a} (8; y)$ и $\vec{c} (-6; 3)$. При каких значениях y угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$: 1) острый? 2) прямой? 3) тупой?

357. Найти косинусы углов, образованных вектором $\overrightarrow{CD}$, где $C(2; -5)$, $D(-3; 7)$, с отрицательными направлениями координатных осей.
358. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(-2; 3)$, $B(2; 7)$, $C(6; 3)$, $D(2; -1)$ — квадрат.
359. Найти координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a}(2; -3)$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = -26$.
360. Найти координаты вектора, который перпендикулярен вектору $\vec{c}(3; -1)$ и в 2 раза больше него по абсолютной величине.
361. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30° , $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$.
Найти:
1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$; 3) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$; 4) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{b}$.
362. Даны векторы $\vec{c}(1; -2)$ и $\vec{d}(3; 1)$. Найти значение n , при котором векторы $n\vec{c} + \vec{d}$ и $\vec{c}$ перпендикулярны.
363. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = 3\vec{k} + \vec{p}$ и $\vec{b} = \vec{k} - 2\vec{p}$, где $\vec{k}$ и $\vec{p}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.
364. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — единичные векторы, угол между которыми равен 120° . Вычислить скалярное произведение $(3\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$.
365. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.
Найти: 1) $|\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|\vec{a} + 3\vec{b}|$.
366. Даны векторы $\vec{a}(2; -4)$, $\vec{b}(3; -3)$. Найти:
1) $|\vec{a} + \vec{b}|$; 2) $|\vec{b} - 3\vec{a}|$.
367. Найти косинус угла, образованного единичными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (4\vec{a} + 3\vec{b}) = 2$.
368. Найти множество точек $M(x; y)$ координатной плоскости таких, что для точек $D(-2; 4)$ и $E(3; 5)$ выполняется равенство:
1) $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EM} = 2$; 3) $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{EM} = 0$;
2) $(\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{EM}) \cdot \overrightarrow{DE} = -1$; 4) $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{EM} = 9$.
369. Записать уравнение высоты BD треугольника ABC , если $A(-3; -1)$, $B(2; 4)$, $C(3; -2)$.
370. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки E и F такие, что $BE : EC = 2 : 1$, $CF : FD = 5 : 1$. Найти косинус угла между прямыми AE и BF .
371. Доказать с помощью векторов, что средняя линия треугольника параллельна его основанию и равна половине основания.

Вариант 3

Четырехугольник. Параллелограмм

1. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 101) $AB = CD$, $AD = BC$. Доказать, что $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$.
2. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 102) $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Доказать, что $\angle 5 = \angle 6$ и $\angle 7 = \angle 8$.
3. Существует ли выпуклый четырехугольник, у которого два угла прямые, а два других острые?
4. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны (рис. 103). Верно ли определены его углы?
5. Найти углы параллелограмма, если:
 - 1) один из его углов равен 63° ;
 - 2) сумма двух его углов равна 134° ;
 - 3) один из его углов на 44° меньше другого;
 - 4) один из его углов в 11 раз меньше другого;
 - 5) два угла параллелограмма относятся как 5:13.
6. Найти углы параллелограмма $ABCD$ (рис. 104).

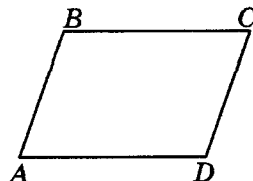


Рис. 101

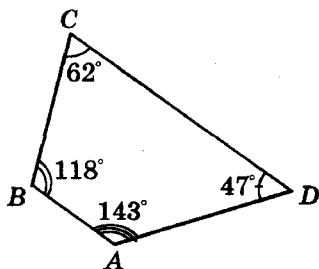


Рис. 103

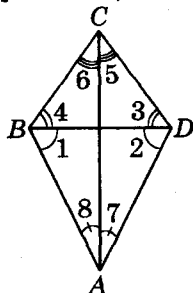


Рис. 102

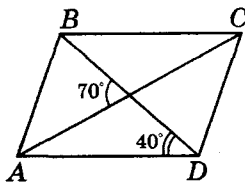


Рис. 104

7. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $KMNP$. Могут ли одновременно выполняться неравенства: $\angle A > \angle K$ и $\angle B > \angle M$?
8. Периметр параллелограмма равен 80 см. Найти стороны параллелограмма, если одна из них на 14 см меньше другой.
9. Стороны параллелограмма относятся как 4:3. Найти периметр параллелограмма, если разность этих сторон равна 4 см.
10. Какие ошибки допущены в изображении параллелограммов на рис. 105?

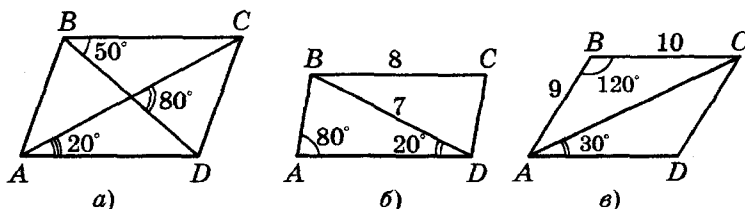


Рис. 105

11. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 106) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.
12. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 107) $\angle 1 = \angle 2$, $AO = OC$. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.
13. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны точки M и N так, что $\angle BMC = \angle AND$ (рис. 108). Доказать, что четырехугольник $AMCN$ — параллелограмм.
14. На диагоналях AC и BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 109) отмечены точки N , T , M , P так, что $AN = CT$ и $BP = DM$. Доказать, что четырехугольник $MNPT$ — параллелограмм.

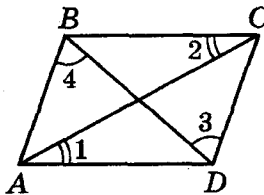


Рис. 106

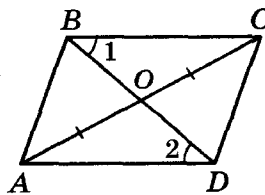


Рис. 107

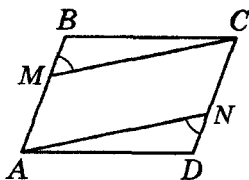


Рис. 108

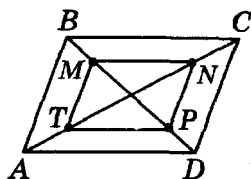


Рис. 109

15. В четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла B пересекает биссектрисы углов A и C под прямым углом. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.
16. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны соответственно точки M и N так, что $AM = CN$. Доказать, что прямая MN проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.
17. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взяли точки M и K такие, что $AM = CK$ (рис. 110). Доказать, что четырехугольник $BMDK$ — параллелограмм.
18. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E так, что $AB = BE$. Доказать, что AE — биссектриса угла A .
19. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC . Найти стороны параллелограмма, если его периметр равен 30 см.
20. В параллелограмме $ABCD$ $\angle B = 120^\circ$. Биссектриса угла ABD делит сторону AD на две равные части. Найти периметр параллелограмма, если $BD = 5$ см.
21. На рис. 111 точки M, N, P, T — середины сторон AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$. Какие из четырехугольников на этом рисунке являются параллелограммами?

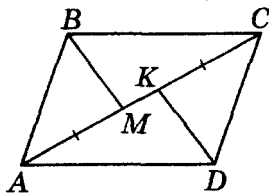


Рис. 110

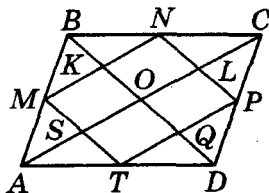


Рис. 111

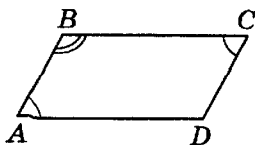


Рис. 112

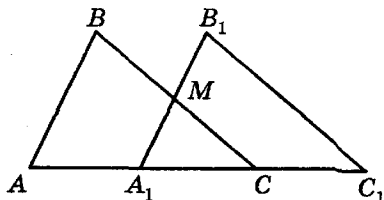


Рис. 113

22. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 112) $\angle A = \angle C$, $\angle C + \angle B = 180^\circ$. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.
23. В параллелограмме $ABCD$ высоты BM и BN делят стороны AD и CD на две равные части. Найти $\angle MBN$.
24. Один из углов параллелограмма на 50° больше другого. Найти угол между высотами параллелограмма, проведенными из вершины: 1) острого угла; 2) тупого угла.
25. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны (рис. 113), $BB_1 = 7$ см, $BM = MC$. Найти A_1C_1 .
26. На стороне AB равностороннего треугольника ABC выбрана точка M . Через точку M проведены отрезки MK и MN , параллельные сторонам BC и AC соответственно. Найти сторону треугольника ABC , если периметр параллелограмма $MKCN$ равен 60 см.
27. Построить параллелограмм:
 - 1) по двум диагоналям и углу между ними;
 - 2) по диагонали и углам, которые она образует со сторонами.
28. Даны отрезок AB и точка C , не лежащая на прямой AB . Построить параллелограмм так, чтобы отрезок AB был одной из его сторон, а точка C была вершиной. Сколько решений имеет задача?
29. На доске начертили параллелограмм $ABCD$. Потом рисунок вытерли, оставив только точки M, N, P, L , которые являются серединами сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Восстановить начальный рисунок.
30. Построить треугольник ABC по медиане AM и углам MAV и MAC .

Прямоугольник

31. Известно, что у параллелограмма три равных между собой угла. Что можно сказать о виде параллелограмма?

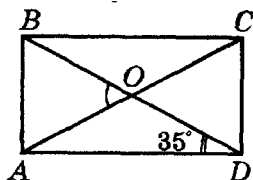


Рис. 114

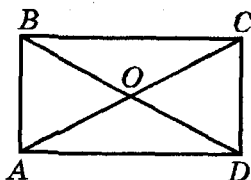


Рис. 115

32. В прямоугольнике $ABCD$ (рис. 114) O — точка пересечения диагоналей, $\angle ODA = 35^\circ$. Найти $\angle AOB$.
33. В прямоугольнике угол между диагоналями равен 82° . Найти углы, которые образуют диагонали со сторонами прямоугольника.
34. Найти острый угол между диагоналями прямоугольника, если разность между углами, которые образует диагональ с меньшей и большей сторонами соответственно, равна 20° .
35. O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 115), $AO = OB$. Доказать, что $ABCD$ — прямоугольник.
36. Точки K и M принадлежат соответственно диагоналям BD и AC прямоугольника $ABCD$, причем $BK = \frac{1}{5} BD$ и $CM = \frac{1}{5} AC$. Доказать, что треугольники ABK и DCM равны.
37. Доказать, что если диагонали параллелограмма $ABCD$ делят его на четыре равнобедренных треугольника, то $ABCD$ — прямоугольник.
38. В прямоугольнике $ABCD$ $AD = 2AB$. Доказать, что точка пересечения биссектрис углов B и C принадлежит стороне AD .
39. Угол между диагоналями AC и BD прямоугольника $ABCD$, лежащий против меньшей стороны прямоугольника, равен 60° . Найти расстояние от точки пересечения диагоналей до большей стороны прямоугольника, если $AC = 8$ см.
40. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 36 см. Найти сумму длин диагоналей четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон прямоугольника $ABCD$.
41. Прямая, проведенная через вершину C прямоугольника $ABCD$, пересекает сторону AD в точке K и продол-

жение стороны BA в точке M . Известно, что $AK = \frac{1}{2} AD$ и $BM = BC$. Найти $\angle BKC$.

42. В треугольнике ABC $\angle A = 75^\circ$, $\angle C = 15^\circ$. К стороне AC проведена медиана $BK = 2$ см. Найти сторону AC .
43. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B = 90^\circ$) проведена высота BD , $AC = 16$ см, $\angle DBC = 60^\circ$. Найти расстояние от точки D до середины катета AB .
44. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медиана BM равна половине стороны AC . Из точки M к сторонам AB и BC проведены перпендикуляры MK и ME соответственно. Длина отрезка KE равна 11 см. Найти длину AC .
45. В прямоугольнике $ABCD$ $\angle BAC = 30^\circ$. Из вершины D к диагонали AC проведен перпендикуляр DK . Найти отношение $AK : AC$.

Ромб

46. В параллелограмме $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей AC и BD , $\angle BAO + \angle ABO = 90^\circ$. Доказать, что $ABCD$ — ромб.
47. На рис. 116 $ABCD$ — ромб. Найти угол α .

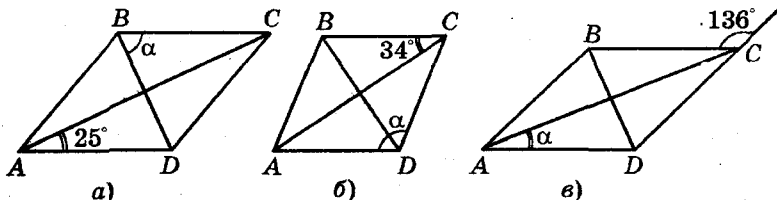


Рис. 116

48. Найти углы ромба, если его сторона образует с диагоналями углы, разность которых равна 18° .
49. Найти углы ромба, если его сторона образует с диагоналями углы, относящиеся как 7:8.
50. CM и CK — высоты ромба $ABCD$ (рис. 117). Доказать, что $\angle MCA = \angle KCA$.
51. И вершины B тупого угла ромба $ABCD$ проведены высоты BK и BM . Известно, что $KM = BK$. Найти углы ромба.

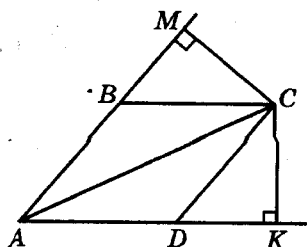


Рис. 117

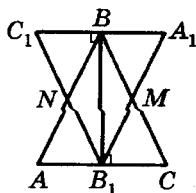


Рис. 118

52. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ выбраны соответственно точки P и N так, что $\angle PAC = \angle NAC$. Доказать, что $BP = DN$.
53. Из вершины B ромба $ABCD$ проведены высоты BK и BM . Доказать, что $KM \perp BD$.
54. Из вершины B тупого угла ромба $ABCD$ проведены высоты BK и BM . $\angle BMK = 28^\circ$. Найти углы ромба.
55. BD — диагональ ромба $ABCD$. Биссектриса BK угла ABD делит сторону AD пополам. Найти:
- 1) углы ромба;
 - 2) меньшую диагональ ромба, если его сторона равна 10 см.
56. Два равных равнобедренных треугольника расположены так, как показано на рис. 118. Определить вид четырехугольника BMB_1N .
57. Через O — точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ (рис. 119) проведены отрезки MN и PQ так, что $MN \perp PQ$. Доказать, что $MPNQ$ — ромб.
58. F и E — середины сторон BC и AD прямоугольника $ABCD$ соответственно (рис. 120). Доказать, что $MFKE$ — ромб.
59. Построить ромб:
- 1) по стороне и высоте, проведенной из вершины тупого угла;
 - 2) по углу и диагонали, противоположной данному углу.

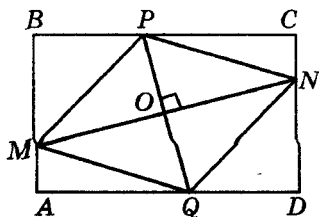


Рис. 119

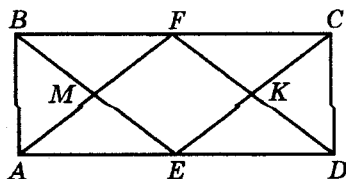


Рис. 120

60. Построить ромб, если заданы три точки, являющиеся серединами трех его сторон.

Квадрат

61. Доказать, что прямоугольник, диагонали которого делят его углы пополам, является квадратом.
 62. Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон квадрата, равен 5 см. Найти периметр квадрата.
 63. O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ (рис. 121). M, N, P, Q — середины отрезков AO, BO, CO и DO соответственно. Доказать, что $MNPQ$ — квадрат.

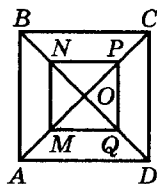


Рис. 121

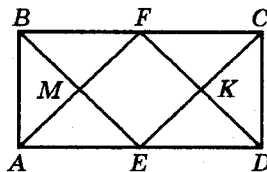


Рис. 122

64. Диагональ квадрата равна 6 см. Найти периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата.
 65. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ выбраны соответственно точки M, N, P, Q так, что $BM = BN = DP = DQ$. Найти периметр четырехугольника $MNPQ$, если диагональ квадрата равна 10 см.
 66. В прямоугольнике $ABCD$ (рис. 122) $2AB = BC$, F и E — середины сторон BC и AD соответственно. Доказать, что $MFKE$ — квадрат.
 67. В квадрате $ABCD$ на продолжении стороны AD за точку A выбрана точка K так, что $\angle BCK = 2\angle ACK$. Периметр квадрата равен 44 см. Найти длину отрезка KC .
 68. В квадрат вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата находится одна вершина прямоугольника, а стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Найти стороны прямоугольника, если одна из них на 6 см больше другой, а диагональ квадрата равна 30 см.
 69. В данную окружность вписать квадрат.
 70. Построить квадрат по трем точкам, являющимся серединами трех его сторон.

Теорема Фалеса. **Теорема о пропорциональных отрезках**

71. Разделить данный отрезок на шесть равных частей.
72. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 123) $\angle B = 90^\circ$, $AC = 24$ см. $MN \parallel AC$ и $DK \parallel AC$, $BM = MA$, $MD = DA$, BE — медиана. Найти LP .

73. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD .
 Доказать, что $\frac{BA}{BC} = \frac{AD}{DC}$.

74. Стороны угла ABC пересекают параллельные прямые l, p, k (рис. 124). Найти отношение отрезков BM , MN , NP , если $BM_1 = 6$, $M_1N_1 = 3$, $N_1P_1 = 7$.

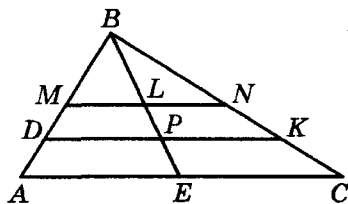


Рис. 123

75. Параллельные прямые m и n пересекают стороны угла AMC (рис. 125). Найти длину отрезка MN , если $MK = 2$, $KL = 4$, $MP = 3$.

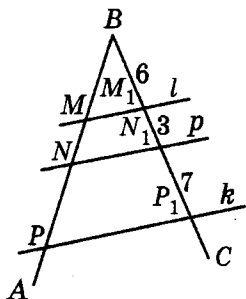


Рис. 124

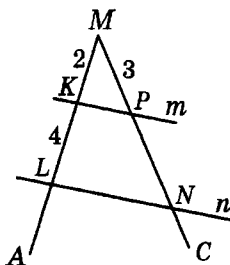


Рис. 125

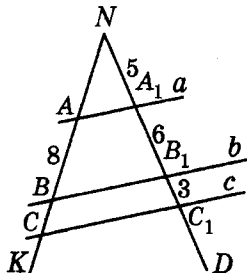


Рис. 126

76. Параллельные прямые a, b, c пересекают стороны угла KND (рис. 126). Найти длины отрезков NA и BC , если $NA_1 = 5$, $AB = 8$, $A_1B_1 = 6$, $B_1C_1 = 3$.
77. Параллельные прямые k и l пересекают стороны угла MDP (рис. 127). Найти длину отрезка AA_1 , если $DA = 8$, $BB_1 = 9$, $AA_1 = 2DB$.

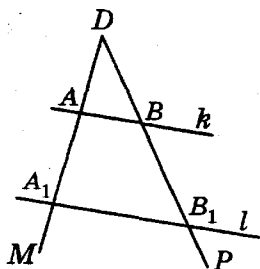


Рис. 127

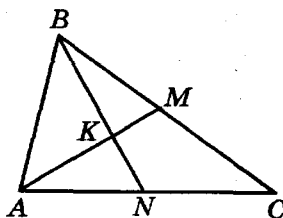


Рис. 128

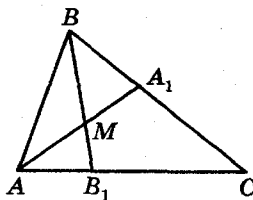


Рис. 129

78. В треугольнике ABC (рис. 128) провели отрезки AM и BN так, что $AK = 2KM$ и $AN : NC = 4 : 5$. Найти отношение $BM : MC$.
79. На рис. 129 $AM : MA_1 = 1 : 1$, $AB_1 : B_1C = 1 : 2$. Найти $BM : MB_1$.
80. Даны отрезки a, b, c, d и e . Построить отрезки:
 1) $\frac{(a+b)c}{d}$; 2) $\frac{(a+b)^2}{c}$; 3) $\frac{(a+b)cd}{ae}$; 4) $\frac{c(a-b)^2}{d^2}$.

Средняя линия треугольника

81. Найти стороны треугольника, вершины которого — середины сторон треугольника со сторонами 8 см, 14 см, 18 см.
82. Точки M, N и K — середины средних линий треугольника ABC . Найти периметр треугольника MNK , если периметр треугольника ABC равен 48 см.
83. Периметр треугольника равен 68 см, а длины его средних линий относятся как 4:6:7. Найти стороны данного треугольника.
84. A_1B_1, A_1C_1 и B_1C_1 — средние линии треугольника ABC . Известно, что $A_1B_1 \perp A_1C_1$ и $2A_1B_1 = B_1C_1$. Найти углы треугольника ABC .

85. В ромбе $ABCD$ (рис. 130) F , P и M — середины сторон BC , CD и DA соответственно. Найти сумму длин диагоналей ромба, если $AB = 5$ см, а периметр треугольника FPM равен 12 см.
86. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. M , F , K и P — середины сторон AB , BC , CD и DA соответственно. Доказать, что $MK = FP$.
87. Расстояния от точек A , B и C до прямой l (рис. 131) равны соответственно a , b и c ($a < b < c$). Известно, что середины отрезков AB и BC равноудалены от прямой l . Доказать, что $2b = a + c$.

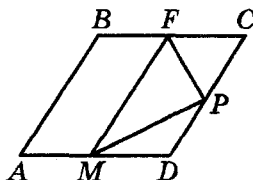


Рис. 130

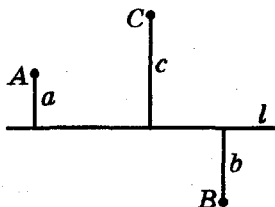


Рис. 131

88. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B = 90^\circ$): $\angle BAC = 30^\circ$, $AB = 44$ см. Найти расстояние от середины катета AB до гипотенузы AC .
89. Определить вид четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон данного:
- 1) квадрата;
 - 2) четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями.
90. В четырехугольнике $ABCD$ угол между диагоналями AC и BD равен 60° , $AC = BD = 10$ см. Найти меньшую диагональ четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного.
91. В четырехугольнике последовательно соединены середины сторон. С образованным четырехугольником сделано то же. Оказалось, что полученный таким образом четырехугольник — ромб. Доказать, что диагонали исходного четырехугольника перпендикулярны.
92. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 25 см. Через каждую из его вершин параллельно диагоналям проведены прямые. Найти сумму длин диагоналей полученного таким образом четырехугольника.

93. В равностороннем треугольнике ABC проведена медиана BD , равная 8 см. Найти расстояние от точки D до стороны BC .
94. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) M — точка пересечения медиан, $BM = 6$ см. Найти расстояние от середины боковой стороны до основания треугольника.
95. Построить параллелограмм по точке пересечения его диагоналей и серединам двух его смежных сторон.
96. Построить ромб по серединам двух его смежных сторон и диагонали, пересекающей отрезок, соединяющий эти точки.

Трапеция

97. Два угла трапеции равны 36° и 62° . Найти другие ее углы.
98. Существует ли трапеция, у которой два противоположных угла прямые? Если ответ положителен, сделать рисунок.
99. Существует ли трапеция, у которой два угла прямые?
100. Могут ли углы трапеции относиться как $1:2:4:8$?
101. В равнобедренной трапеции боковая сторона в два раза больше ее высоты. Найти углы трапеции.
102. В равнобедренной трапеции тупой угол в 3 раза больше острого. Найти углы трапеции.
103. Диагональ равнобедренной трапеции образует с боковой стороной прямой угол. Известно, что боковая сторона вдвое меньше большего основания. Найти углы трапеции.
104. Определить вид трапеции, если сумма ее противоположных углов равна 180° .
105. В трапеции $ABCD$ M — точка пересечения биссектрис углов A и B (рис. 132). Найти сумму углов MBC и MAD .
106. Угол между диагоналями равнобедренной трапеции равен 80° , а боковая сторона равна большому основанию. Найти углы трапеции.
107. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) AC — биссектриса угла BAD , $AC = AD$, $\angle ACD = 70^\circ$. Найти углы трапеции.
108. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $\angle BCA = \angle BDA$. Доказать, что $AB = CD$.

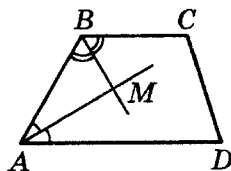


Рис. 132

109. В равнобедренной трапеции длины отрезков, на которые высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание, относятся как 1:2. Найти отношение длин оснований.
110. Основания равнобедренной трапеции равны 2 см и 10 см. Найти длины отрезков, на которые высота трапеции, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание.
111. В равнобедренной трапеции один из углов равен 120° . Диагональ трапеции образует с основанием угол 30° . Найти основания трапеции, если длина боковой стороны равна 8 см.
112. В равнобедренной трапеции длина биссектрисы тупого угла равна длине боковой стороны и равна 13 см. Найти разность длин оснований трапеции.
113. В равнобедренной трапеции длина боковой стороны равна длине большего основания. Доказать, что диагональ трапеции является биссектрисой ее большего угла.
114. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка пересечения биссектрис тупых углов принадлежит большему основанию AD . Известно, что $AB = 5$ см, $CD = 7$ см. Найти AD .
115. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, $BC = 6$ см, $AD = 20$ см. Найти длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.
116. В прямоугольной трапеции диагональ является биссектрисой тупого угла, а ее длина вдвое больше меньшего основания. Найти углы трапеции.
117. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $\angle A = 40^\circ$, $\angle D = 50^\circ$. Найти длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции, если $AD = 16$ см, $BC = 10$ см.
118. Построить трапецию по двум диагоналями и углам, образованным диагоналями с основаниями трапеции.

Средняя линия трапеции

119. Найти среднюю линию трапеции, если ее основания равны: 1) 12 см и 14 см; 2) $5b$ и $16b$.
120. Найти основания трапеции, если их длины относятся как 5:7, а средняя линия равна: 1) 36 см; 2) n .

121. Может ли средняя линия трапеции быть:
- 1) в 2 раза больше меньшего основания;
 - 2) в 2 раза меньше большего основания?
122. Боковая сторона трапеции разделена на 6 равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям. Первый и последний из отрезков этих прямых, ограниченных боковыми сторонами трапеции, соответственно равны 4 см и 8 см. Найти основания трапеции.
123. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $AC = 18$ см, $\angle C = 60^\circ$. Медиана BM разделена на 3 равных части. Через точки деления параллельно катету BC проведены прямые. Найти отрезки этих прямых, ограниченных медианой BM и гипотенузой.
124. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) MN — средняя линия. Известно, что $BC : MN = 9 : 11$. Найти основания трапеции, если известно, что их разность равна 12 см.
125. Меньшее основание трапеции равно 6 см, а один из отрезков, на которые диагональ делит среднюю линию, равен 5 см. Найти большее основание трапеции.
126. Длины отрезков, на которые диагональ трапеции делит среднюю линию, относятся как 3:7. Найти основания трапеции, если их разность равна 20 см.
127. Диагонали трапеции делят среднюю линию на 3 отрезка, один из которых равен сумме двух других. Найти отношение оснований трапеции.
128. Большее основание трапеции относится к средней линии как 5:4. Средняя линия больше меньшего из оснований на 5 см. Найти основания трапеции.
129. Один из углов равнобедренной трапеции равен 150° . Высота трапеции равна 10 см. Найти боковую сторону трапеции.
130. Доказать, что если в равнобедренной трапеции биссектрисы углов пересекаются в одной точке, то боковая сторона трапеции равна ее средней линии.
131. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна длине отрезка, соединяющего середины оснований. Доказать, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны.

132. Средняя линия трапеции равна 11 см, а высоты, проведенные из вершин ее тупых углов, делят большее основание на отрезки, длины которых относятся как 2:4:1. Найти основания трапеции.
133. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагональ AC равна 14 см, перпендикулярна боковой стороне CD и делит угол A в отношении 2:1, считая от большего основания. Найти среднюю линию трапеции.
134. В прямоугольной трапеции диагональ, проведенная из вершины тупого угла, равна боковой стороне. Найти отношение большего основания трапеции к средней линии.

Теорема Пифагора

135. Построить угол, косинус которого равен: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) 0,6.
136. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны:
1) 10 см и 24 см; 2) 3 см и 5 см.
137. Найти второй катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза и первый катет соответственно равны: 1) 26 см и 10 см; 2) 8 см и 2 см.
138. Диагональ прямоугольника равна 34 см. Найти стороны прямоугольника, если их длины относятся как 15:8.
139. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 12$ см, высота $BD = 8$ см. Найти основание AC .
140. Сторона ромба равна 4 см, а один из углов равен 120° . Найти диагонали ромба.
141. Две стороны прямоугольного треугольника равны 6 см и 12 см. Найти третью сторону. Рассмотреть все возможные варианты.
142. Существует ли ромб, один из углов которого равен 120° , а стороны и диагонали выражаются целыми числами?

143. Найти неизвестный отрезок x на рисунке 133.

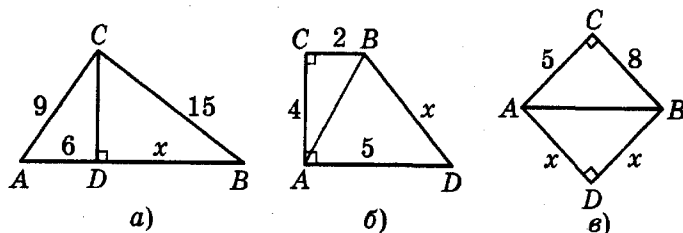


Рис. 133

144. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 12:5, а гипотенуза равна 39 см. Найти катеты треугольника.
145. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 17 см, а гипотенуза — 13 см. Найти катеты.
146. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B = 90^\circ$) $AC = 52$ см, $AB = 20$ см. Найти медиану AM .
147. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 10 см. Найти стороны треугольника, если разность катетов равна 4 см.
148. В остроугольном треугольнике ABC $AB = 17$ см, $BC = 25$ см, а высота BD делит сторону AC на отрезки AD и DC такие, что $AD : DC = 2 : 5$. Найти AC .
149. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота $AD = 8$ см, $CD = 6$ см. Найти медиану BK .
150. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) боковая сторона больше высоты, проведенной к основанию, на 2 см, а основание треугольника равно 16 см. Найти боковую сторону треугольника.
151. Периметр равнобедренного треугольника равен 72 см, а высота, проведенная к основанию, — 24 см. Найти стороны треугольника.
152. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найти катеты треугольника.
153. В прямоугольном треугольнике медианы, проведенные к катетам, равны $2\sqrt{73}$ см и $4\sqrt{13}$ см. Найти стороны треугольника.

154. В равнобедренном прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, на 2 см меньше катета. Найти гипотенузу.
155. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на отрезки длиной 25 см и 20 см. Найти стороны треугольника.
156. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки длиной 6 см и 10 см. Найти стороны треугольника.
157. Найти медиану равнобедренного треугольника, проведенную к боковой стороне, если боковая сторона и основание треугольника равны соответственно 30 см и 48 см.
158. В равнобедренной трапеции диагональ равна 15 см, а средняя линия — 8 см. Найти высоту трапеции.
159. В равнобедренной трапеции боковая сторона, высота и диагональ равны соответственно 10 см, 8 см и 17 см. Найти основания трапеции.
160. В прямоугольном треугольнике катеты равны 20 см и 15 см. Найти длину высоты треугольника, проведенной к гипотенузе.
161. В равнобедренную трапецию вписана окружность, радиус которой равен 8 см. Разность длин оснований трапеции равна 24 см. Найти стороны трапеции.
162. В окружности с центром в точке O проведена хорда AB , перпендикулярная к радиусу OM и пересекающая его в точке K , $OK : KM = 8 : 9$, $AB = 90$ см. Найти радиус окружности.
163. Радиусы двух окружностей равны 10 см и 2 см, а длина их общей внешней касательной — 15 см. Найти расстояние между центрами окружностей.

Перпендикуляр и наклонная

164. Из некоторой точки K к прямой l проведены две наклонные, образующие с l равные углы. Доказать, что проекции этих наклонных на прямую l равны.
165. Из точки к прямой проведена наклонная длиной 18 см, образующая с прямой угол 60° . Найти проекцию наклонной на прямую.
166. Из точки вне прямой проведены две наклонные. Первая из них равна 22 см и образует с прямой угол 45° . Найти длину второй наклонной, если ее проекция равна $\sqrt{82}$ см.

167. Из точки, взятой на расстоянии 8 см от прямой, проведены к ней две наклонные длиной 17 см и 10 см. Найти расстояние между основаниями этих наклонных. Сколько решений имеет задача?
168. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой l на расстоянии 3 см и 5 см соответственно. Найти AB , если расстояние между проекциями этих точек на прямую l равно 6 см.
169. Из точки вне прямой проведены к ней две наклонные, проекции которых равны 5 см и 9 см. Найти длины наклонных, если их сумма равна 28 см.
170. Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых равны 15 см и 20 см, а длины их проекций относятся как 9:16. Найти расстояние от точки до прямой.
171. Стороны треугольника равны 26 см, 28 см и 30 см. Найти проекции наименьшей и средней по величине сторон на большую сторону.
172. Длины проекций двух наклонных, проведенных из точки к данной прямой, равны 5 см и 2 см. Найти разность квадратов длин этих наклонных.
173. Разность квадратов проекций двух наклонных, проведенных из точки к прямой, равна 7 см. Найти длины наклонных, если известно, что они выражаются целыми числами.

Неравенство треугольника

174. Какие из приведенных троек чисел могут быть длинами сторон одного треугольника:
 1) 11, 17, 27; 2) 14, 34, 48; 3) 42, 15, 59?
175. Могут ли стороны треугольника относиться как:
 1) 6:3:4; 2) 4:11:7; 3) 5:15:9?
176. Периметр треугольника равен 30 см. Может ли одна из его сторон быть равной:
 1) 15 см; 2) 12 см; 3) 18 см?
177. Существует ли треугольник, одна сторона которого в 2 раза больше другой и на 7 см больше третьей, а периметр треугольника равен 23 см?
178. Может ли разность сторон параллелограмма быть больше одной из диагоналей?

179. Доказать, что сумма двух сторон треугольника больше его полупериметра.

180. Может ли сумма сторон параллелограмма быть больше суммы его диагоналей?

181. Доказать, что

$$AB + CD > AD - BC \text{ (рис. 134).}$$

182. Доказать, что для медиан треуго-

гольника m_1, m_2, m_3 выполняется неравенство $\frac{2}{3}p <$

$< m_1 + m_2 + m_3$, где p — полупериметр треугольника.

183. Периметр равнобедренного треугольника равен 20 см, а одна из сторон — 5 см. Найти две другие стороны треугольника.

184. Периметр равнобедренного треугольника равен 24 см, а одна из сторон — 10 см. Найти две другие стороны треугольника.

185. Периметр равнобедренного треугольника равен 30 см, а разность двух его сторон — 9 см. Найти стороны треугольника.

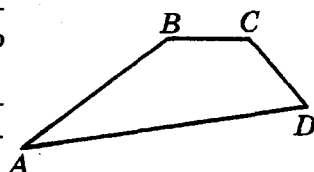


Рис. 134

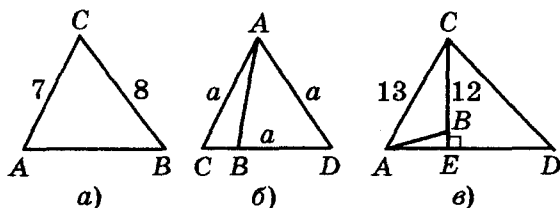


Рис. 135

186. В каких пределах изменяется длина отрезка AB (рис. 135)?

Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике

187. Построить угол, если:

1) тангенс его равен: а) $\frac{3}{8}$; б) 5; в) 0,7;

2) синус его равен: а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{3}{4}$; в) 0,2;

3) косинус его равен: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{5}$; в) 0,5.

- 188.** Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 12 см и 37 см. Найти:
- 1) синус острого угла, лежащего против большего катета;
 - 2) косинус острого угла, лежащего против большего катета;
 - 3) тангенс острого угла, лежащего против меньшего катета.
- 189.** В прямоугольном треугольнике катеты равны 7 см и 24 см. Найти:
- 1) тангенс острого угла, лежащего против большего катета;
 - 2) синус острого угла, лежащего против большего катета;
 - 3) косинус острого угла, лежащего против меньшего катета.
- 190.** Найти неизвестные стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), если:
- 1) $AC = 6$ см, $\sin \angle B = \frac{1}{4}$;
 - 4) $BC = 3$ см, $\cos \angle A = \frac{3}{5}$;
 - 2) $BC = 4$ см, $\sin \angle B = \frac{1}{3}$;
 - 5) $AC = 5$ см, $\cos \angle A = \frac{3}{7}$;
 - 3) $AB = 2$ см, $\operatorname{tg} \angle A = 3$;
 - 6) $AB = 10$ см, $\operatorname{tg} \angle B = 2$.
- 191.** По двум данным элементам прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) найти его другие стороны и углы:
- 1) $AB = 8$ см, $\angle A = 44^\circ$;
 - 4) $AB = 14$ см, $AC = 8$ см;
 - 2) $AC = 12$ см, $\angle A = 57^\circ$;
 - 5) $AC = 14$ см, $BC = 8$ см.
 - 3) $BC = 11$ см, $\angle A = 68^\circ$;
- 192.** В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 25 см, а высота — 7 см. Найти все тригонометрические функции острого угла трапеции.
- 193.** В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 10$ см, $\angle B = 64^\circ$. Найти сторону AC и высоту BD .
- 194.** В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) $AC = 4$ см, $\angle C = 52^\circ$. Найти стороны AB , BC и высоту CK .
- 195.** Из точки, лежащей на расстоянии 16 см от прямой, проведены к ней две наклонные, образующие с прямой углы 30° и 60° . Найти длины наклонных и их проекции на прямую.

196. Из точки, расположенной на расстоянии 20 см от прямой, проведены к ней две наклонные, образующие с прямой углы 60° и 45° . Найти расстояние между основаниями наклонных. Сколько решений имеет задача?

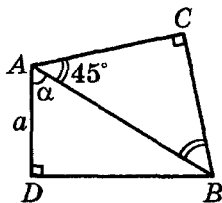
197. Найти неизвестные стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), если:

1) $AB = c$, $\angle B = \alpha$;

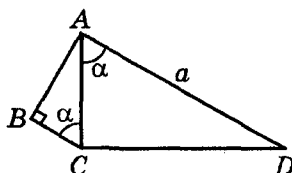
3) $BC = a$, $\angle A = \varphi$.

2) $AC = b$, $\angle A = \beta$;

198. По рис. 136 определить длины отрезков AB и BC .



а)



б)

Рис. 136

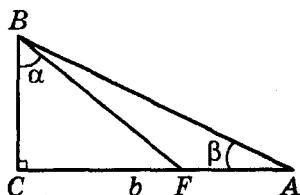


Рис. 137

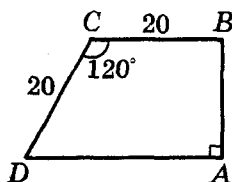


Рис. 138

199. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 137) $AC = b$, $\angle BAC = \beta$, $\angle FBC = \alpha$. Найти длину отрезка AF .

200. Сторона AD прямоугольника $ABCD$ равна m , а угол между диагоналями, противоположный этой стороне, равен α . Найти длины стороны AB и диагонали прямоугольника.

201. Большая диагональ ромба равна b , а тупой угол ромба — β . Найти сторону ромба и меньшую диагональ.

202. В равнобедренной трапеции основания равны 4 см и 6 см, а боковая сторона образует с большим основанием угол 30° . Найти высоту и боковую сторону трапеции.

203. В прямоугольной трапеции $ABCD$ (рис. 138) $BC = CD = 20$ см, $\angle BCD = 120^\circ$. Найти стороны AB , AD и диагонали BD и AC .

204. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно m , а боковая сторона b образует с большим основанием угол α . Найти периметр трапеции.

205. В трапеции $ABCD$ (рис. 139) $AD = 14$ см, $DC = 8$ см, $\angle A = 30^\circ$. Найти основание BC трапеции.

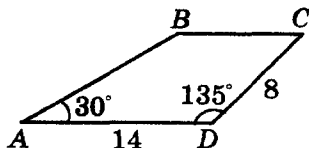


Рис. 139

206. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $AB = CD = 7$ см, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см. Найти синус и косинус угла CAD .

Изменение синуса, косинуса и тангенса при возрастании угла от 0° до 90°

207. Сравнить синусы, косинусы, тангенсы углов A и B прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), если катет AC меньше катета BC .
208. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 см и 9 см. Найти:
- 1) синус большего острого угла;
 - 2) косинус большего острого угла;
 - 3) тангенс меньшего острого угла.
209. Как изменятся синус, косинус и тангенс угла, если угол уменьшится от 45° к 30° ?
210. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $2 \cos \angle A = 5 \cos \angle B$. Сравнить катеты BC и AC .
211. Для каких острых углов синус равен косинусу?

Декартовы координаты на плоскости

212. В каких координатных четвертях находятся точки $A(-2; 11)$, $B(-7; -1)$, $C(5; 8)$, $D(3; -10)$?
213. В какой координатной четверти находится точка A , если ее абсцисса и ордината отрицательны?
214. Что можно сказать о координатах точки K , если:
- 1) точка K лежит на оси ординат;
 - 2) точка K принадлежит биссектрисе первого координатного угла?
215. Каковы особенности взаимного расположения двух различных точек, если у каждой из них абсцисса равна ординате?

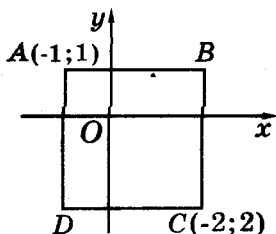


Рис. 140

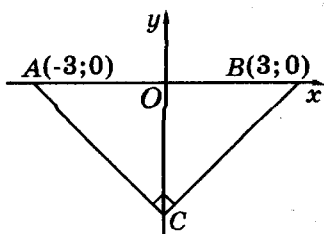


Рис. 141

216. Указать координаты вершин прямоугольника $ABCD$ (рис. 140).
 217. Указать координаты точки C (рис. 141).
 218. Найти расстояния от точек $A(-6; 9)$, $B(3; -5)$ до координатных осей.

**Координаты середины отрезка.
 Расстояние между двумя точками**

219. Найти координаты середины отрезка AB , если:
 1) $A(2; -7)$, $B(6; -3)$; 3) $A(-9; -5)$, $B(-1; 4)$.
 2) $A(5; 11)$, $B(4; 3)$;
 220. M — середина отрезка KN . Найти координаты точки K , если $N(-4; 5)$, $M(1; 2)$.
 221. Найти координаты точки, которая делит отрезок FN в отношении $1:7$, считая от точки N , если $F(1; -3)$, $N(-7; 13)$.
 222. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-3; 7)$, $B(2; -4)$, $C(5; 1)$, $D(0; 12)$ является параллелограммом.
 223. Точки $B_1(-2; 3)$ и $A_1(5; -1)$ — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. Вершина B имеет координаты $(1; 7)$. Найти координаты вершин A и C .
 224. Точки $A_1(-2; 1)$, $B_1(4; -3)$, $C_1(-1; 5)$ — середины сторон треугольника. Найти координаты его вершин.
 225. Найти расстояние между точками A и B , если:
 1) $A(-1; 2)$, $B(-7; 10)$; 3) $A(4; -1)$, $B(5; -2)$.
 2) $A(2; -3)$, $B(2; 6)$;
 226. В треугольнике ABC $A(1; -8)$, $B(3; -4)$, $C(2; -5)$. Найти длину средней линии MN треугольника ABC , где M и N — середины сторон AC и AB соответственно.

227. Найти длину отрезка, концы которого лежат на осях координат, а его серединой является точка $K(-5; 12)$.
228. Доказать, что точки $A(1; 3)$, $B(-2; -3)$, $C(3; 7)$ лежат на одной прямой. Какая из точек лежит между двумя другими?
229. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-3; 1)$, $B(2; -5)$, $C(3; 6)$. Доказать, что треугольник ABC — равнобедренный.
230. Расстояние между точками $A(x; -7)$ и $B(4; x)$ равно $\sqrt{101}$. Найти x .
231. На прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов, найти точку, равноудаленную от точек $A(1; 1)$ и $B(3; 5)$.
232. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(2; 1)$, $B(5; -3)$, $C(9; 0)$, $D(6; 4)$ является квадратом.
233. Найти координаты вершины B равностороннего треугольника ABC , если известны координаты вершин $A(0; -4)$ и $C(0; 2)$.

Уравнение окружности

234. Записать уравнение окружности, зная координаты ее центра M и радиус R :
- 1) $M(1; -4)$, $R = 2$; 3) $M(1; -1)$, $R = \sqrt{11}$.
 2) $M(0; -5)$, $R = 3$;
235. Записать уравнение окружности, проходящей через точку $A(1; -1)$, центр которой лежит на оси абсцисс, а радиус равен $\sqrt{26}$.
236. Записать уравнение окружности с центром в точке $M(1; -4)$, проходящей через точку $A(0; 3)$.
237. Записать уравнение окружности, радиусом которой является отрезок MN , если $M(-3; 1)$, $N(1; 6)$. Сколько решений имеет задача?
238. Записать уравнение окружности, касающейся обеих координатных осей с центром в точке $M(-3; 3)$.
239. Определить по уравнению окружности координаты ее центра и радиус:
- 1) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 49$; 4) $x^2 + (y - 9)^2 = 2$;
 2) $(x + 7)^2 + (y + 1)^2 = 36$; 5) $x^2 + y^2 + 6x - 14y - 5 = 0$;
 3) $(x - 6)^2 + (y + 15)^2 = 81$; 6) $x^2 + y^2 + x = 0$.

240. Найти координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 16 = 0$. Определить положение точек $A(5; -1)$, $B(2; 4)$ и $C(4; -1)$ относительно окружности.

241. Определить взаимное расположение двух окружностей:

- 1) $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 2$ и $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 4$;
- 2) $(x - 7)^2 + (y + 5)^2 = 100$ и $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$;
- 3) $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 36$ и $(x - 8)^2 + (y - 1)^2 = 9$;
- 4) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ и $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Уравнение прямой

242. Найти координаты точек пересечения прямой $5x - 2y + 12 = 0$ с осями координат. Принадлежат ли этой прямой точки $A(-2; 7)$ и $B(1; -2)$?

243. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2; 1)$ и $B(3; -4)$.

244. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $N(2; -9)$ и параллельной:

- 1) оси абсцисс;
- 2) оси ординат.

245. Точки $A(-6; 21)$, $B(1; -7)$, $C(0; -4)$ — вершины треугольника ABC . Записать уравнение прямой, содержащей медиану BM треугольника.

246. При каком значении t точки $A(2t; -3)$, $B(1; -2)$, $C(3; 4)$ лежат на одной прямой?

247. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки: 1) $A(5; -4)$ и $B(1; -6)$; 2) $A(1; 1)$ и $B(-3; -3)$; 3) $A(6; 2)$ и $B(-7; 2)$.

248. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $K(2; -3)$, угловой коэффициент которой равен: 1) 3; 2) -4 ; 3) 0.

249. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; -2)$, образующей с положительным направлением оси абсцисс угол: 1) 30° ; 2) 150° .

250. Среди прямых, заданных своими уравнениями, указать пары параллельных:

- 1) $2x + 3y - 5 = 0$;
- 4) $10x + 15y - 11 = 0$;
- 2) $4x - 3y + 1 = 0$;
- 5) $8x - 6y + 7 = 0$.
- 3) $8x + 12y - 9 = 0$;

251. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(4; -2)$ и параллельной прямой $y = 3x + 1$.
252. Записать уравнение прямой l (рис. 142).

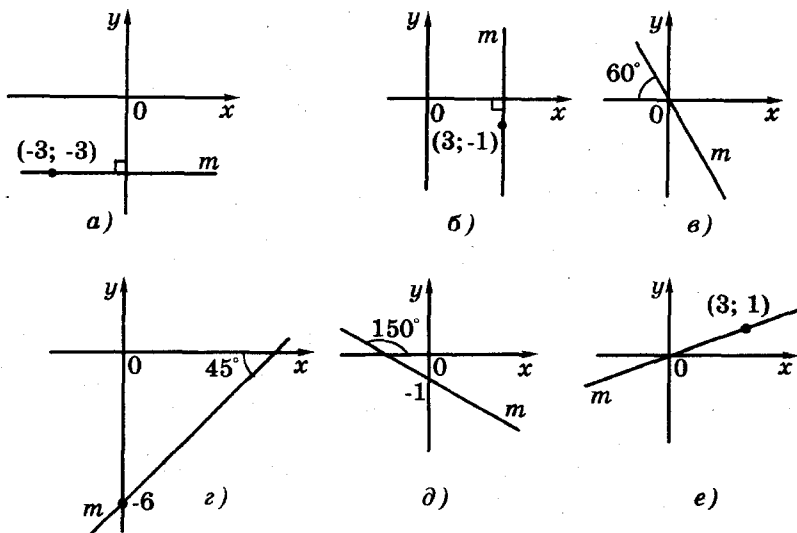


Рис. 142

253. Найти координаты точки пересечения прямых $4x - 5y - 2 = 0$ и $2x + 7y - 3 = 0$.
254. Найти координаты точек пересечения прямой $y = x - 2$ и окружности $x^2 + y^2 = 20$.

Симметрия относительно точки (центральная симметрия)

255. Даны две точки A и B . Построить точку C , относительно которой точка B симметрична точке A .
256. Даны треугольник ABC и точка M , лежащая вне треугольника. Построить треугольник, симметричный данному относительно точки M .
257. Дан треугольник ABC . Построить треугольник, симметричный данному относительно точки пересечения его медиан.
258. Даны окружность с центром в точке O и точка M , лежащая вне окружности. Построить окружность, симметричную данной относительно точки M .

- 259.** Имеет ли центр симметрии: 1) отрезок с выколотыми концами; 2) отрезок с выколотой внутренней точкой; 3) прямая с выколотой точкой?
- 260.** Может ли окружность при симметрии относительно точки отображаться сама на себя?
- 261.** На рис. 143 прямые AB и CD параллельны, $AB = CD$. Доказать, что отрезки AB и CD симметричны относительно точки O .
- 262.** Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга в точке M (рис. 144). Доказать, что $AB = CD$.

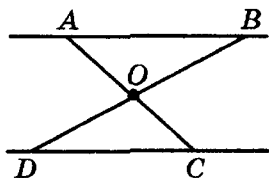


Рис. 143

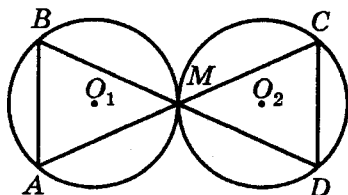


Рис. 144

- 263.** Две равных окружности с центрами в точках O_1 и O_2 касаются друг друга в точке M (рис. 144). Доказать, что $AB \parallel CD$.
- 264.** Найти точку, симметричную точке $K (-3, -4)$ относительно начала координат.
- 265.** Среди точек $A (5; -2)$, $B (1; -3)$, $C (-5; 2)$, $D (4; 7)$, $E (-4; -7)$, $F (-1; 3)$ указать пары точек, симметричных относительно начала координат.
- 266.** Симметричны ли точки $A (7; -3)$ и $B (3; 11)$ относительно точки $C (2; -7)$?
- 267.** Найти координаты центра симметрии точек $A (-6; 4)$ и $B (8; -2)$.
- 268.** Найти координаты точки M , симметричной точке $N (1; -5)$ относительно точки $K (0; 3)$.
- 269.** Точки $M (x; -3)$ и $B (2; y)$ симметричны относительно точки $C (3; -2)$. Найти x и y .
- 270.** Записать уравнение окружности, симметричной окружности $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 7$ относительно:
- 1) начала координат;
 - 2) точки $M (3; -1)$.

271. Записать уравнение прямой, симметричной прямой $3x + 2y - 4 = 0$ относительно:

- 1) начала координат; 2) точки $M(4; -2)$.

272. Построить отрезок с серединой в данной точке и концами на двух данных окружностях.

273. Через данную точку M провести прямую так, чтобы отрезок, расположенный между сторонами данного угла, делился точкой M пополам.

Симметрия относительно прямой (осевая симметрия)

274. Даны не пересекающиеся прямая l и отрезок AB . Построить отрезок, симметричный отрезку AB относительно прямой l .

275. Даны треугольник ABC и прямая m , пересекающая его стороны AB и BC . Построить треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой m .

276. Указать, какие условия должны выполняться, чтобы прямая l была осью симметрии окружности.

277. На рис. 145 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$. Доказать, что точки B и D симметричны относительно прямой AC .

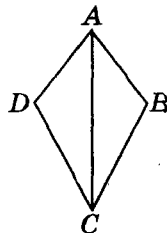


Рис. 145

278. Доказать, что если прямая, содержащая диагональ параллелограмма, является его осью симметрии, то этот параллелограмм — ромб.

279. Сколько осей симметрии имеет: 1) равносторонний треугольник; 2) ромб; 3) окружность?

280. Отрезок AB делится прямой l на две равные части. Симметричны ли точки A и B относительно прямой l ?

281. Начертить треугольник так, чтобы прямые, которым принадлежат его медианы, были осями симметрии треугольника.

282. Прямая l является осью симметрии четырехугольника $ABCD$. Можно ли утверждать, что углы этого четырехугольника попарно равны?

283. Прямая, проходящая через середины оснований трапеции, является ее осью симметрии. Доказать, что эта трапеция равнобедренная.

284. Найти координаты точек, симметричных точке $N(-2; -3)$ относительно осей координат и начала координат.

285. Найти x и y , если точки $A(5; y)$ и $B(x; -2)$ симметричны относительно оси Ox .
286. Построить точки, симметричные точкам $A(2; -3)$, $B(-1; 0)$ и $C(0; 7)$ относительно: 1) оси Ox ; 2) оси Oy ; 3) прямой, содержащей биссектрисы II и IV координатных углов. Записать координаты полученных точек.
287. Оси симметрии прямоугольника — прямые $y = -5$ и $x = 4$. Одна из его вершин имеет координаты $(1; 3)$. Найти координаты других вершин прямоугольника.
288. Диагонали квадрата лежат на осях координат. Найти координаты вершин квадрата, если середина одной из его сторон имеет координаты $(2; -1)$.
289. Построить ромб $ABCD$, у которого диагональ AC длины m лежит на данной прямой, а вершины B и D — на данной окружности и данной прямой.
290. Даны прямая l и точки A и B по одну сторону от нее. Найти на прямой l такую точку X , чтобы сумма $AX + BX$ была минимальной.

Поворот

291. Даны две точки A и O . Построить точку A_1 , в которую переходит точка A при повороте относительно точки O : 1) на угол 70° по часовой стрелке; 2) на угол 115° против часовой стрелки.
292. Даны отрезок MN и точка O , ему не принадлежащая. Построить отрезок M_1N_1 , в который переходит отрезок MN при повороте на угол 40° относительно точки O против часовой стрелки.
293. Дан луч OA . Построить луч, в который переходит луч OA при повороте на угол 65° по часовой стрелке относительно: 1) точки M , принадлежащей лучу; 2) точки N , не принадлежащей лучу.
294. Построить точки, в которые переходят точки $M(-2; 0)$, $N(0; -5)$, $K(1; 3)$, $P(-3; -1)$ при повороте на угол 90° против часовой стрелки относительно начала координат. Указать координаты полученных точек.
295. Точка $M(-3; m)$ переходит в точку $N(-5; n)$ при повороте на угол 90° по часовой стрелке относительно точки $O(0; 0)$. Найти m и n .

- 296.** Прямоугольник повернули на угол 90° относительно его центра симметрии. Доказать, что если при этом он перешел сам в себя, то этот прямоугольник — квадрат.
- 297.** Построить квадрат, если задан его центр и две точки, принадлежащие двум его смежным сторонам.
- 298.** Построить равносторонний треугольник, если заданы точка пересечения его медиан и прямая, которой принадлежит одна из его сторон.
- 299.** В данный квадрат вписать равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин совпадала с вершиной квадрата, а две другие принадлежали сторонам квадрата.
- 300.** Построить равносторонний треугольник так, чтобы его вершины принадлежали трем данным параллельным прямым.

Параллельный перенос

- 301.** Параллельный перенос задается формулами $x' = x - 2$, $y' = y + 5$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки $A(1; -2)$, $B(-2; 3)$, $C(0; 4)$? Какие точки при этом параллельном переносе переходят в точки $M(3; -5)$, $N(2; 0)$, $K(0; -6)$?
- 302.** При параллельном переносе точка $A(4; -2)$ переходит в точку $B(-1; 7)$. В какую точку при этом параллельном переносе переходит точка $M(0; -4)$? Записать формулы этого параллельного переноса.
- 303.** Записать формулы параллельного переноса, при котором точка $A(-5; 2)$ переходит в точку $B(3; -1)$ и наоборот, точка B — в точку A .
- 304.** Построить образы точек $A(2; 6)$, $B(1; -3)$, $C(0; -2)$ при параллельном переносе в отрицательном направлении оси Oy на 3 единицы. Записать координаты построенных точек.
- 305.** Даны точки $A(-1; -6)$ и $B(5; -2)$. При параллельном переносе середина отрезка AB переходит в точку $C(3; 7)$. Найти координаты точек, в которые переходят точки A и B . Записать формулы этого параллельного переноса.

- 306.** Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(3; -5)$, $B(4; 1)$, $C(7; -8)$. Выполнить параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B . Записать координаты вершин полученного треугольника. Сделать рисунок.
- 307.** Записать уравнение окружности, в которую переходит окружность $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 8$ при параллельном переносе, заданном формулами $x' = x - 3$, $y' = y + 2$.
- 308.** Выполнен параллельный перенос прямой $3x + 5y + 2 = 0$. Записать уравнение полученной прямой, если она проходит через точку: 1) $O(0; 0)$; 2) $A(-2; 1)$.

Равенство векторов. Координаты вектора

- 309.** $ABCD$ — прямоугольник (рис. 146). Указать равные векторы.
- 310.** Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:
- 1) $A(3; -4)$, $B(9; -2)$;
 - 2) $A(0; -2)$, $B(4; 0)$;
 - 3) $A(-3; 3)$, $B(0; 0)$;
 - 4) $A(x; y)$, $B(z; t)$.
- 311.** Даны точки $A(4; -2)$, $B(x; 1)$, $C(5; y)$, $D(2; -3)$. Найти x и y , если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

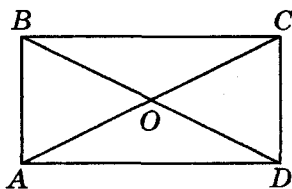


Рис. 146

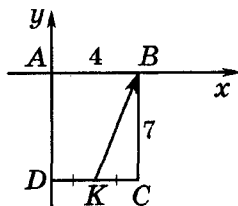


Рис. 147

- 312.** Найти координаты вектора $\overrightarrow{KB}$ (рис. 147).
- 313.** От точки $M(-2; 4)$ отложен вектор $\vec{n}(4; -6)$. Найти координаты конца вектора.
- 314.** Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(3; -7)$, $B(2; 4)$, $C(-5; 1)$, $D(-4; -10)$ является параллелограммом.
- 315.** Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(1; 2)$, $B(-2; 4)$, $C(7; -1)$. Найти координаты вершины D .

316. Среди векторов $\bar{a}$ (8; -6), $\bar{b}$ (1; -7), $\bar{c}$ ($\sqrt{10}$; $3\sqrt{10}$), $\bar{d}$ (5; 5), $\bar{e}$ (4; -2), $\bar{f}$ (-3; 6) найти те, которые имеют равные модули.
317. Модуль вектора $\bar{a}$ (-15; y) равен 17. Найти y .
318. Модуль вектора $\bar{m}$ равен 6, а его координаты равны. Найти координаты вектора $\bar{m}$.
319. Две вершины прямоугольника $ABCD$ — точки B (2; 3) и C (2; 9). Модуль вектора $\overline{AC}$ равен 10. Найти координаты точек A и D .

Сложение векторов

320. Даны векторы $\bar{a}$ (-6; 1) и $\bar{b}$ (5; -3). Найти:
 1) $\bar{a} + \bar{b}$; 2) $\bar{a} - \bar{b}$; 3) $|\bar{a} + \bar{b}|$; 4) $|\bar{a} - \bar{b}|$.
321. Даны точки A (-2; 3) и B (5; 0). Найти координаты точки C такой, что $\overline{BA} + \overline{CA} = \vec{0}$.
322. Найти координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если их сумма имеет координаты (6; -3), а разность — (-1; 4).
323. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 148). Выразить векторы $\overline{BC}$ и $\overline{DC}$ через векторы $\overline{AO} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$.
324. $ABCD$ — параллелограмм. Найти:
 1) $\overline{BA} - \overline{BC} + \overline{AD}$;
 2) $\overline{BC} + \overline{BA} + \overline{DB}$;
 3) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CB} - \overline{DA}$.

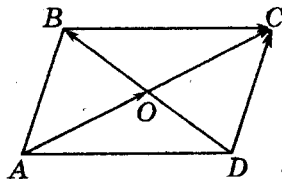


Рис. 148

325. Может ли быть нулевым вектором сумма трех векторов, модули которых равны:
 1) 3; 7; 11; 2) 6; 5; 12; 3) 8; 7; 15?
326. Построить такие ненулевые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, что $|\bar{a}| - |\bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$.
327. Даны векторы $\bar{a}$ (2; -5), $\bar{b}$ (x ; -3), $\bar{c}$ (4; 1). При каком значении x модуль вектора $\bar{c} - \bar{b} - \bar{a}$ наименьший?
328. Найти множество точек C (x ; y) координатной плоскости таких, что для точек A (1; -1) и B (0; 2) выполняется равенство:
 1) $|\overline{AC}| = |\overline{AB}|$; 2) $|\overline{AC} + \overline{BC}| = |\overline{AB}|$.

Умножение вектора на число. Коллинеарные векторы

329. Даны векторы $\bar{a}$ $(-2; 4)$ и $\bar{b}$ $(3; 1)$. Найти:

- 1) $3\bar{a} - \bar{b}$; 2) $2\bar{a} + 4\bar{b}$; 3) $7\bar{a} - 2\bar{b}$; 4) $6\bar{a} + 5\bar{b}$.

330. Вычислить модуль вектора $\bar{x} = -4\bar{m}$, где $\bar{m}$ $(-12; 5)$.

331. Найти модуль вектора $\bar{m} = 5\bar{a} - 3\bar{b}$, где $\bar{a}$ $(5; 6)$, $\bar{b}$ $(1; -4)$.

332. Точки M и K — середины сторон CD и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно (рис. 149). Выразить вектор $\overline{MK}$ через векторы $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{CB} = \bar{b}$.

333. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки P и Q соответственно, причем $AP = \frac{1}{4}AD$, $CQ = \frac{2}{7}CD$ (рис. 150). Выразить:

1) векторы $\overline{BP}$ и $\overline{BQ}$ через векторы $\overline{AB} = \bar{m}$, $\overline{BC} = \bar{n}$;

2) векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ через векторы $\overline{BP} = \bar{a}$, $\overline{BQ} = \bar{b}$.

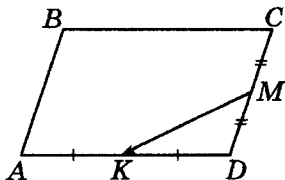


Рис. 149

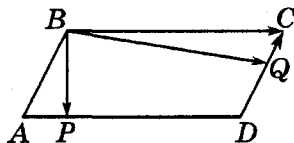


Рис. 150

334. O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, $AO : OC = 2 : 3$, $BO : OD = 3 : 5$. Выразить векторы $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$ через векторы $\overline{OC} = \bar{a}$ и $\overline{BO} = \bar{b}$.

335. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно такие точки K и M , что $AK : KB = 2 : 5$, $AM : MC = 4 : 3$. Выразить:

1) векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{CK}$ и $\overline{MB}$ через векторы $\overline{AK} = \bar{a}$, $\overline{CM} = \bar{c}$;

2) векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ через векторы $\overline{BM} = \bar{a}$, $\overline{CK} = \bar{b}$.

336. M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Доказать, что $\overline{AM} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC})$.

337. Коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, если A $(-1; 5)$, B $(-3; 7)$, C $(4; -2)$, D $(-1; 3)$?

338. Среди векторов $\bar{a} (2; -5)$, $\bar{b} (8; -20)$, $\bar{c} (-4; 10)$, $\bar{d} (-14; 35)$ найти сонаправленные и противоположно направленные векторы.
339. Найти значение m , при котором векторы $\bar{a} (m; 3)$ и $\bar{b} (5; -8)$ коллинеарны.
340. Даны точки $A (-1; 4)$ и $B (3; 7)$. Найти вектор $\bar{a}$ такой, что векторы $\overline{BA}$ и $\bar{a}$ равны по модулю, но противоположны по направлению.
341. Найти координаты вектора $\overline{m}$, коллинеарного вектору $\bar{n} (8; -15)$, если $|\overline{m}| = 51$.
342. Для ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется равенство $7\bar{a} + 9\bar{b} = 12\bar{a} - \bar{b}$. Доказать, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — коллинеарны.
343. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A (1; -4)$, $B (2; 1)$, $C (5; 3)$, $D (10; 2)$ — трапеция.
344. Лежат ли точки $A (-1; 5)$, $B (7; 13)$ и $C (0; 6)$ на одной прямой?
345. C — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $BC = 2$, $AD = 5$. Найти такие числа x и y , что: 1) $\overline{BO} = x \cdot \overline{DB}$; 2) $\overline{OA} = y \cdot \overline{OC}$.

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Единичный вектор

346. Среди векторов $\bar{a} \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right)$; $\bar{b} \left(\frac{8}{17}; -\frac{15}{17} \right)$; $\bar{c} (-1; 1)$, $\bar{d} \left(\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$; $\bar{e} (0; -1)$ указать единичные векторы.
347. Найти координаты единичного вектора, который сонаправлен с вектором:
 1) $\bar{a} (1; 1)$; 2) $\bar{b} (24; -7)$; 3) $\bar{c} (x; y)$.
348. Даны единичные векторы $\bar{e}_1 (-1; 0)$ и $\bar{e}_2 (0; -1)$. Найти координаты и абсолютную величину векторов:
 1) $4\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$; 2) $2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$; 3) $x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$.
349. Разложить вектор $\bar{k} (2; -7)$ по векторам $\bar{a} (4; -1)$ и $\bar{b} (-2; 5)$.

Скалярное произведение векторов

- 350.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:
- 1) $\vec{a} (1; -3)$, $\vec{b} (4; -2)$; 3) $\vec{a} (-10; 5)$, $\vec{b} (4; 8)$.
 - 2) $\vec{a} (-3; -8)$, $\vec{b} (-7; -1)$;
- 351.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:
- 1) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 7$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$;
 - 2) $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 11$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$;
 - 3) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.
- 352.** Даны векторы $\vec{a} (4; y)$ и $\vec{b} (5; -3)$. При каком значении y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$?
- 353.** Найти косинус угла между векторами $\vec{a} (5; -1)$ и $\vec{b} (2; 6)$.
- 354.** Найти косинусы углов треугольника ABC , если $A (1; -4)$, $B (4; 7)$, $C (-2; 1)$. Определить вид треугольника.
- 355.** Даны векторы $\vec{a} (6; -1)$ и $\vec{b} (x; 2)$. При каком значении x векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?
- 356.** Даны векторы $\vec{a} (4; -7)$ и $\vec{b} (3; y)$. При каких значениях y угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$: 1) острый? 2) прямой? 3) тупой?
- 357.** Найти косинусы углов, образованных вектором $\overrightarrow{AB}$, где $A (3; 7)$, $B (5; 1)$, с отрицательными направлениями координатных осей.
- 358.** Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A (1; 2)$, $B (2; 5)$, $C (5; 4)$, $D (4; 1)$ — прямоугольник.
- 359.** Найти координаты вектора $\vec{a}$, коллинеарного вектору $\vec{b} (2; -5)$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = -58$.
- 360.** Найти координаты вектора, перпендикулярного вектору $\vec{a} (3; -1)$ и равного ему по абсолютной величине.
- 361.** Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 135° , $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 7$. Найти:
- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$; 3) $(\vec{b} - 2\vec{a}) \cdot \vec{b}$; 4) $(2\vec{b} + 5\vec{a}) \cdot \vec{a}$.
- 362.** Даны векторы $\vec{a} (3; -5)$ и $\vec{b} (4; -1)$. Найти значение α , при котором векторы $\alpha\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a}$ перпендикулярны.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ

Вариант 1

Тематическое оценивание №1

Тема. *Параллелограмм и его виды*

- 1°. В четырехугольнике $ABCD$, проведена диагональ AC (рис. 151), $\angle ACB = \angle CAD$, $\angle ACD = \angle CAB$. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.
- 2°. В прямоугольнике $ABCD$ угол ABD равен 42° . Найти больший угол между диагоналями прямоугольника.
- 3°. Одна из сторон параллелограмма на 6 см больше другой, а его периметр равен 48 см. Найти стороны параллелограмма.
- 4°. В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E . Отрезок BE больше отрезка EC в 3 раза. Найти стороны прямоугольника, если его периметр равен 42 см.
- 5°. В ромбе $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BE и BF к сторонам AD и DC соответственно. Угол EBF равен 30° . Найти периметр ромба, если $BE = 6$ см.

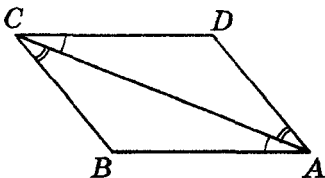


Рис. 151

Тематическое оценивание №2

Тема. *Средняя линия треугольника. Трапеция*

- 1°. Найти периметр треугольника, если его средние линии равны 6 см, 9 см и 10 см.

- 2°. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 17 см и 5 см. Из вершины B трапеции проведена высота BE . Найти длину отрезка AE .
- 3°. Диагональ равнобедренной трапеции образует с основанием угол 28° , а ее боковая сторона равна меньшему основанию. Найти углы трапеции.
- 4°. В трапеции $ABCD$ основание AD больше основания BC на 6 см, а средняя линия равна 7 см. Найти длины отрезков, на которые диагональ AC делит среднюю линию.
- 5°. В треугольнике ABC сторона AB разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне AC . Найти длины отрезков этих прямых, расположенных между сторонами AB и BC треугольника, если $AC = 9$ см.

Тематическое оценивание №3

Тема. *Теорема Пифагора. Перпендикуляр
и наклонная. Неравенство треугольника*

- 1°. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 13 см, а один из катетов — 12 см. Найти периметр треугольника.
- 2°. Из одной точки к данной прямой проведены две равные наклонные. Расстояние между их основаниями равно 28 см. Определить длины проекций наклонных на данную прямую.
- 3°. Высота BM равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) делит сторону AC на отрезки $AM = 15$ см и $CM = 2$ см. Найти основание BC треугольника.
- 4°. Из точки к прямой проведены две наклонные, проекции которых на прямую равны 9 см и 16 см. Найти расстояние от точки до прямой, если одна из наклонных на 5 см больше другой.
- 5°. Доказать, что сумма диагоналей трапеции больше суммы ее боковых сторон.

Тематическое оценивание №4

Тема. *Отношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника*

- 1°. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $BC = 12$ см, $\operatorname{tg} \angle A = 0,8$. Найти катет AC и гипотенузу AB .
- 2°. Основание равнобедренного треугольника равно 10 см, а боковая сторона — 13 см. Найти синус, косинус и тангенс угла при основании треугольника.
- 3°. Высота BD треугольника ABC делит сторону AC на отрезки AD и DC . $AB = 12$ см, $\angle A = 60^\circ$, $\angle CBD = 45^\circ$.
Найти длину стороны AC .
- 4°. Определить, какое из чисел больше: $\sin 47^\circ$ или $\cos 41^\circ$.
- 5°. В трапеции $ABCD$ (рис. 152) $AB = m$, $BC = b$, $\angle ABE = \alpha$, $\angle D = \beta$. Найти основание AD трапеции.

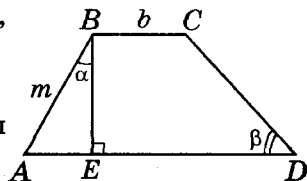


Рис. 152

Тематическое оценивание №5

Тема. *Декартовы координаты на плоскости*

- 1°. Точки $A(-3; 2)$ и $B(1; -5)$ являются концами отрезка AB . Найти длину отрезка AB и координаты его середины.
- 2°. Записать уравнение окружности, центр которой находится в точке $M(1; -3)$ и которая проходит через точку $K(-4; 2)$.
- 3°. Найти координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A(-2; 3)$, $B(4; 5)$, $C(2; 1)$.
- 4°. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $K(3; -2)$ и $P(5; 2)$.
- 5°. Доказать, что окружности $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ и $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$ не имеют общих точек.

Тематическое оценивание №6

Тема. Векторы

- 1°. Даны точки $A(-2; 3)$, $B(1; -1)$, $C(2; 4)$. Найти:
- 1) координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$;
 - 2) модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$;
 - 3) координаты вектора $\overline{MN} = 3\overline{AB} - 2\overline{CA}$;
 - 4) косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$.
- 2°. Даны векторы $\overline{a}(2; 6)$ и $\overline{b}(-3; k)$. При каком значении k векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$: 1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?
- 3°. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(-2; 3)$, $B(1; -2)$, $C(5; 0)$ и $D(2; 5)$ является параллелограммом.
- 4°. Найти косинус угла между векторами $\overline{a} = \overline{n} + 2\overline{m}$ и $\overline{b} = 3\overline{n} - \overline{m}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.
-

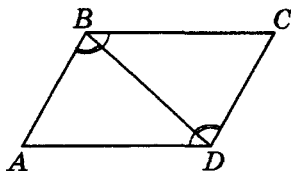
ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ

Вариант 2

Тематическое оценивание №1

Тема. *Параллелограмм и его виды*

- 1°. В четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD (рис. 153), $\angle CBD = \angle ADB$, $\angle ABD = \angle BDC$. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.
- 2°. В прямоугольнике $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей, а угол BOC равен 108° . Найти угол ABD .
- 3°. Одна из сторон параллелограмма в 5 раз больше другой, а его периметр равен 36 см. Найти стороны параллелограмма.
- 4°. В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке P . Отрезок AP меньше отрезка BP в 6 раз. Найти стороны прямоугольника, если его периметр равен 80 см.
- 5°. Из вершины тупого угла B ромба $ABCD$ проведена высота BK к стороне AD . Угол KBD равен 15° . Найти высоту BK , если периметр ромба равен 32 см.



Мал. 153

Тематическое оценивание №2

Тема. *Средняя линия треугольника. Трапеция*

- 1°. Стороны треугольника равны 10 см, 12 см и 14 см. Найти периметр треугольника, вершины которого — середины сторон данного треугольника.

- 2°. В равнобедренной трапеции $ABCD$ высота BK делит основание AD на отрезки $AK = 4$ см и $KD = 10$ см. Найти основание BC трапеции.
- 3°. Диагональ равнобедренной трапеции образует с основанием угол 54° , а ее боковая сторона равна большему основанию. Найти углы трапеции.
- 4°. В трапеции $ABCD$ средняя линия EF пересекает диагональ AC в точке K . Разность отрезков KF и KE равна 3 см. Найти основания трапеции, если их сумма равна 18 см.
- 5°. В треугольнике ABC сторона AC разделена на три равных отрезка и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне AB треугольника. Меньший из отрезков этих прямых, расположенных между сторонами треугольника, меньше стороны AB на 8 см. Найти сторону AB треугольника.
-

Тематическое оценивание №3

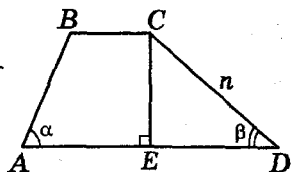
Тема. *Теорема Пифагора. Перпендикуляр и наклонная. Неравенство треугольника*

- 1°. В прямоугольном треугольнике катеты равны 8 см и 15 см. Найти периметр треугольника.
- 2°. Из одной точки к данной прямой проведены две равные наклонные. Найти расстояние между основаниями наклонных, если проекция одной из них равна 16 см.
- 3°. Высота AK остроугольного равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равна 12 см, а $KB = 9$ см. Найти стороны треугольника ABC .
- 4°. Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых равны 13 см и 15 см. Найти расстояние от точки до прямой, если разность проекций наклонных равна 4 см.
- 5°. Доказать, что сумма диагоналей трапеции больше суммы ее оснований.

Тематическое оценивание №4

Тема. *Отношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника*

- 1°. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AB = 15$ см, $\sin \angle A = 0,6$. Найти катеты AC и BC .
- 2°. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а высота, проведенная к основанию — 8 см. Найти синус, косинус и тангенс угла при основании треугольника.
- 3°. В треугольнике ABC высота BD делит сторону AC на отрезки AD и DC . $BC = 6$ см, $\angle A = 30^\circ$, $\angle CBD = 45^\circ$. Найти длину стороны AC .
- 4°. Определить, какое из чисел больше: $\cos 53^\circ$ или $\sin 39^\circ$.
- 5°. В трапеции $ABCD$ (рис. 154) $AD = a$, $CD = n$, $\angle A = \alpha$, $\angle D = \beta$. Найти основание BC трапеции.



Мал. 154

Тематическое оценивание №5

Тема. *Декартовы координаты на плоскости*

- 1°. Точки $D(4; -5)$ и $F(-3; -1)$ являются концами отрезка DF . Найти длину отрезка DF и координаты его середины.
- 2°. Записать уравнение окружности, проходящей через точку $P(-2; -5)$ и имеющей центр в точке $E(1; -3)$.
- 3°. Найти координаты вершины C параллелограмма $ABCD$, если $A(-3; -2)$, $B(4; 7)$, $D(-2; -5)$.
- 4°. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M(-2; -2)$ и $N(2; 10)$.
- 5°. Доказать, что окружности $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ и $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$ не имеют общих точек.

Тематическое оценивание №6

Тема. Векторы

- 1°. Даны точки $M(-2; -4)$, $P(4; 4)$, $K(-1; 3)$. Найти:
- 1) координаты векторов $\overline{MK}$ и $\overline{PM}$;
 - 2) модули векторов $\overline{MK}$ и $\overline{PM}$;
 - 3) координаты вектора $\overline{EF} = 2\overline{MK} - 3\overline{PM}$;
 - 4) косинус угла между векторами $\overline{MK}$ и $\overline{PM}$.
- 2°. Даны векторы $\overline{m}(p; 4)$ и $\overline{n}(20; -10)$. При каком значении p векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$: 1) коллинеарны; 2) перпендикулярны?
- 3°. Доказать, что четырехугольник $EFKP$ с вершинами $E(-2; 2)$, $F(2; 4)$, $K(5; -1)$ и $P(1; -3)$ является параллелограммом.
- 4°. Найти косинус угла между векторами $\overline{a} = 3\overline{k} - \overline{p}$ и $\overline{b} = \overline{k} + 2\overline{p}$, где $\overline{k}$ и $\overline{p}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.
-

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ТРЕНИРОВОЧНЫМ УПРАЖНЕНИЯМ

Вариант 1

3. Нет. 7. Нет. 14. *Указание.* Показать, что диагонали четырехугольника $AFCE$ точкой пересечения делятся пополам. 16. *Указание.* Доказать равенство треугольников AOE и COF . 18. 7 см и 5 см. *Указание.* Доказать, что $\triangle ABE$ — равнобедренный. 20. 12 см. *Указание.* Использовать то, что катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы. 24. 1) 30° ; 2) 150° . 25. 4 см. 26. 12 см. 29. *Указание.* Построить параллелограмм, у которого данная точка — точка пересечения диагоналей, а стороны лежат на сторонах угла. 30. *Указание.* Продолжить медиану на ее длину и построить треугольник, две стороны которого — данные, а третья равна удвоенной данной медиане. 39. 48 см. 41. 6 см и 12 см. *Указание.* Доказать, что треугольники CBK и DAK — равнобедренные. 42. *Указание.* Продолжить медиану на ее длину и соединить с вершинами треугольника. Доказать, что полученная фигура — прямоугольник. 43. 4 см. *Указание.* Использовать результат задачи 42. 44. 24 см. 45. 24 см. *Указание.* Доказать, что диагональ прямоугольника образует с большей стороной угол, равный 30° . 54. 84° и 96° . 55. 1) 60° и 120° ; 2) 16 см. 57. *Указание.* Биссектрисы углов параллелограмма пересекаются под прямым углом. 60. *Указание.* Расположить линейку так, чтобы концы отрезка лежали на ее сторонах. Провести параллельные прямые через концы отрезка (рис. 155). Доказать, что $ACBD$ — ромб. 64. 2 см. 65. 24 см. 67. 12 см. 68. 4 см и 8 см. 70. *Указание.* Задача сводится к построению прямоугольного равнобедренного треугольника ABC (рис. 156) по разности гипотенузы AB и катета BC .

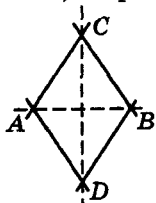


Рис. 155

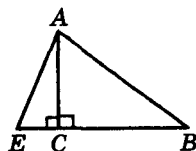


Рис. 156

Отложить на луче BC за точку C отрезок $CE = AB - BC$. Треугольник ABE равнобедренный ($BA = BE$) и $\angle BEA = \angle BAE = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 67,5^\circ$. Треугольник AEC можно построить по катету EC и углу E . Катет AC равен стороне искомого квадрата.

72. Указание. Поскольку $BE \parallel DF$, то $AE = EF$. Аналогично $CF = FE$. 73. Указание. Показать, что $M_1K = KC = \frac{1}{2} BM_1$.

78. 4:3. Указание. Провести через точку D прямую, параллельную BE , пересекающую AC в точке K . Тогда $AE:EK = AF:FD$ и $EK = KC$. 79. 21:10. Указание. Провести через точку E прямую, параллельную AD .

80. Указание. 2) $\frac{a^2}{b} = \frac{a \cdot a}{b}$; 3) по-

строить отрезок $m = \frac{ab}{d}$, а потом $n = \frac{mc}{e}$. 82. 9 см. 85. Парал-

лелограмм, 10 см. Указание. A_1B_1 и C_1D_1 — средние линии треугольников ABO и CDO соответственно, откуда $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ и $A_1B_1 = C_1D_1$. 87. 2 см. Указание. На рис. 157 $CC_1 =$

$= CC_2 - C_1C_2 = \frac{BB_2}{2} - C_1C_2 = 7 - 5 = 2$ (см).

88. 3 см. Указание. Провести $CD \perp AB$ и

$MK \perp AB$. $MK = \frac{1}{2} CD$. 91. Ромб; 64 см.

93. 8 см. 94. 4 см. Указание. Искомое расстояние равно $\frac{1}{3}$ высоты, проведенной к ос-

нованию треугольника. 95. Указание. Провести через данные точки прямые, параллельные отрезкам, соединяющим эти точки.

96. Указание. Провести $AM \parallel OD$ до пересечения с OC (точка M). Построить на сторонах угла COD треугольник, для которого AM — средняя линия. 98. Да. 100. Нет. 103. 64° ; 64° ;

116° ; 116° . Указание. Доказать, что диагональ трапеции является биссектрисой острого угла. 106. 76° ; 104° ; 128° . 107. 60° ; 60° ; 120° ; 120° . 111. 11 см и 27 см. Указание. Использовать результат задачи 109. 112. 9 см и 23 см. 113. 12 см. 114. 30 см. 115. 13 см. Указание. Диагональ трапеции образует с

основанием угол 45° . 117. Указание. Провести $BK \parallel CD$. 118. Указание. Через вершину C трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) провести $CK \parallel AB$. K принадлежит большему основанию AD . Треугольник KCD можно построить по трем сторонам. 122. 7 см, 8 см, 9 см. 123. 4 см, 8 см. 127. 2 см. 131. 68 см. 133. 8,5 см. 139. $2\sqrt{10}$ см. 142. Нет. Указание. Выразить больший катет через гипотенузу и меньший катет. 147. 10 см, 24 см, 26 см. Указа-

ние. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

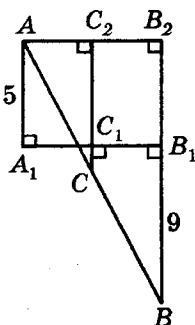


Рис. 157

149. $4\sqrt{10}$ см. 151. 15 см, 15 см, 24 см. 152. 9 см, 15 см. *Указание.* Касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны. 155. 21 см и 28 см. *Указание.* Биссектриса угла треугольника делит сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. 156. 9 см. 157. $12\sqrt{17}$ см. *Указание.* Провести медиану к основанию. Использовать свойство, что медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины. 160. 12 см. *Указание.* Пусть высота делит среднюю сторону на отрезки x и $14 - x$. Тогда $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$. 161. 18 см и 32 см. *Указание.* Для описанного четырехугольника суммы противоположных сторон равны. 163. 12 см. *Указание.* $AB^2 = O_2K^2 = O_1O_2^2 - O_1K^2$ (рис. 158). 167. 7 см или 17 см. 168. 12 см. 169. 13 см и 15 см. 171. 3 см и 12 см. 172. 72. 173. $2\sqrt{6}$ см или $1,5\sqrt{7}$ см. *Указание.* Если наклонные имеют длины x см и $(x + 2)$ см, а их проекции — y см и $(y + 4)$ см, то

$$x^2 - y^2 = (x + 2)^2 - (y + 4)^2,$$

откуда $x = 2y + 3$. Поскольку x — целое число, меньшее 6, то $x = 4$, $y = 0,5$, или $x = 5$, $y = 1$. 182. *Указание.* Продлить медиану AM за точку M на ее длину и соединить полученную точку с точками B и C . 184. 8 см или 11 см.

186. а) $1 < AB < 11$; б) $0 < AB < 2m$; в) $0,5 < AB < 7,5$.

199. $c(\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \beta)$.

201. $\frac{m}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$; $m \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. 202. 8 см. 203. $2\sqrt{2}$ см, $(8 + 2\sqrt{2})$ см.

204. $2a + \frac{2h(1 - \sin \beta)}{\cos \beta}$. 221. (0; 4). 222. *Указание.* Доказать, что середины диагоналей совпадают. 224. (-2; 8), (-4; -6), (6; 0). 227. 10. 228. *Указание.* Показать, что $AB + BC = AC$. 231. (2; 0). 232. *Указание.* Доказать, что диагонали равны и их середины совпадают. 233. (1; $3\sqrt{3}$) или (1; $-3\sqrt{3}$). 235. $x^2 + (y - 4)^2 = 100$ или $x^2 + (y + 8)^2 = 100$. 239. 5) (1; 2), $R = 2\sqrt{3}$. 243. $y = -3x + 1$. 246. $a = -19$. 251. $y = 4x + 13$. 262. *Указание.* Доказать, что $\triangle AO_1O = \triangle BO_2O$. 265. *Указание.* O — середина отрезка, соединяющего симметричные точки. 269. $m = -7$, $n = 14$. 270. 1) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 11$, 2) $(x + 12)^2 + (y - 7)^2 = 11$. 271. *Указание.* Искомая и данная прямые имеют равные угловые ко-

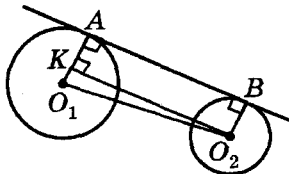


Рис. 158

эффиценты. 272. *Указание.* Построить прямую, симметричную одной из данных прямых относительно заданной точки. 273. *Указание.* Построить окружность, симметричную одной из данных окружностей относительно точки K . 286. 3) $(-4; 3)$, $(0; 4)$, $(-5; 0)$. 289. *Указание.* Построить окружность, симметричную одной из данных окружностей относительно заданной прямой. 295. $b = 5$, $a = 4$. 297. *Указание.* Пусть l_1' — образ прямой l при повороте на угол 90° относительно точки A . Точка пересечения прямых l_2 и l_1' — вторая вершина искомого треугольника. 298. *Указание.* Рассмотреть поворот данной прямой относительно заданной точки на угол 60° .

Вариант 2

18. 22 см. 20. 50 см. 22. *Указание.* Сумма углов четырехугольника равна 360° . 24. 1) 126° ; 2) 54° . 26. 32 см. 30. *Указание.* Продлить медианы треугольников на их длину и соединить с вершинами соответствующих треугольников. Найти равные треугольники. 35. *Указание.* Доказать, что точки D , O и B лежат на одной прямой. Для этого необходимо доказать равенство треугольников AOD и BOC . 40. 21 см и 27 см. *Указание.* Сумма смежных сторон прямоугольника равна 48 см. 41. 90° . 43. 16 см. 44. *Указание.* Провести $CX \perp AB$. 45. 3:1. 54. 68° ; 112° . 55. 30° ; 150° . 60. *Указание.* Смотри рис. 159 и указание к задаче 60 вариант 1. 65. 8 см. 68. 32 см. 70. *Указание.* Задача сводится к построению равнобедренного прямоугольного треугольника ABC по сумме катета и гипотенузы (рис. 160). Продлить катет CB за точку B на длину AB . Треугольник ADC можно построить ($CD = AB + CB$, $\angle ADB = 22,5^\circ$), откуда получаем сторону AC квадрата. 73. 1:2. *Указание.* Провести $DE \parallel BP$. 78. 5 : 2.

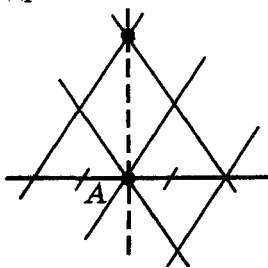


Рис. 159

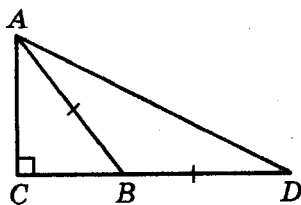


Рис. 160

79. 3:2. Указание. Провести $MK \parallel AN$. $CN : NK = CO : OM = 3 : 1$. Тогда $NK : KB = 3 : 2$. 80. Указание. 3) Построить отрезок $m = \frac{ac}{d}$, а потом $n = \frac{ma}{b}$. 85. Прямоугольник. 64 см.

86. Указание. Доказать, что $EF \parallel AC$ и $FK \parallel BD$. 88. 12 см.

Указание. Провести $CD \perp AB$, $KP \perp AB$. Доказать, что

$AB = 4KP$. 89. 1) ромб; 2) ромб. 90. 16 см, квадрат.

91. 30° , ромб. 92. Указание. (рис. 161). Доказать, что

$AC = C_1B = BA_1$. 93. 4 см. 94. 3 см.

95. Указание. Построить треугольник

по стороне — расстоянием между двумя

данными точками и двумя прилежащи-

ми углами, равными данным углам. 98.

Да. 100. Да. 106. 70° , 70° , 110° , 110° .

107. 60° , 60° , 120° , 120° . 111. 8 см. 112.

68 см. 113. 8 см. 114. 26 см. 115. 40 см.

Указание. Высота трапеции в 2 раза

меньше суммы оснований. 116. 57 см.

118. Указание. Провести через одну из

вершин трапеции отрезок, параллельный

диагонали до пересечения с основанием

трапеции. Построить треугольник,

две стороны которого — диагонали

трапеции, а третья — сумма

оснований. 122. 1 см, 13 см. 123. 9 см.

127. 12 см. 130. Указание. Высота трапеции

равна большему из отрезков,

на которые она делит большее

основание. 132. 9 см. 134. 45° ,

45° , 135° , 135° . 139. 35 см. 142. Нет.

148. 4 см. 149. 10 см. 150. 10 см,

10 см, 12 см. 152. 10 см, 24 см,

26 см. Указание. Касательные к

окружности, проведенные из

одной точки, равны. 155. 360 см.

Указание. Исползовать

указание к задаче 155 вариант 1.

157. 7,5 см. Указание.

Использовать, что медианы

треугольника делятся точкой

пересечения в отношении 2:1, считая

от вершины. 160. 9,6 см. Указание.

Через вершину трапеции провести

отрезок, параллельный второй

диагонали, до пересечения со

вторым основанием. В

треугольнике, две стороны

которого — диагонали

трапеции, а третья —

сумма оснований, провести

высоту. Пусть один из

отрезков, на которые

она делит сторону

треугольника, равен x см,

тогда второй — $(20 - x)$ см,

откуда $12^2 - x^2 = 16^2 - (20 - x)^2$.

161. $9\sqrt{5}$ см, $9\sqrt{5}$ см, $3\sqrt{5}$ см,

$15\sqrt{5}$ см. Указание. Для

описанного четырехугольника

суммы противоположных

сторон равны. 163. 8 см.

Указание (рис. 162).

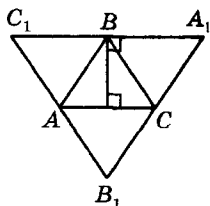


Рис. 161

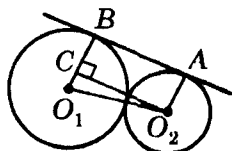


Рис. 162

которые она делит сторону треугольника, равен x см, тогда второй — $(20 - x)$ см, откуда $12^2 - x^2 = 16^2 - (20 - x)^2$. 161. $9\sqrt{5}$ см, $9\sqrt{5}$ см, $3\sqrt{5}$ см, $15\sqrt{5}$ см. Указание. Для описанного четырехугольника суммы противоположных сторон равны. 163. 8 см. Указание (рис. 162).

$$O_2C^2 = O_1O_2^2 - O_1C^2.$$

167. $(24 - 10\sqrt{3})$ см или $(24 + 10\sqrt{3})$ см. 169. $2\sqrt{6}$ см. 171. $4\frac{1}{3}$ см, $7\frac{2}{3}$ см. 173. $4\sqrt{3}$ см. *Указание.* Пусть длины наклонных x см и $(x + 5)$ см, а их проекций — y см и $(y + 7)$ см, тогда $x^2 - y^2 = (x + 5)^2 - (y + 7)^2$, откуда $5x = 7y + 12$. Поскольку $x \leq 13$, то $x = 8$, $y = 4$. 182. *Указание.* Использовать результат задачи 182 вариант 1.

186. а) $4 < AB < 18$; б) $a < AB < 3a$; в) $1 < AB < 7$.

199. $m (\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} (\alpha + \beta) - \sin \alpha)$. 201. $2a \cos \frac{\alpha}{2}$, $2a \sin \frac{\alpha}{2}$.

202. $2\sqrt{57}$ см. 203. 11 см, $5\sqrt{2}$ см. 204. $2b + \frac{2h}{\cos \alpha} (1 + \sin \alpha)$.

221. $(5, 5; -7, 5)$. 222. $D (-5; -10)$. 224. $(11; 8)$, $(-1; -12)$, $(-5; 0)$. 227. $4\sqrt{13}$. 231. $(0; -1, 75)$. 233. $(-3\sqrt{3}; -1)$ или $(3\sqrt{3}; -1)$. 235. $(x - 6)^2 + y^2 = 25$ или $(x + 2)^2 + y^2 = 25$. 239. $5) (-3; 1)$, $R = 2\sqrt{5}$. 243. $y = x + 3$. 246. 2,5. 262. *Указание.* Доказать, что $O_1O = O_2O$. 265. *Указание.* O — середина отрезка, соединяющего симметричные точки. 270. 1) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 7$; 2) $(x + 2)^2 + (y - 9)^2 = 7$. 271. *Указание.* Искомая и данная прямые имеют равные угловые коэффициенты. 272. *Указание.* Построить окружность, симметричную данной относительно данной точки. 273. *Указание.* Доказать, что точка касания — центр симметрии окружностей. 286. 3) $(2; -1)$, $(1; 0)$, $(0; 3)$. 289. *Указание.* Построить прямую, симметричную одной из прямых относительно прямой, содержащей диагональ AC . 295. $a = -3$, $b = -2$. 297. *Указание.* Рассмотреть поворот одной из сторон угла относительно данной точки на угол 60° . Точка пересечения полученного луча с другой стороной угла — вторая вершина искомого треугольника. 298. *Указание.* Рассмотреть поворот одной из данных окружностей на угол 90° относительно заданной точки. Точки пересечения полученной окружности с другой окружностью можно принять за вторую вершину искомого треугольника.

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов	3
Тематическое распределение тренировочных упражнений	4
Тренировочные упражнения	5
Вариант 1	5
Вариант 2	41
Вариант 3	77
Задания для тематического оценивания знаний	113
Вариант 1	113
Вариант 2	117
Ответы и указания к тренировочным упражнениям	121