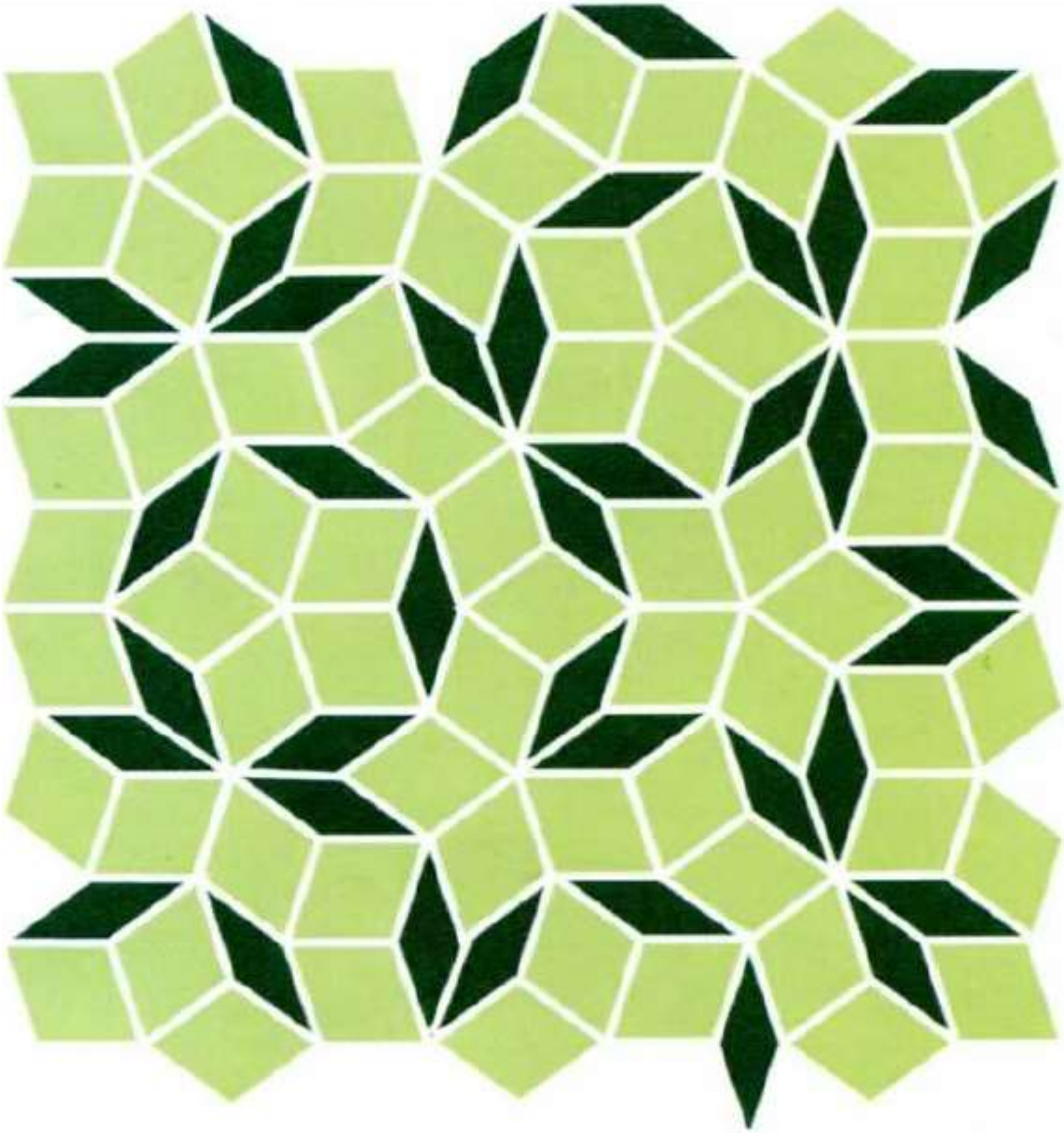
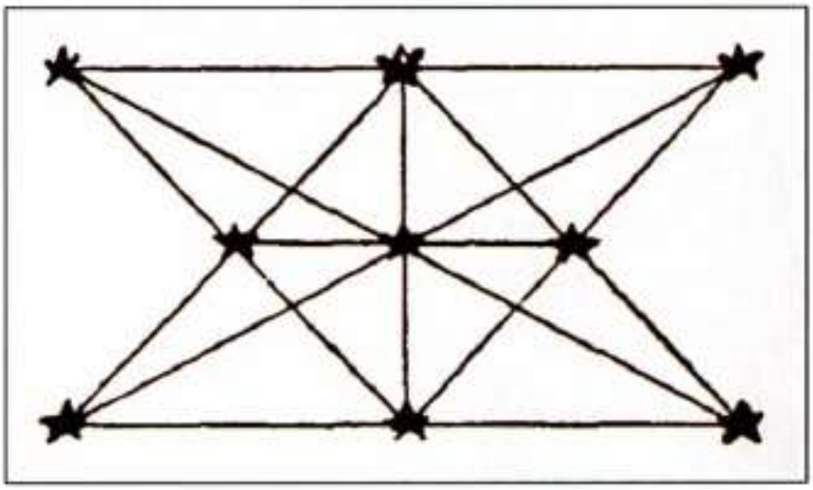
составитель Е.МАНОХА

занимательные ГОЛОВОЛОМКИ 6

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

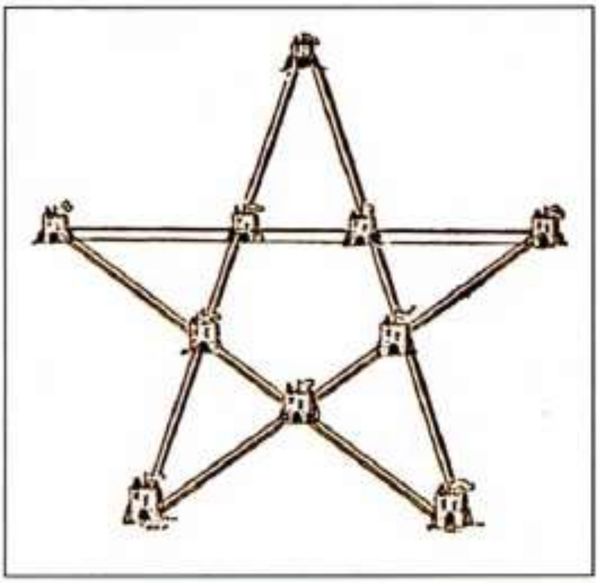




Задачи с линиями и точками интересны для многих. Самая известная из них, которая приведена здесь, звучит так: нужно посадить девять деревьев так, чтобы они образовали десять рядов по три дерева в каждом. Авторство этой задачи приписывается сэру Исааку Ньютону. Однако первая подборка таких головоломок, по моему мнению, содержится в редкой книжице из моей библиотеки авторства Джона Джексона, которая была издана в 1821 году и носит название «Развлечения для ума для зимних вечеров». Автор приводит десять задач, в которых нужно посадить деревья в несколько рядов по определенным правилам.

Такие головоломки всегда вызывали множество затруднений. Это головоломки в прямом смысле слова, поскольку никому еще не удалось найти удачный общий способ их решения. Они требуют проницательности, находчивости и терпения. Порой вам поможет то, что зовется удачей. Быть может, когда-нибудь некий гений найдет ключ к этой загадке. Не будем забывать, что деревья следует считать точками, поскольку если они будут достаточно велики, то можно будет по ошибке посчитать некоторые ряды прямыми, хотя в действительности они не будут являться таковыми.

1. Король и его замки



Когда-то в стародавние времена жил могущественный король, который отличался эксцентричными идеями в архитектуре. Он считал, что в симметричных фигурах заключена великая сила, и в доказательство своих слов всегда приводил в пример пчел, которые строят соты в форме шестиугольников. Он решил возвести в своей стране десять замков и соединить их укрепленными стенами так, чтобы получилось пять линий по четыре замка в каждой. Королевский архитектор представил предварительный план расположения замков (см. рисунок справа). Но монарх указал, что каждый замок может быть атакован извне, и повелел изменить план так, чтобы защитить максимальное число замков от нападения, огородив их укрепленными стенами. Архитектор ответил, что расположить замки таким образом невозможно: крепостной стеной не получится защитить даже один замок, который король желал использовать в качестве своей резиденции. Однако Его Величество поспешил объяснить архитектору, как это можно сделать. Как же построить десять замков и огородить их крепостными стенами так, чтобы выполнить все требования короля? Напомню, что должно получиться пять прямых линий по четыре замка в каждой.

2. Лимоны и груши

На рисунке изображен план дома, вокруг которого растет 51 дерево: 10 лимонных деревьев, 10 груш, остальные — дубы. Лимонные деревья посажены так, что образуют пять прямых линий по четыре дерева в каждой.

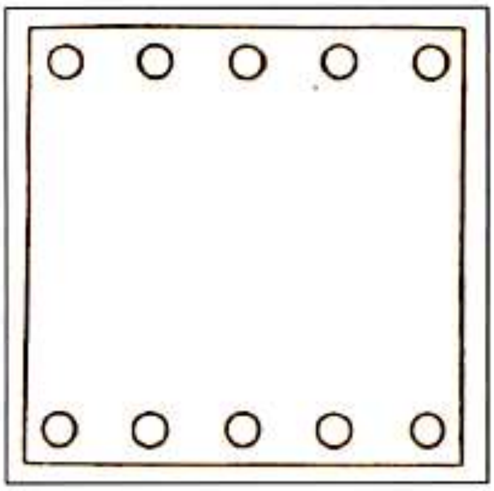
Груши тоже посажены так, что образуют пять прямых линий по четыре дерева в каждой. Суть задачи — указать, где именно растут 10 лимонных деревьев, а где — 10 груш. Есть еще одно условие: они посажены так, что на северной и восточной сторонах участка число деревьев наименьшее.

Разумеется, когда вы будете определять, где растут 10 лимонных деревьев или 10 груш, учитывать остальные деревья между ними не нужно. Другими словами, четыре дерева могут располагаться в линию так, что между ними будут находиться другие деревья (или дом), и это будет соответствовать условиям задачи.

И, наконец, последняя, очень простая головоломка.

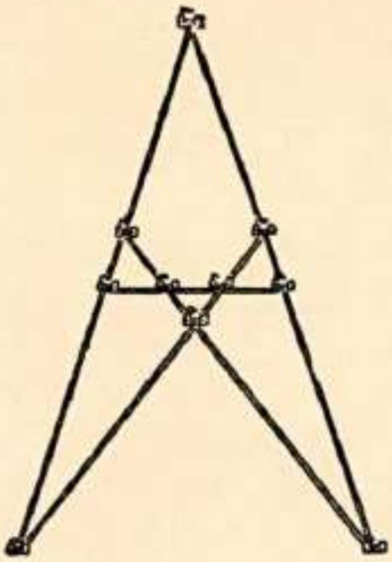
3. Десять монет

Положите десять монет на лист бумаги или картона, как показано на рисунке, по пять в каждом ряду. Уберите четыре монеты, не сдвигая остальных, и снова положите их на лист так, чтобы десять монет образовали пять прямых линий по четыре монеты в каждой. Сделать это несложно, но нужно определить, сколькими способами можно решить головоломку, считая оба начальных ряда одинаковыми.

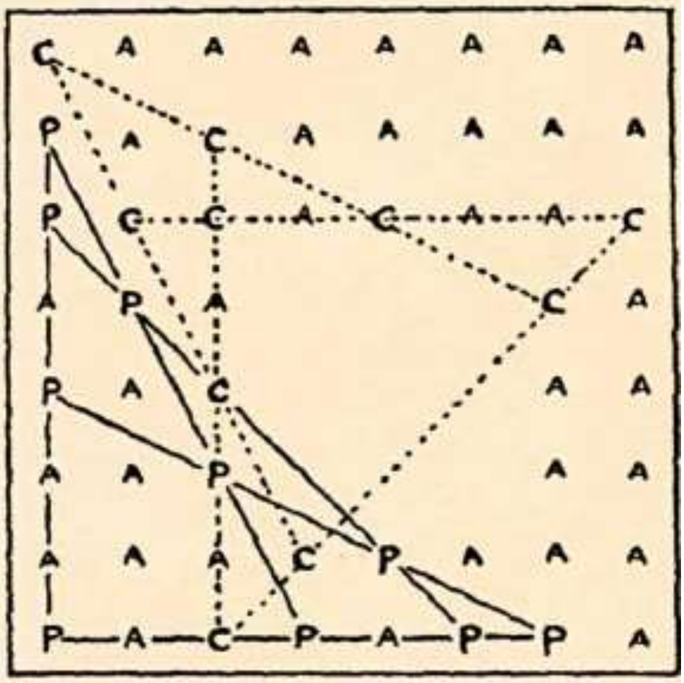


Решения

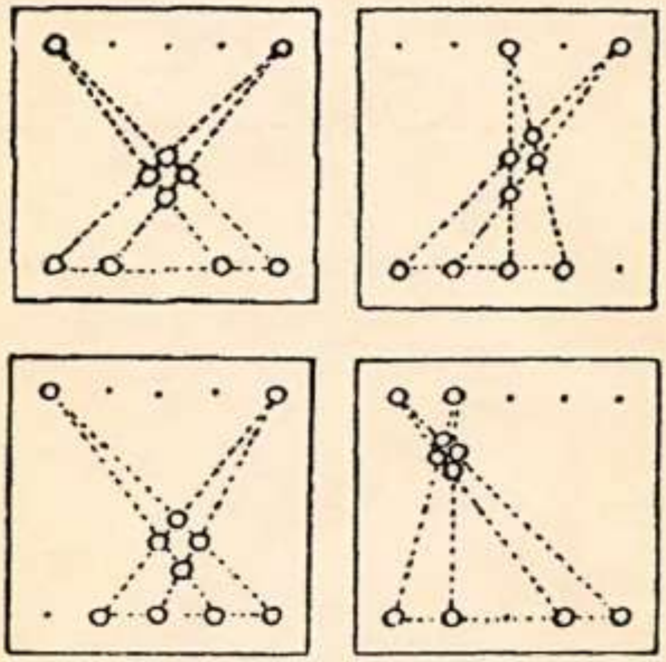
1. Существует множество способов построить замки так, чтобы они располагались в пять рядов по четыре замка в каждом. На рисунке показан единственный способ расположения замков, при котором крепостными стенами от нападения извне защищены два замка (это число является максимально возможным). Нетрудно видеть, что подобраться к этим замкам нельзя никак иначе, кроме как через крепостные стены.



2. Задачу можно было бы решить несколькими способами, если бы она не содержала условие, что число груш и лимонных деревьев на северной и восточной сторонах участка должно быть минимальным. Оптимальное расположение показано на рисунке. Лимонные деревья, груши и дубы обозначены буквами С, Р и А соответственно. Лимонные деревья соединены пунктиром, груши — сплошными линиями. Можно заметить, что лимонные деревья и груши высажены в пять рядов по четыре дерева. Это единственно возможное расположение, при котором на северной и восточной сторонах участка находится всего лишь по одному дереву. Это число и будет минимально возможным.



3. Существует ровно 2 400 вариантов. Можно выбрать три любые монеты с одной стороны и еще одну монету с другой. Ниже приведены четыре примера.

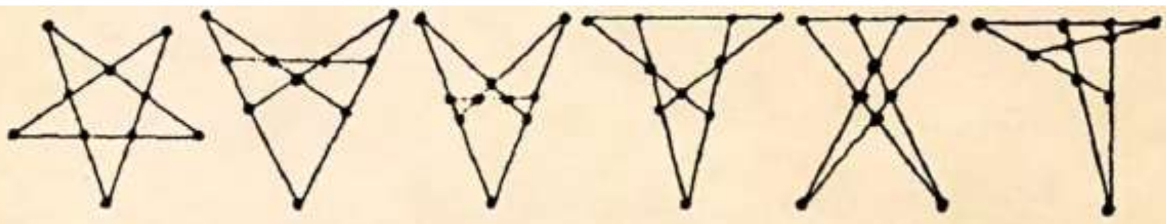


Три монеты из верхнего ряда можно выбрать десятью способами, одну монету из нижнего ряда — пятью способами. Таким образом, в сумме мы получим 50 способов. Но мы также можем выбрать три монеты из нижнего ряда и одну — из верхнего. Число способов в этом случае также будет равняться пятидесяти. Таким образом, существует 100 способов выбрать четыре монеты. Выбранные монеты можно расположить 24 способами — это число всех возможных перестановок четырех монет. Таким образом, общее число решений равно $24 \cdot 100 = 2\,400$ решений.

Во всех приведенных головоломках нужно расположить 10 точек в пять рядов по четыре точки в каждом. Рассмотрим общий случай подобных задач. Существует всего шесть основных решений, которые показаны на рисунках ниже. Из соображений удобства их называют «звезда», «дротик», «циркуль», «воронка», «ножницы» и «ключ». Читатель легко заметит, что любую из этих фигур можно искривлять бесконечным множеством способов, при этом принципиальное расположение точек не изменится.

В задаче «Король и его замки» архитектор привел решение «звезда», а король — решение «циркуль». В задаче «Лимоны и груши» лимонные деревья высажены в форме воронки, а груши — в форме дротика. Все решения головоломки «Десять монет» — это «ножницы». Итак, мы привели примеры для всех решений, кроме «ключа».

На неполной шахматной доске размером 7 × 7 клеток можно расположить 10 пешек тремя различными способами, но все они будут представлять собой «дротик». В задаче о грушевых и лимонных деревьях представлен еще один способ расположения пешек на такой доске, а поиск остальных решений мы оставляем читателям. На обычной шахматной доске размером 8 × 8 клеток пешки можно расположить в форме воронки, которая будет симметрична относительно диагонали доски. Наименьшая доска, на которой можно расположить фигуры в форме звезды, имеет размеры 9 × 7. «Ключ» потребует размеров доски 11 × 7, «ножницы» — 11 × 9, «циркуль» — 17 × 12. По крайней мере, это наилучшие результаты, которые мне удалось получить на скорую руку. Вероятно, их можно улучшить, но мне так не кажется.



Звезда Дротик Циркуль Воронка Ножницы Ключ

Узелок 9
Змея с углами

Все вода, вода повсюду,
А попить — и капли нет.

— Еще один камешек, и оно утонет!

— Хотел бы я знать, что это ты делаешь с ведерками?

Действующие лица: Хью и Ламберт. Место действия: пляж в Литтл-Мендип. Хью пускал маленькое ведерко плавать внутри другого, несколько бо́льших размеров, пытаясь определить, сколько камешков можно положить в первое ведерко, прежде чем оно потонет. Ламберт лежал на спине и предавался безделью.

Несколько минут Хью сидел молча, что-то обдумывая, а затем, вскочив на ноги, закричал:

— Ламберт, что я тебе сейчас покажу! Ни за что не догадаешься! Помнишь, что Бальбус говорил нам сегодня утром? Тело, полностью погруженное в воду, вытесняет количество жидкости, равное его объему. Верно? — спросил Хью.

— Что-то в этом роде Бальбус действительно говорил, — неуверенно согласился Ламберт.

— А теперь взгляни сюда! Видишь: маленькое ведерко почти полностью погружено в воду. Следовательно, оно должно вытеснять количество воды, равное своему объему. Я беру и — раз, два, три! — вынимаю его из большого ведерка.

С этими словами Хью вынул маленькое ведерко, а большое передал Ламберту.

▲ *Представим себе человека, стоящего во время прилива у самой воды с шестом в руках, частично погруженным в море.*

— Видишь? Воды в большом ведерке чуть-чуть на донышке. Неужели ты думаешь, что это ничтожное количество воды равно по объему маленькому ведерку?

— Оно должно быть равно, — сказал Ламберт.

— А вот и нет! — торжествующе воскликнул Хью и перелил воду из большого ведерка в маленькое. — Видишь: ведерко наполнилось меньше чем наполовину.

Бальбус уже ждал их, чтобы вместе идти к столу. Хью сразу же поведал ему о возникшем затруднении.

— Сначала поешь, потом поговорим, — сказал Бальбус. — Ты ведь знаешь старую поговорку: «Сначала — баранина, потом — механика».

Обед прошел в полной тишине. Когда со стола было убрано, Хью достал чернила, ручки и бумагу, и Бальбус приступил к формулировке задачи, которую он приготовил для дневных занятий.

— У одного моего друга был прекраснейший сад, хотя и небольших размеров...

— Каких именно? — спросил Хью.

— Именно это вы и должны будете определить, — весело ответил Бальбус. — Скажу лишь, что сад имел форму прямоугольника — был ровно на пол-ярда больше в длину, чем в ширину, и что посыпанная гравием дорожка шириной в 1 ярд, начинаясь в одном углу, шла вокруг всего сада. Концы дорожки не смыкались. Каждый раз, когда дорожке уже, казалось, не оставалось ничего другого, как сомкнуться, она поворачивала и вновь шла вокруг всего сада вдоль предыдущего отрезка и так до тех пор, пока в саду не осталось ни клочка земли.

— Дорожка извивалась, как змея с углами? — спросил Ламберт.

— Совершенно так же! И если пройти вдоль всей дорожки до последнего дюйма, держась ее середины, то длина пройденного пути окажется равной 21/8 мили. А пока вы найдете длину и ширину сада, я поразмыслю над тем, почему объем воды в большом ведерке оказался меньше объема маленького ведерка.

Предоставив мальчикам ломать голову над заданной задачей, Бальбус уединился у себя в комнате, чтобы поразмыслить над обнаруженным Хью механическим парадоксом.

— Для простоты предположим, — бормотал он, расхаживая взад и вперед по комнате, — что у нас имеется цилиндрический стеклянный сосуд, на поверхности которого через каждый дюйм нанесены метки, и мы заполним его водой до десятой метки. Условимся считать, что каждое деление на стенке сосуда соответствует одной пинте воды. Возьмем теперь сплошной цилиндр, каждый дюйм которого имеет объем в полпинты воды, и погрузим его на 4 дюйма в воду, налитую в первый цилиндр. Дно сплошного цилиндра достигнет отметки 6 дюймов на стенке первого цилиндра. При этом сплошной цилиндр вытеснит 2 пинты воды. Что станет с этими двумя пинтами? Если бы сплошной цилиндр не выступал над поверхностью воды, то эти две пинты преспокойно расположились бы сверху, заполнив наружный цилиндр до отметки 12 дюймов. Но сплошной цилиндр выступает над поверхностью воды, занимая половину объема, который мог бы вместиться между отметками 10 и 12 дюймов. Следовательно, оставшаяся часть пространства может вместить лишь одну пинту. А что же станется со второй? Если бы сплошной цилиндр не выступал над поверхностью воды, эта пинта преспокойно могла бы разместиться сверху, заполнив наружный цилиндр до отметки 13 дюймов. Но, к сожалению... О, тень великого Ньютона! — воскликнул Бальбус в ужасе. — Что же сможет остановить непрестанно поднимающийся уровень воды?

И тут его осенила блестящая идея.

— Напишу-ка я обо всем этом небольшой трактат.

Трактат, написанный Бальбусом

Известно, что тело, погруженное в жидкость, вытесняет часть жидкости, объем которой равен объему тела. При этом уровень жидкости поднимается ровно настолько, насколько он поднялся бы, если бы к уже имеющейся жидкости добавили количество жидкости, объем которого равен объему погруженного тела. Ларднер обнаружил, что частичное погружение тела сопровождается точно такими же явлениями.

Предположим, что на поверхности жидкости каким-либо образом удерживается частично погруженное в нее тело. Поскольку часть жидкости вытесняется, уровень ее поднимается. Вследствие повышения уровня жидкости какая-то новая часть тела оказывается погруженной, вытесняет новую порцию жидкости, что приводит к новому повышению уровня и т. д. Ясно, что весь этот процесс должен продолжаться до тех пор, пока в жидкость не погрузится все тело, после чего начнет погружаться то, что его удерживало (это нечто может рассматриваться как часть тела). Представим себе человека, стоящего во время прилива у самой воды с шестом в руках, который частично погружен в море. Человек этот стоит прямо и неподвижно, и мы все знаем, что он непременно утонет. Люди, во множестве погибающие таким образом, дабы удостовериться в философской истине, имеют большее право называться мучениками науки, чем Галилей или Кеплер.

— Должно быть, в мои рассуждения где-то вкралась ошибка, — сонно пробормотал Бальбус, вытягивая свои длинные ноги на софе. — Надо проверить их еще раз.

Решения

КУБЫ

Задача

В учебниках физики говорится, что тело, полностью погруженное в жидкость, вытесняет столько жидкости, что ее объем равен объему самого тела. Справедливо ли это утверждение для маленького ведерка, плавающего в другом ведерке несколько больших размеров?

Решение

Говоря о теле, «вытесняющем жидкость», авторы учебников имеют в виду, что оно «занимает пространство, которое можно заполнить жидкостью, не вызывая какихлибо изменений в окружающей среде». Если уничтожить ту часть меньшего ведерка, которая выступает над поверхностью воды в большем ведерке, а вместо остальной части ведерка взять столько воды, сколько оно вмещает, то уровень воды в большом ведерке в полном соответствии с учебниками физики останется неизменным.

ТРАКТАТ БАЛЬБУСА

Задача

Из рассуждений, приводимых в трактате Бальбуса, следует, что при погружении тела в сосуд с водой уровень воды последовательно поднимается на 2 дюйма, 1 дюйм, 1/2 дюйма и т. д. Бальбус считает бесконечным ряд, образуемый приращениями уровня, и делает вывод, что уровень воды должен неограниченно возрастать. Верно ли такое заключение?

Решение

Нет, неверно. Сумма всех приращений уровня никогда не достигнет 4 дюймов, ибо, сколько бы членов ряда мы не взяли, от отметки 4 дюйма нас будет отделять расстояние, равное последнему взятому члену ряда.

САД

Задача

Сад имеет форму прямоугольника, длина которого на 1/2 ярда больше ширины. Дорожка шириной в 1 ярд и длиной в 3630 ярдов, усыпанная гравием и закрученная спиралью, заполняет сад. Найти длину и ширину сада.

Ответ
Ширина сада 60 ярдов,
длина — 60 1/2 ярда.

Решение
Разделим дорожку на прямые участки и повороты — квадраты размером 1×1 ярд в углах. Число полных ярдов и их долей, пройденных вдоль прямых участков дорожки, очевидно, равно площади прямых участков дорожки, измеряемой в квадратных ярдах. Расстояние, проходимое на каждом повороте, равно 1 ярду, а площадь уголка также равна 1 ярду (но уже квадратному). Таким образом, площадь сада равна 3630 квадратным ярдам. Если x — ширина сада в ярдах, то $x(x + 1/2) = 3630$. Решая это квадратное уравнение, получаем $x = 60$. Следовательно, ширина сада равна 60 ярдам, а его длина — 60 1/2 ярда.

1. Цепочка для часов дяди Сэма

▲ *Сколько разных цепочек можно составить из пяти звеньев?*

На днях мне показали любопытную цепочку для часов, сделанную, по старому обычаю, из монет. Эта цепочка состояла из четырех соединенных между собой монет и фигурки орла. В монетах, как показано на рисунке, было проделано пять, четыре, три и два отверстия соответственно, так, что соединяющие их звенья могли располагаться различными способами.

Эта особенность породила спор о возможном числе вариантов, которыми можно расположить четыре монеты и фигурку орла на цепочке. Как вы считаете, сколько таких вариантов?

2. Три невесты

Один старый скупец, чтобы привлечь потенциальных женихов для трех своих дочерей, объявил, что даст каждой в приданое столько золота, сколько она весит. Все свадьбы сыграли в одни день, и перед взвешиванием невесты съели по огромному торту, что немало обрадовало их женихов.

Все невесты вместе весили 396 фунтов, Нелли весила на 10 фунтов больше, чем Китти, а Минни — на 10 фунтов больше, чем Нелли. Один из женихов, Джон Браун, весил столько же, сколько и его невеста, Уильям Джонс — в полтора раза больше своей невесты, а Чарльз Робинсон — в два раза больше, чем его невеста. Все женихи и невесты в сумме весили 1000 фунтов. Какие фамилии будут носить девушки после замужества?

3. Самая справедливая игра на пляже

На днях я с другом совершал прогулку по Кони-Айленду, и мы увидели павильон, где, как утверждал его владелец, находилась самая справедливая игра на пляже. Нужно было сбить десять кукол бейсбольным мячом. Владелец аттракциона сказал: «Бросайте столько раз, сколько захотите, каждый бросок стоит один цент, бросать можно с любого расстояния. Сложите числа на сбитых куклах, и, как только сумма станет равной 50, вы выигрываете сигару с позолоченным кольцом ценой в 25 центов».

У нас закончились деньги, но мы так и не смогли выиграть. Мы заметили, что никто поблизости не курил призовых сигар. Сможете сказать, как набрать ровно 50 очков в этой игре?

4. Множество морских змей

В этом году морских змей расплодилось как никогда много, и на морских курортах стали замечать змей, которые там раньше не водились. Моряки рассказывали страшные истории, которые были весьма оригинальны, несмотря на старинный сюжет.

С изобретением фотографии, однако, рассказы старых моряков и судовые журналы, подлинность которых была подтверждена, перестали удовлетворять публику, которая требовала подлинных кадров.

Один капитан утверждал, что, пока его корабль лежал в дрейфе близ Кони-Айленда, его окружило множество морских змей, и большинство из них были слепыми.

«Три змеи ничего не видели по правому борту, — рассказывал он, — три ничего не видели по левому борту. Три

▲ *Каким будет число коз и овец?*

Решения

1. Математики и любители головоломок, которым доставляет удовольствие решение задач с перестановками, подсчитали, что можно составить 92 160 разных цепочек из четырех монет и подвески в форме орла. Очевидно, что большую монету можно подвесить за любое из пяти отверстий, и повернуть одной из двух сторон. Следовательно, всего допустимо 10 вариантов. Вторую монету можно расположить 8 способами, поэтому только из двух этих монет можно составить 80 различных сочетаний. Если умножить это число на 6 возможных положений третьей монеты, 4 варианта для последней монеты и 2 варианта, которыми можно расположить фигурку орла, получим, что если располагать все монеты именно в таком порядке, то общее число вариантов будет равно 3840. Так как число перестановок монет равно 24, то ответом к задаче будет 3 840 вариантов, умноженные на 24, то есть 92 160.

положений третьей монеты, 4 варианта для последней монеты и 2 варианта, которыми можно расположить фигурку орла, получим, что если располагать все монеты именно в таком порядке, то общее число вариантов будет равно 3840. Так как число перестановок монет равно 24, то ответом к задаче будет 3 840 вариантов, умноженные на 24, то есть 92 160.

2. После замужества невесты будут носить фамилии Китти Браун, Нелли Джонс и Минни Робинсон. Китти весила 122 фунта, Нелли — 132, Минни — 142.

3. 50 очков можно набрать, если сбить куклы за 25, 6 и 19 очков.

4. Всего было три полностью слепые и три полностью зрячие змеи.

5. Многие крестьяне, подобно нашим читателям, провели немало времени перед зеркалом, перебирая различные варианты, пока не нашли верный ответ: 9 овец и 9 коз. Произведение этих чисел, 81, отраженное в зеркале, даст 18 — общую численность стада.

1. Великая монада

Это древний и достойный внимания символ. Он изображен на флаге Южной Кореи, а Северная тихоокеанская железнодорожная компания использовала его в качестве эмблемы. Немногие знают, что он носит название великой монады. Этот знак для китайцев означает то же, что крест для христиан. Это символ божественного и вечного, а две его части, инь и ян, символизируют мужское и женское начала. Говорят, что более трех тысяч лет назад один ученый заметил: «Безграничное порождает крайность. Крайность порождает два начала. Два начала производят четыре четверти, а от четырех четвертей происходит квадратура восьми диаграмм феу-хи». Надеюсь, что читатель не потребует объяснений, поскольку я не имею ни малейшего представления о том, что это значит. Однако я убежден, что на протяжении веков этот символ имел оккультное значение.

Я представляю вашему вниманию простейшую монаду. Ответьте на три вопроса об этом великом символе.

I. Площадь какой фигуры больше — внутреннего круга, содержащего инь и ян, или внешнего кольца?

II. Разделите инь и ян на четыре части одинаковой формы и площади одним разрезом.

III. Разделите инь и ян на четыре части равной площади, но различной формы одним прямым разрезом.

2. Рождественский пирог

— Раз уж мы заговорили о рождественских пирогах, — сказал гостеприимный хозяин, поглядывая на внушительную банку варенья на противоположном краю стола, — я припоминаю, что один мой друг как-то загадал мне задачу о пироге. Вот она, — добавил он, покопавшись в кармане.

— Цель задачи — определить начинку, я полагаю, — сказал студент Итона.

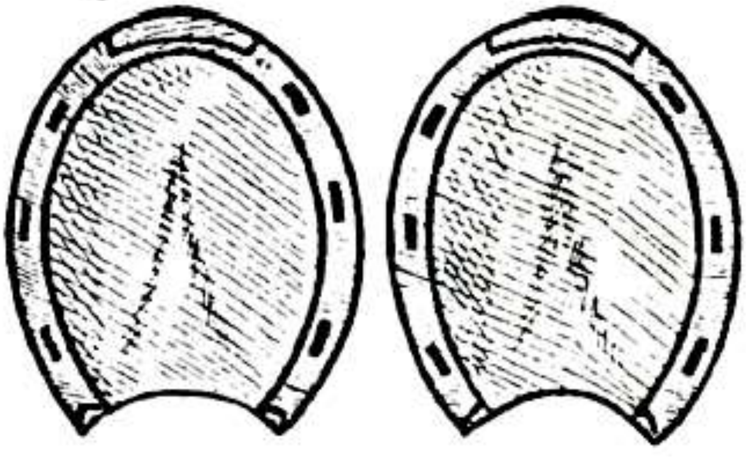
— Нет, начинку вы определите, когда попробуете пирог. Сейчас я прочитаю условие задачи. «Разрезать пирог на две части одинаковой формы и размера, не трогая чернослив. Пирог следует считать плоским диском, а не шаром».

— Почему рождественский пирог нужно считать диском? И зачем может понадобиться разрезать его столь точно? — спросил озадаченный гость.

— Это всего лишь головоломка. Гости один за другим пытались справиться с задачей, но никому не удалось найти решение. Задачу непросто решить, если не знать секрет приготовления пирога. Если же он вам известен, задача не представит для вас никаких трудностей.

3. Две подковы

По какой-то никому не известной причине считается, что подковы приносят удачу. Это очень старое суеверие. Еще Джон Обри (1626—1700) писал: «В большинстве домов лондонского Вест-Энда над дверью висит подкова». В домах на улице Монмут в 1813 году висело 17 подков, в 1855-м — на 13 больше. Даже лорд Нельсон приказал прибить подкову на мачту своего корабля «Виктори». Сегодня считается, что подковы приносят удачу, если они крепко прибиты к копытам лошади, везущей наш экипаж.



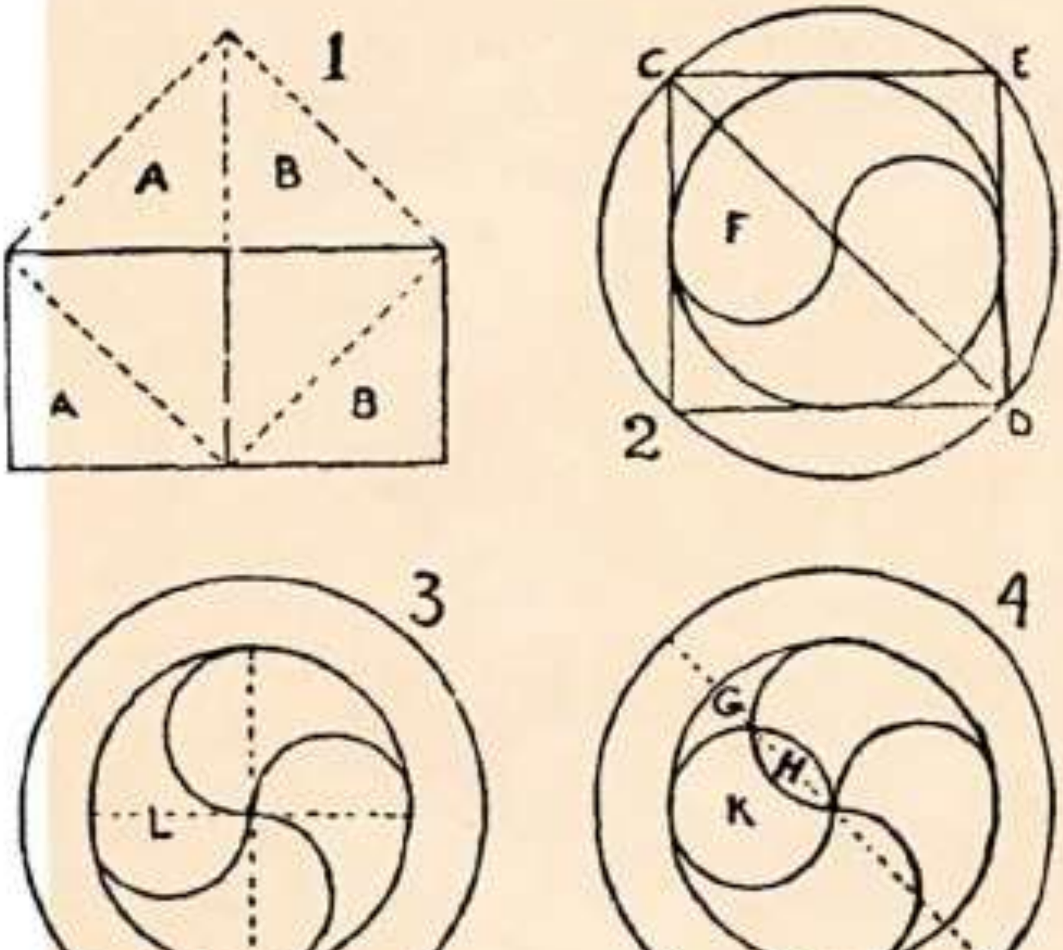
Подкова, подобно свастике и другим символам, которые я изучал, означала здоровье, благополучие, добрую волю и даже была символом человеческого рода, поэтому она представляет немалый интерес. Неужели подкова не обладает загадочными эзотерическими или математическими свойствами? Я изучил этот вопрос и решил обратить внимание моих читателей на примечательный факт: две подковы, изображенные на рисунке, удивительным образом связаны с окружностью, символом вечности.

Я представлю простую задачу, чтобы вы оценили, сколь трудно обнаружить эту связь, которая оставалась сокрытой на протяжении веков. Я знаю, что моим читателям доставляет удовольствие разгадывать загадки.

Нужно разрезать две подковы на четыре части разной формы и составить из них идеальную окружность. Каждую подкову нужно разрезать на две части, а внутренняя часть подковы должна располагаться внутри получившейся окружности.

Решения

1. Площади кругов относятся друг к другу как квадраты их диаметров. Если один круг имеет диаметр 2 дюйма, второй — 4 дюйма, то площадь одного круга будет в четыре раза больше площади другого, поскольку квадрат числа 4 в четыре раза больше, чем квадрат числа 2.



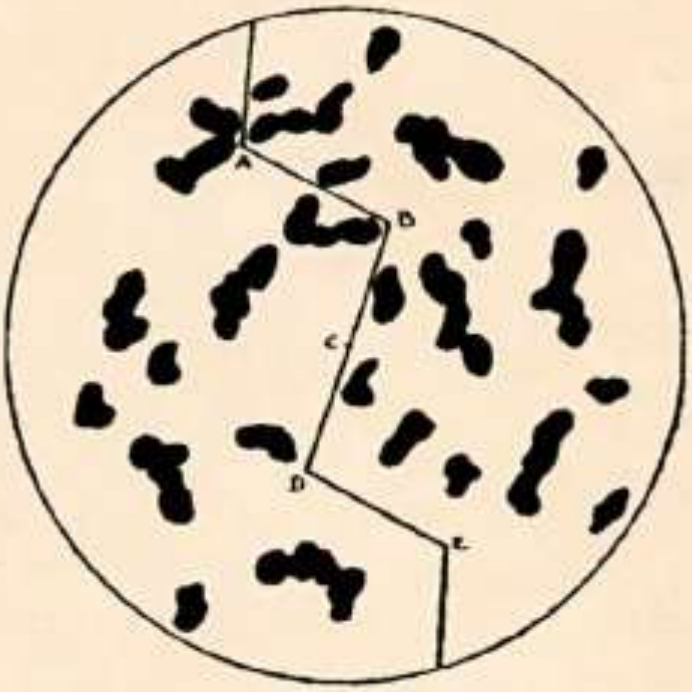
I. Если мы посмотрим на рисунок 1, то увидим, что два равных квадрата можно разделить на четыре части, образующие большой квадрат. Отсюда следует, что площадь квадрата в два раза меньше квадрата его диагонали. На рисунке 2 изображен квадрат, так как он часто встречается на древних изображениях монады. Это дало мне основания полагать, что этот символ имеет математическое значение. Оказалось, что площадь внешнего кольца точно равна площади внутреннего круга. Сравнив рисунок 2 с рисунком 1, мы увидим, что квадрат диаметра CD в два раза больше квадрата диаметра CE внутренней окружности. Следовательно, площадь большого круга в два раза больше площади малого, и это означает, что площадь внешнего кольца точно равна площади внутреннего круга. Таков ответ на первый вопрос задачи.

II. На рисунке 3 представлено простое решение второй части задачи. Очевидно, что оно верно, и его можно доказать, разрезав фигуру и наложив ее части друг на друга. Увидеть это вам помогут пунктирные линии, изображенные на рисунке.

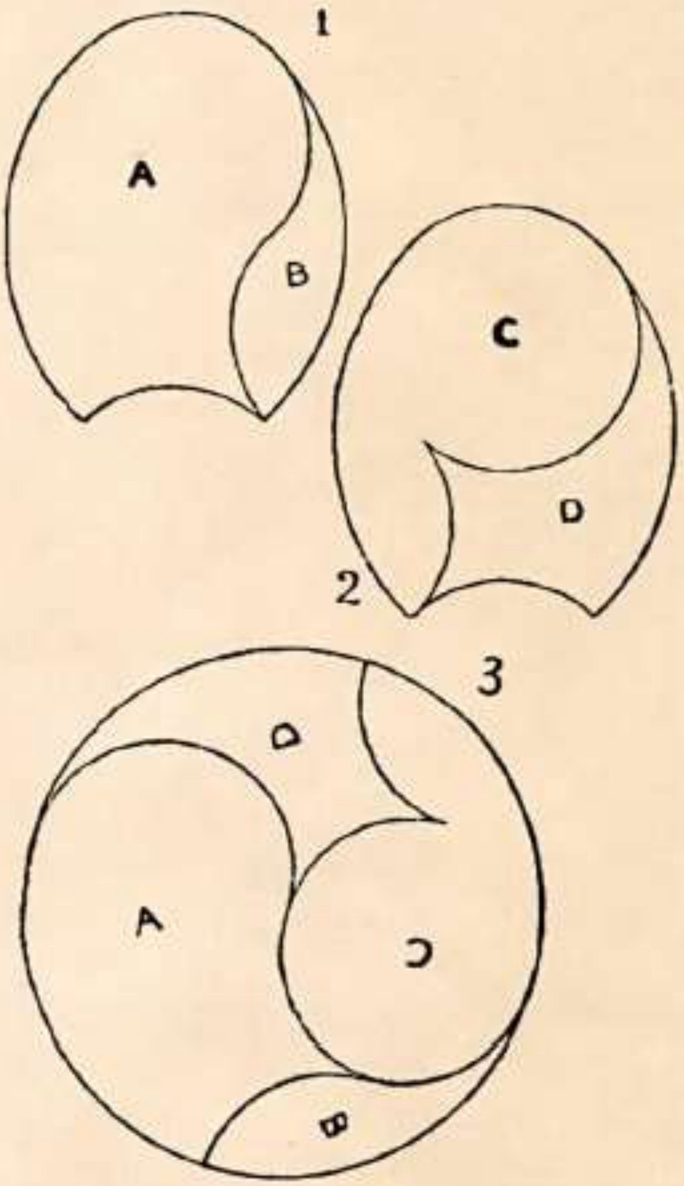
III. Третья часть задачи решается разрезом по линии CD, изображенной на рисунке 2, но нужно доказать, что площадь фигуры F на самом деле в два раза меньше площади инь или ян. Доказательство представлено на рисунке 4. Площадь круга K в четыре раза меньше площади круга, содержащего инь и ян, так как диаметры этих кругов отличаются в два раза. Кроме того, площадь фигуры L, изображенной на рисунке 3, в четыре раза меньше площади круга. Очевидно, что площади G и H равны, следовательно, площади их половин также равны. F «теряет» часть фигуры K, но «приобретает» часть фигуры L точно такой же площади. Следовательно, площадь фигуры F равна половине площади инь или ян.

2. На рисунке показано, как можно разрезать пирог на две части одинаковой формы и площади.

Линии обязательно должны проходить через точки A, B, C, D и E. Существует бесконечное множество вариантов, удовлетворяющих этому условию. Например, в точке, расположенной строго между точкой A и краем круга, линию разреза можно провести бесконечным множеством способов (причем эта линия может быть как прямой, так и кривой) при условии, что линия, соединяющая точку E с противоположным краем круга, будет зеркальным отражением этой линии. Аналогично можно изменять форму линии и в других местах.



3. Суть задачи в том, чтобы разрезать две подковы (включая их внутреннюю часть) на четыре части, то есть каждую подкову — на две части так, чтобы получилась идеальная окружность. Также указано, что четыре части могут быть разного размера. В действительности при решении этой задачи используется принцип, известный нам по китайскому символу монаде (см. задачу 1).



На рисунке изображено решение задачи. На рисунках 1 и 2 вы видите подковы, разрезанные на четыре части разной формы, из которых можно составить идеальную окружность, изображенную на рисунке 3. Заметьте, что части A и B одной подковы и части C и D другой подковы образуют две равные половины окружности, инь и ян великой монады. Обратите внимание, что составить подкову из частей круга проще, чем составить круг из двух подков. Однако задача не представляет особой трудности, если знать, что длинная сторона подковы должна образовывать часть границы круга. Обратите внимание на разницу между B и D — она поможет вам решить многие подобные задачи. Фигура D получается из фигуры B добавлением симметричной фигуры — криволинейного квадрата. Следовательно, чтобы составить из этих элементов окружность, нужно повернуть B и D на четверть оборота в разные стороны.

Узелок 10
Пирожки (часть первая)

Пирожки, пирожки, горячие пирожки!

— Ох, как грустно! — воскликнула Клара, и глаза ее наполнились слезами.

— Грустно, но с точки зрения арифметики весьма любопытно, — последовал менее романтический ответ ее тетушки. — Одни из них потеряли на службе родине руку, другие — ногу, третьи — ухо, четвертые — глаз...

— А некоторые лишились всего сразу... — задумчиво прошептала Клара, когда они с тетушкой проходили мимо длинных рядов нежившихся на солнце загорелых и обветренных ветеранов. — Тетя, вы видите того старика с красным лицом? Он что-то чертит на песке своей деревянной ногой, а остальные внимательно его слушают. Должно быть, он чертит схему какого-нибудь сражения...

— Сражения при Трафальгаре! Ясно, как дважды два — четыре! — тотчас же перебила Клару тетушка.

— Вряд ли, — робко возразила племянница. — Если бы он принимал участие в сражении при Трафальгаре, его бы давно уже не было в живых.

— Не было бы в живых! — презрительно повторила тетушка. — Да он живее нас с тобой, вместе взятых! По-твоему, рисовать на песке да еще деревянной ногой не значит быть в живых? Хотела бы я знать, что тогда по-твоему означает быть в живых!

Клара растерянно промолчала: она никогда не была особенно сильна в логике.

— Вернемся-ка мы лучше к арифметике, — продолжала Безумная Математильда. Эксцентричная старая леди не упускала случая подбросить своей племяннице какую-нибудь задачку. — Как ты думаешь, какая часть ветеранов потеряла и ногу, и руку, и глаз, и ухо?

— Я... я не знаю. Откуда я могу знать? — с трудом произнесла оробевшая девочка: кому-кому, а ей хорошо было известно, что последует дальше.

— Разумеется, без необходимых исходных данных ты ничего узнать не сможешь, но я сейчас дам тебе...

— Дайте ей пирожок, миссис! Только у нас в Челси умеют печь такие пирожки. Девочки их очень любят, — раздался вдруг приятный голос, и разносчик пирожков, проворно приподняв край белоснежной салфетки, показал аккуратно уложенные в корзине пирожки, выглядевшие весьма соблазнительно. Пирожки были квадратной формы, щедро смазаны яйцом, румяны и блестели на солнце.

— Нет, сэр! Я не имею обыкновения давать своей племяннице такую гадость. Убирайтесь прочь! — и старая леди угрожающе взмахнула зонтиком. На добродушного разносчика эта гневная тирада, казалось, не произвела ни малейшего впечатления. Прикрыв пирожки салфеткой, он удалился напевая.

— Пирожки эти — просто яд! — сказала старая леди. — То ли дело арифметика. Уж она-то всегда полезна!

Клара, вздохнув, проводила голодным взглядом быстро уменьшавшуюся вдали корзину с пирожками и стала послушно внимать своей неутомимой тетушке, которая тут же начала излагать условие задачи, производя все вспомогательные подсчеты на пальцах.

— Скажем, так: 70 % ветеранов лишились глаза, 75 — уха, 80 — руки и 85 — ноги. Просто великолепно! Спрашивается, чему равна наименьшая часть ветеранов, лишившихся одновременно глаза, уха, руки и ноги?

Больше ни тетушка, ни племянница не произнесли ни слова, если не считать восклицания «Пирожки!», вырвавшегося у Клары, когда разносчик со своей корзиной скрылся за углом. В полном молчании обе леди — преклонных лет и юная — дошли до старинного особняка, в котором остановился вместе с тремя сыновьями и их почтенным наставником отец Клары.

► *Клара, вздохнув, проводила голодным взглядом быстро уменьшавшуюся вдали корзину с пирожками.*

Бальбус, Хью и Ламберт опередили тетушку и племянницу лишь на несколько минут. Они вернулись с прогулки, во время которой Хью умудрился задать головоломку, не только безнадежно испортившую настроение Ламберту, но и поставившую в тупик самого Бальбуса.

— Если я не ошибаюсь, четверг наступает после среды ровно в полночь? — начал Хью.

— Иногда наступает, — осторожно заметил Бальбус.

— Не иногда, а всегда! — решительно заявил Ламберт.

— Иногда, — мягко настаивал Бальбус. — В шести случаях из семи в полночь наступает не четверг, а какой-нибудь другой день недели.

— Я хочу лишь сказать, — пояснил Хью, — что когда вслед за средой наступает четверг, то происходит это в полночь и только в полночь.

▲ *— Мне кажется, — задумчиво проговорил Бальбус, — что такое место действительно существует, хотя мне и не приходилось слышать о нем раньше.*

формулировали ее иначе. Моряки уходят в кругосветное плавание, огибают земной шар с востока на запад, возвращаются домой и тут обнаруживают, что у них пропал один день. Им кажется, что они вернулись домой в среду, а все вокруг говорят, что это четверг, и все потому, что у тех, кто оставались дома, полночь наступала на один раз больше, чем у тех, кто находились в плавании. А если бы моряки плыли с запада на восток, то один день у них оказался бы лишним.

— Все это мне известно, — возразил Хью в ответ на несколько сумбурное объяснение Ламберта, — но к делу не относится. Ведь сутки для корабля имеют неодинаковую продолжительность. Когда корабль плывет в одну сторону, сутки на нем продолжаются более 24 часов, когда же он плывет в другую сторону — менее 24 часов. Отсюда и происходит путаница с днями недели: ведь у людей, живущих на суше на одном и том же месте, сутки длятся ровно 24 часа.

— Мне кажется, — задумчиво проговорил Бальбус, — что место, о котором говорит Хью, на земном шаре действительно существует, хотя мне и не приходилось слышать о нем раньше. Людям, живущим там, должно быть странным видеть вчерашний день к востоку от себя, а завтрашний — к западу. Особенно трудно понять, что происходит, когда наступает полночь: ведь в этом странном месте на смену «сегодня» приходит не «завтра», а «вчера». Тут есть над чем задуматься!

О том, как подействовал этот обмен мнениями на наших друзей, мы уже говорили: входя в дом, Бальбус усиленно размышлял над головоломкой, а Ламберт был погружен в мрачное раздумье.

Решения

ИНВАЛИДЫ ИЗ ЧЕЛСИ

Задача

70 процентов инвалидов потеряли глаз, 75 процентов — ухо, 80 процентов — руку и 85 процентов — ногу. Каков наименьший процент ветеранов, лишившихся одновременно глаза, уха, руки и ноги?

Ответ

10 процентов.

Решение

Предположим, что инвалидов ровно 100 человек. Общее число всех увечий равно 70 + 75 + 80 + 85 = 310. Следовательно, на каждого инвалида приходится по 3 увечья, а десятерым особенно не повезло: они получили все 4 увечья. Таким образом, наименьшая доля инвалидов, лишившихся глаза, уха, руки и ноги, равна 10 процентам.

СМЕНА ДАТ

Задача

Решение географической задачи — о смене дат — я вынужден отложить на неопределенный срок отчасти потому, что не знаю, как ее решить.

▲*Кто из игроков должен заплатить за игру?*

1. Игра с кубиками на ярмарке

Эта игра с кубиками очень популярна на ярмарках и гуляниях, но два игрока редко сходятся во мнениях относительно того, какова же здесь вероятность выигрыша. Чтобы определить ее, достаточно решить несложную задачу по теории вероятностей. На игровой доске нарисованы шесть квадратов, обозначенных числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Игроки могут поставить любую сумму на любое число. Далее нужно бросить три кубика. Если выбранное игроком число выпало только на одном кубике, игрок забирает ставку плюс получает выигрыш, равный сумме ставки. Если выбранное число выпало на двух кубиках, игроку возвращается его ставка плюс удвоенная ее сумма. Если число выпало на трех кубиках, игроку возвращается его ставка плюс утроенная ее сумма. Разумеется, если выбранное число не выпало ни на одном кубике, игрок теряет деньги.

Чтобы вы лучше поняли правила игры, рассмотрим пример. Допустим, вы поставили доллар на число 6. Если на одном кубике выпало 6, вам возвращается доллар и вы получаете еще доллар сверху. Если 6 выпало на двух кубиках, вам возвращается доллар и вы получаете еще два доллара сверху. Если 6 выпало на трех кубиках, вам возвращается доллар и вы получаете еще три доллара сверху.

Любой игрок может сказать: вероятность того, что мое число выпадет на одном кубике, равна 1/6, но так как кубиков три, то вероятность равна 3/6, или 1/2, поэтому игра честная. Разумеется, организатор игры хочет, чтобы вы думали именно так, но эти рассуждения ошибочны.

Кто же имеет преимущество — игрок или банк? Каково преимущество одной из сторон в каждом случае?

2. Великая головоломка об американском бильярде

Трое мужчин начали игру в американский бильярд с 15 шарами и, по обычаю, условились, что за игру платит проигравший. Игрок № 1 был мастером и согласился сыграть против двух других игроков, № 2 и 3. Ему нужно было загнать в лузу столько шаров, сколько двум его противникам, вместе взятым. Игроки уже собирались начать, когда к ним присоединился четвертый. Он был им незнаком, поэтому ему не дали никакой форы: он должен был играть наравне с остальными тремя игроками. На рисунке показано, сколько шаров забил каждый игрок в этой партии. Возник спор о том, кто же проиграл.

Суть задачи — определить, кто из игроков должен заплатить за игру согласно условиям, оговоренным выше. Задача не столь проста, как может показаться. Не нашлось даже двух игроков, которые бы сошлись во мнениях. Кто из игроков должен заплатить и почему?

3. Скачки в стране головоломок

Чтобы показать, что лишь немногим увлеченным любителям скачек знакома теория вероятностей, предложим следующую, очень простую задачу.

Если ставки на победу принимаются два к одному против гиппопотама, три к двум против носорога, то каковы будут ставки на победу жирафа на скачках в Стране головоломок?

▼ *Каковы ставки на победу жирафа?*

Приведу еще одну головоломку с теми же героями.

Если жираф опережает носорога на одну восьмую мили в скачках на две мили, а носорог опережает гиппопотама на четверть мили в тех же скачках, на сколько жираф опередит гиппопотама в скачках на две мили?

4. Система лорда Росслина

Недавние новости о том, что некто выиграл 777 777 франков в казино Монте-Карло, заставили меня вспомнить о системе лорда Росслина, которая была очень популярна несколько лет назад.

Не вдаваясь в технические аспекты игры в рулетку, в которую играют в казино Монте-Карло, условимся, что система лорда Росслина основана на ставках, кратных числу 7, и попросим читателя решить следующую задачу. Допустим, что игрок (который ставит только на красное или черное, при этом вероятность выигрыша и проигрыша одинакова) ставит один франк семь раз подряд. Затем, вне зависимости от общего выигрыша или проигрыша, он повышает ставку до 7 франков и снова играет 7 раз. Далее он ставит 49 франков 7 раз, затем — 343 франка 7 раз, затем — 2 401 франк 7 раз, после чего 16 807 франков семь раз, затем 117 649 франков семь раз. Если, сыграв 49 раз, он выиграл 777 777 франков, сколько раз из этих 49 он выиграл? Задача проста, но тем не менее представляет интерес как математическое объяснение «успешной системы Росслина».

Если вам не удастся сразу получить точно 777 777 франков, проведите несколько экспериментов, и вы увидите, что это не столь математическая задача, как может показаться.

Решения

1. Из 216 равновероятных исходов, возможных при броске трех кубиков, вы выигрываете в 91 случае и проигрываете в 125. Вероятность выиграть столько, сколько вы поставили, или более, равна 91/216 (вероятность выиграть столько, сколько вы поставили, равна 100/216), а вероятность проигрыша — 125/216. Если бы на кубиках всегда выпадали разные цифры, игра была бы честной.

Допустим, что на каждое число было поставлено по 1 доллару. При каждом броске, когда выпадает три разных числа, банк выигрывает три доллара и платит победителям еще три. Однако, если выпадает два одинаковых числа, чистый выигрыш банка равен 1 доллару, если выпадает 3 одинаковых числа, банк выигрывает 2 доллара. В целом, игрок в среднем теряет 7,87 цента на каждый поставленный доллар вне зависимости от сумм ставок и исхода игры. Это дает банку преимущество в 7,87 % на каждый поставленный доллар.

2. Лучший игрок (№ 1) утверждает, что он не проиграл, так как он обыграл игрока № 4. Однако № 4, который обыграл № 3, сказал, что он также не проиграл, а № 3 заявил, что он, играя в команде с № 2, обыграл № 1, следовательно, по договоренности, он не может считаться проигравшим.

Различные аргументы, приводимые сторонами, только осложняли дело. Так как правила не касались игрока № 4 и он не был связан какими-то договоренностями, то он надел шляпу и плащ и отправился домой. Тогда игроку № 1 пришлось отвечать по своим обязательствам. Так как он забил 5 шаров, а его оппоненты — 6, то за игру пришлось заплатить именно игроку № 1.

Однако существует еще одна точка зрения, которая меняет решение задачи. Игроки № 3 и 2 играли против игрока № 1 по особым правилам, но так как № 1 обыграл № 4, то он свободен от какой бы то ни было ответственности. Так как игроки № 2, 3 и 4 играли на равных, без каких-либо особых договоренностей, то проиграл игрок № 3.

(Очевидно, сложность задачи заключается в различии формулировок, поэтому на нее нельзя дать четкий ответ. Когда в игру вошел четвертый человек, игрокам следовало прийти к соглашению относительно того, кто будет считаться проигравшим. Так как они этого не сделали, то однозначно определить проигравшего нельзя. В любом случае, задача Лойда допускает достаточно интересные решения.)

3. Если мы представим вероятности в виде дробей, то получим, что вероятность победы гиппопотама равна 1/3, носорога — 2/5. Так как сумма трех вероятностей должна быть равна 1, вероятность выигрыша жирафа равна 4/15, то есть ставки на него будут приниматься в расчете 11 к 4.

Ответ на второй вопрос таков: жираф опередит гиппопотама на 23/64 мили. Допустим, что жираф пробегает 2 мили за 1 час. За это же время носорог пробежит 1 и 7/8 мили, то есть на 2 мили носорог потратит 16/15 часа. За то же время, что носорог пробежит 2 мили, гиппопотам пробежит 1 3/4 мили. Иными словами, он пробежит 105/64 мили за час. Так как 2 мили — это 128/64 мили, нужно всего лишь вычесть из этого числа 105/64, чтобы получить ответ. Разумеется, ответ будет тем же самым вне зависимости от выбранной скорости жирафа.

4. Существуют одно или два различных решения, но в их основе лежит один и тот же принцип.

Игрок проигрывает 7 ставок по 1 франку, затем проигрывает 3 ставки по 7 франков и выигрывает 4, что уравнивает его выигрыши и проигрыши. Затем он выигрывает 2 раза по 49, 5 раз, проигрывает эту же сумму, потом выигрывает 7 раз по 343. Далее он 3 раза проигрывает 2401 и выигрывает 4 раза, после чего 2 раза выигрывает по 16 807 и проигрывает 5 раз, и, наконец, выигрывает 7 раз последнюю ставку, 117 649 франков. Итого игрок выиграл 869 288 франков и проиграл 91 511 франков. Таким образом, чистый выигрыш составит 777 777 франков.