МАТЕМАТИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

В ПОМОЩЬ ПОВТОРЯЮЩИМ МАТЕМАТИКУ ПО СПРАВОЧНИКАМ

Тема 10. ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Содержание

1. Функции и их графики
2. Приёмы, облегчающие построению графиков функций
3. Нахождение площадей фигур, ограниченных линиями
4. Исследование и решение уравнений первой степени с параметрами
5. Исследование и решение систем уравнений первой степени с параметрами.
6. Решение неравенств первой степени с параметрами

Функции и их графики

1. Найти абсциссы точки пересечения графиков функций с осью Ox:

1) $y = x + 7$; 3) $y = 2x - 1$; 5) $y = -\frac{1}{5}x - 1$;

2) $y = x - 2$; 4) $y = \frac{1}{2}x + 1$; 6) $y = -2x + 1$.

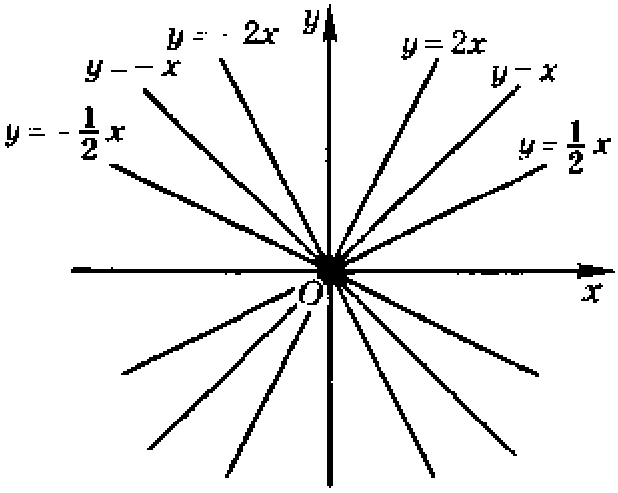
2. Найти ординаты точек пересечения графиков функций с осью Oy:

1) $y = x + 3$; 3) $y = 3x + 5$; 5) $y = -\frac{1}{3}x + 1$;

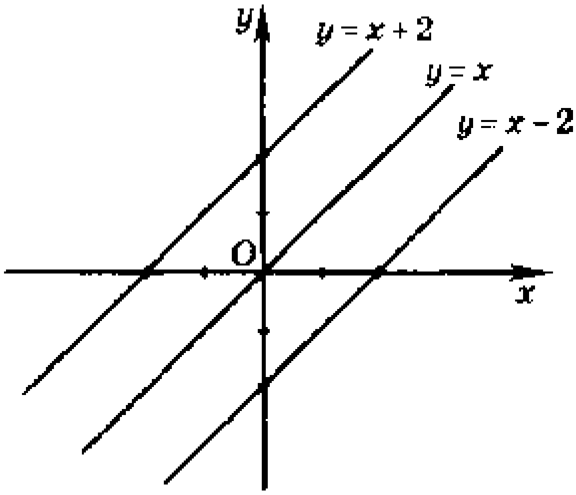
2) $y = x - 1$; 4) $y = -2x - 1$; 6) $y = -4x + 1$.

Справочный отдел

Функции и графики $y = f(x)$

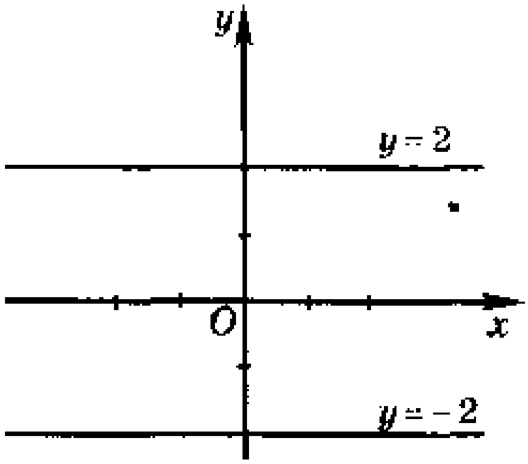


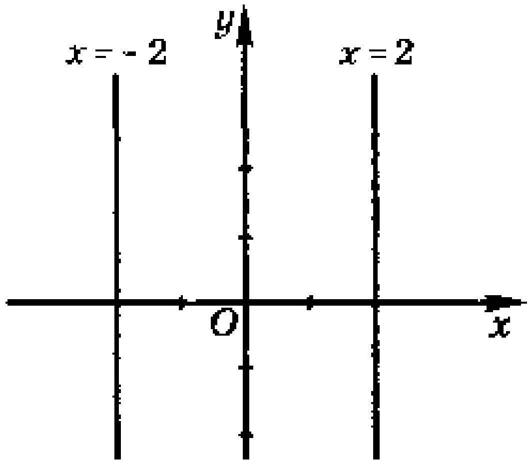
Прямая пропорциональность
$y = kx$



Линейная зависимость
$y = kx + b$

абсциссы – значения x
ординаты — значения y





3. Найти a, если известно, что график функции проходит через точку A (2; 5):

1) $y = ax - 1$;
2) $y = -ax + 4$;
3) $y = \frac{1}{3}x + a$;
4) $y = -\frac{1}{2}x - 4a$.

4. График функции $y = ax + b$ проходит через точки A (1; 4) и B (2; −3). Найти a и b.

Функция $y = ax^2$ и ее график

5. Решить уравнение графически:

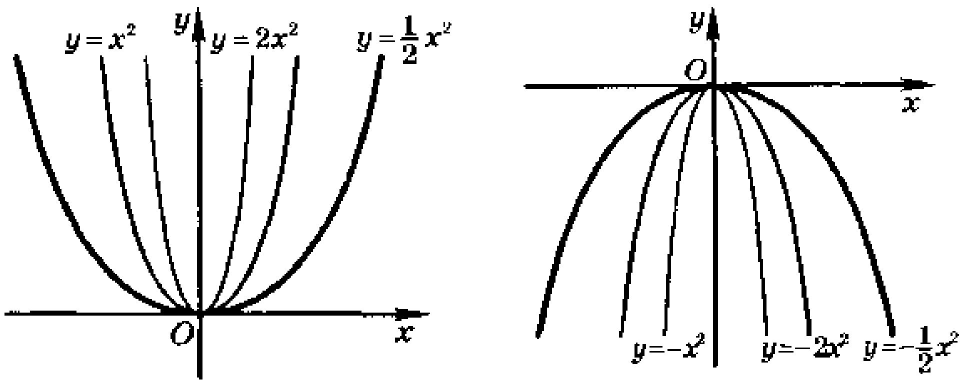
1) $x^2 = 4$;
2) $x^2 - 9 = 0$;
3) $x^2 - x = 0$;
4) $x^2 + x = 0$;
5) $x^2 + 2 = 0$;
6) $x^2 = x + 2$.

6. Найти абсциссы точек пересечения графика с осью Ox:

1) $y = x^2 - 1$;
2) $y = -x^2 + 4$;
3) $y = 2x^2 - 8$;
4) $y = -3x^2 + 27$.

Справочный отдел

$y = ax^2$ — парабола



Свойства графиков:

1. Проходят через точку с координатами (0; 0).
2. $a > 0$. Ветви параболы направлены вверх.
3. $a < 0$. Ветви направлены вниз.
4. Чем больше модуль числа a, тем уже ветви параболы.
5. Функция $y = ax^2$ четная и графики симметричны относительно оси Oy.

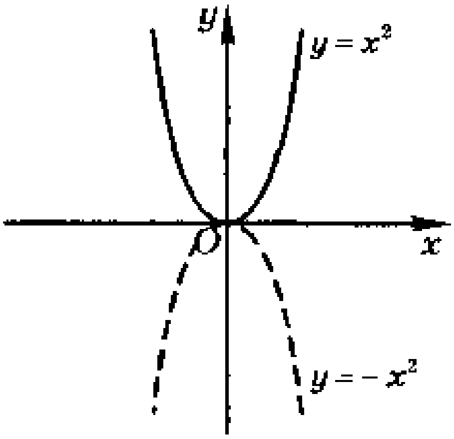
7. Найти ординаты точки пересечения графиков с осью Oy:

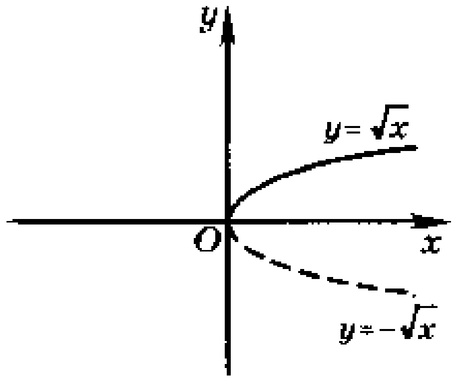
1) $y = x^2 + 5$; 3) $y = -3x^2 - 5$;

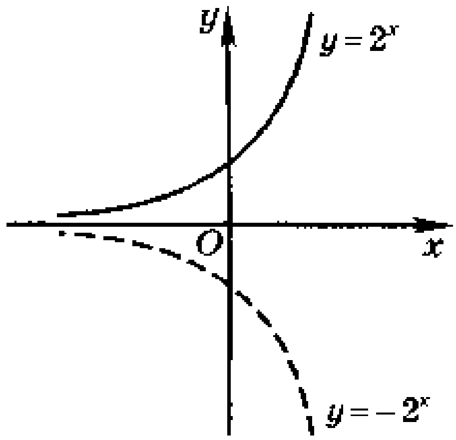
2) $y = 2x^2 - 1$; 4) $y = -x^2 + 4$.

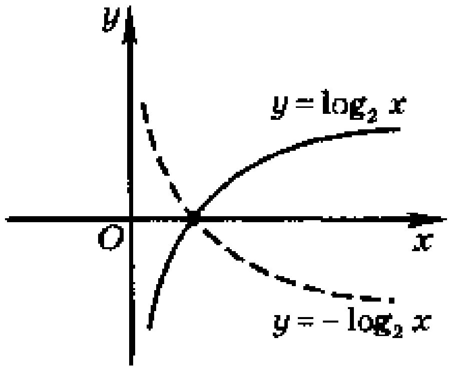
Приемы, облегчающие построение графиков функций

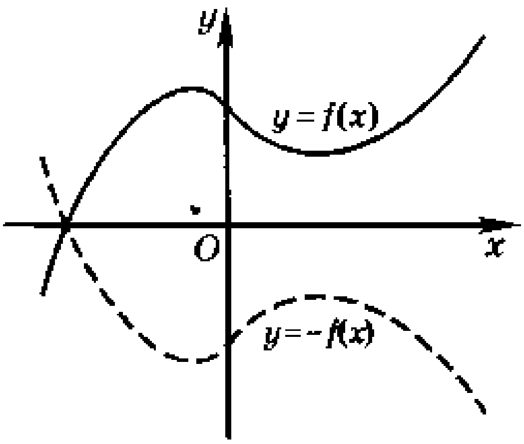
I. Для того, чтобы по известному графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = -f(x)$, надо построить линию, симметричную линии $y = f(x)$ относительно оси Ox.



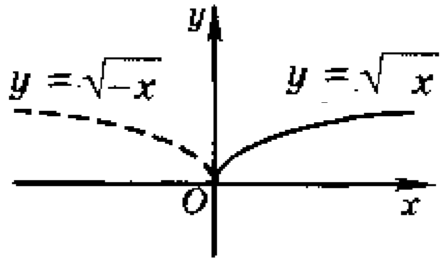


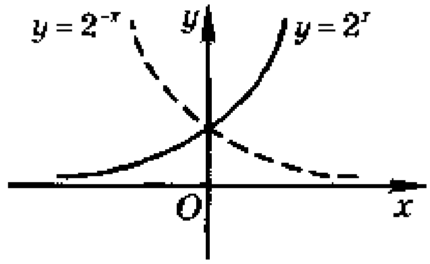






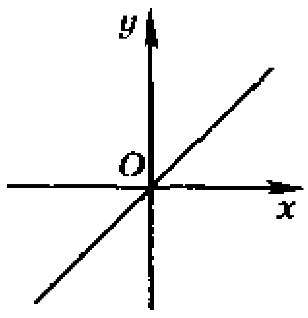
II. Для того, чтобы по известному графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = f(-x)$, надо построить линию, симметричную линии $y = f(x)$ относительно оси Oy:



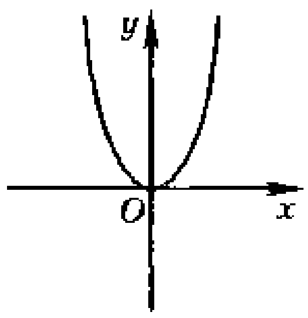


Справочный отдел

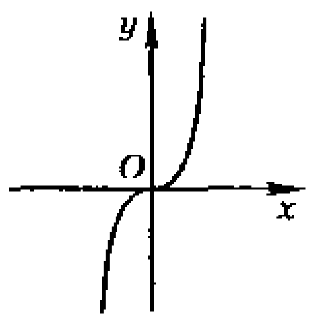
Наиболее часто встречающиеся графики



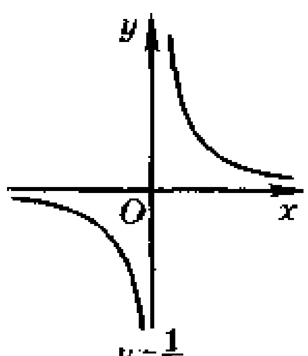
$y = x$



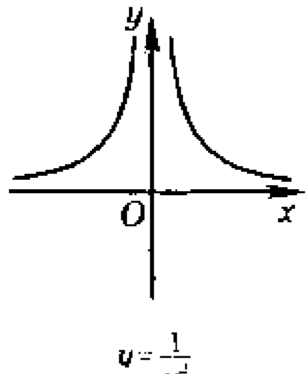
$y = x^2$



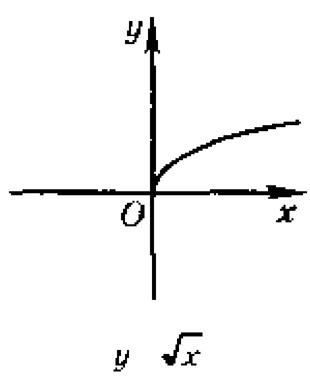
$y = x^3$



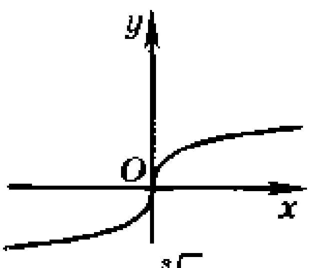
$y = \frac{1}{x}$



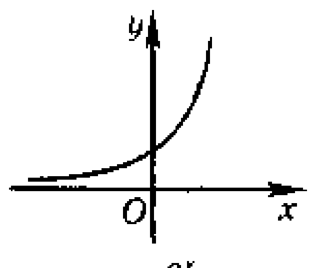
$y = \frac{1}{x^2}$



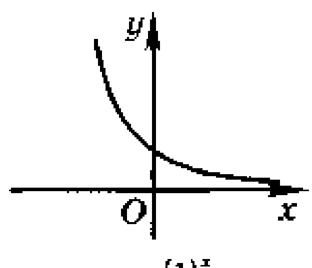
$y = \sqrt{x}$



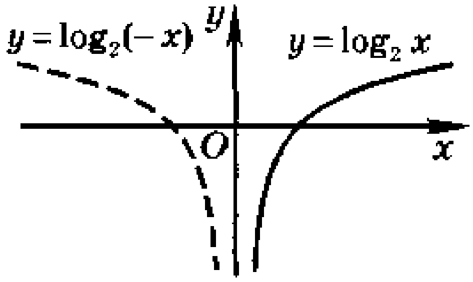
$y = \sqrt[3]{x}$

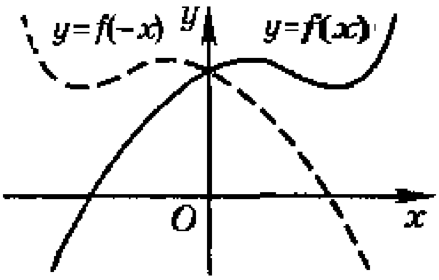


$y = 2^x$



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$





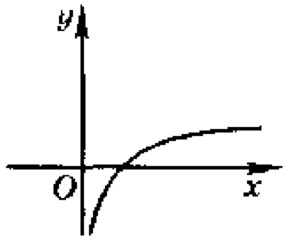
8. Используя последовательно I и II приемы построить графики:

1) $y = -\sqrt{-x}$; 2) $y = -2^{-x}$; 3) $y = -\log_2(-x)$.

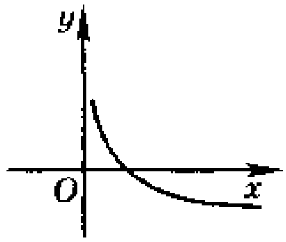
III. Для того, чтобы по известному графику функци $y = f(x)$ построить график функции $y = f(x) + B$, надо по строить линию $y = f(x)$ и сместить ее на B единиц вверх если $B > 0$, или на B единиц вниз, если $B < 0$. (Можн сместить ось Ox на B единиц в противоположном на правлении).

Справочный отдел

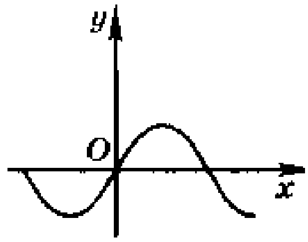
Наиболее часто встречающиеся графики (*продолжение*)



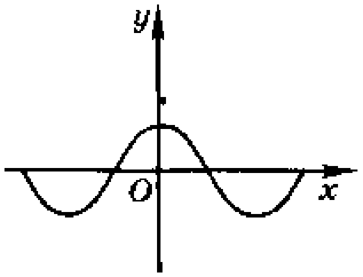
$y = \log_2 x$



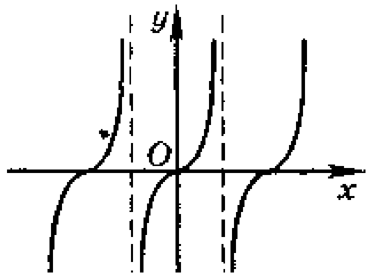
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$



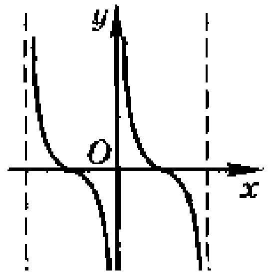
$y = \sin x$



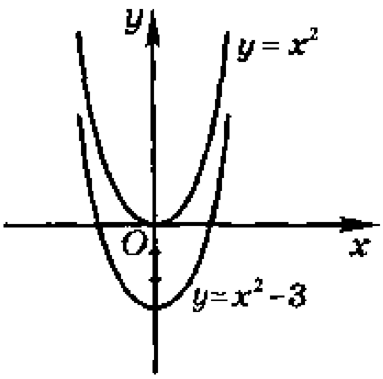
$y = \cos x$

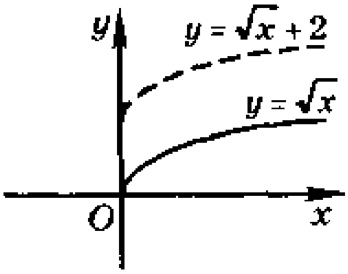


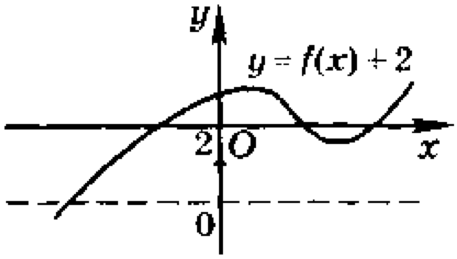
$y = \mathrm{tg}\, x$



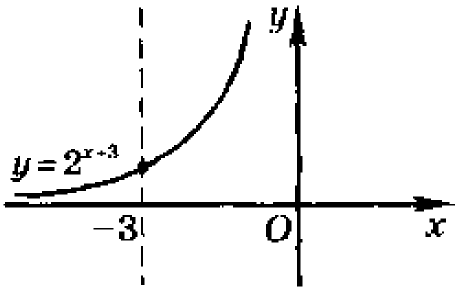
$y = \mathrm{ctg}\, x$

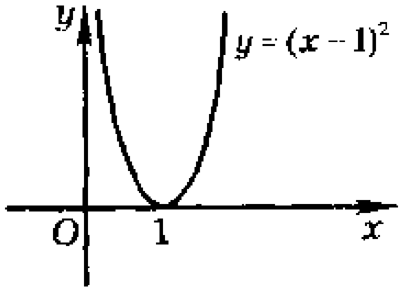


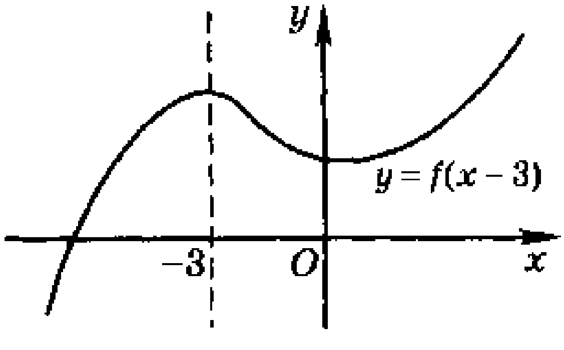




IV. Для того чтобы по известному графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = f(x + A)$, надо построить линию $y = f(x)$ и сместить ее на A единиц вправо при $A < 0$, или на A единиц влево при $A > 0$. (Можно сместить ось Oy на A единиц, но в противоположном направлении).







9. Построить графики функций:

1) $y = (x - 3)^2 + 1$;

2) $y = -(x + 1)^2 - 3$;

3) $y = (x - 1)^2 - 4$;

4) $y = 2^{x - 3} - 1$;

5) $y = 2^{x+4} - 3$;

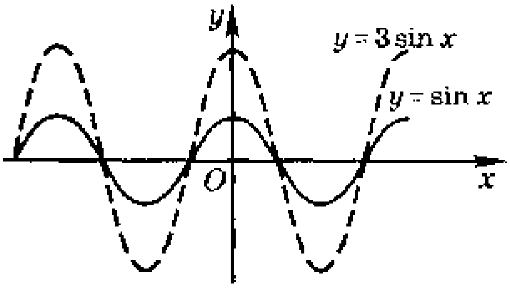
6) $y = -2^{x-3}$;

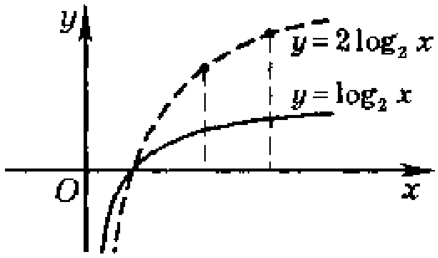
7) $y = \log_2 (x - 4) + 2$;

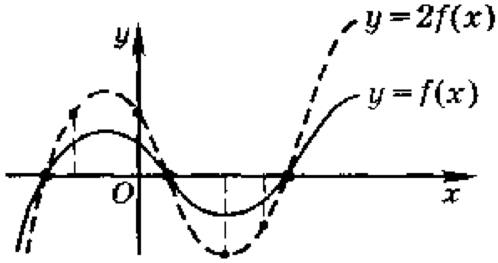
8) $y = \log_2 (x + 1) - 3$;

9) $y = -\log_2 x + 4$.

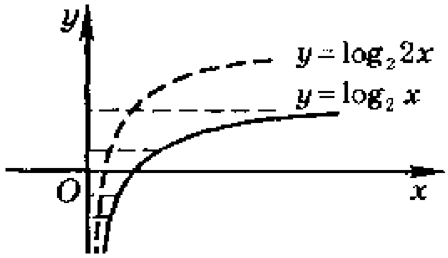
V. График функции $y = A\,f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ умножением всех его ординат на A.

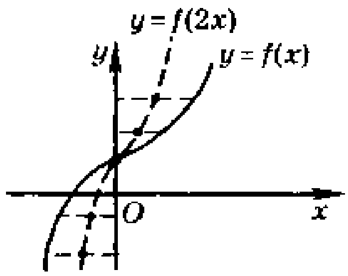






VI. График функции $y = f(kx)$ ($k > 0$) получается из графика функции $y = f(x)$ делением всех абсцисс этого графика на k, если $k > 1$, и умножением на k, если $0 < k < 1$.



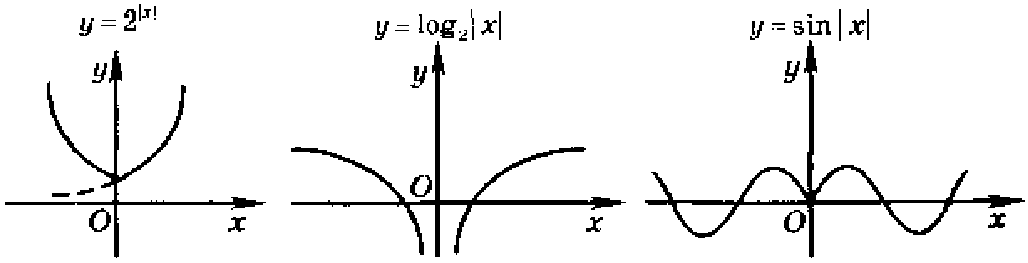


VII. Если функция четная ($f(-x) = f(x)$), то ее график симметричен относительно оси Oy, то есть достаточно построить график в правой (для $x > 0$) полуплоскости, а в левой провести линию, симметричную полученной.

То, что справа, — то и слева.

VIII. Для того чтобы по известному графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = f(|x|)$, следует убедиться, что функция четная и смотри прием VII.

Примеры графиков функций:



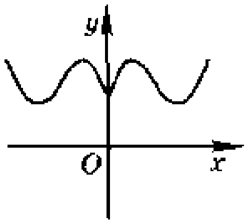
IX. Для того чтобы по известному графику $y = f(x)$ построить график функции $y = |f(x)|$, надо построить линию $y = f(x)$ и часть графика, лежащего ниже оси Ox, зеркально отобразить в верхнюю полуплоскость.

Справочный отдел

Функция

Четная

график симметричен относительно оси ординат



Пример.

$f(x) = 2^x + 2^{-x}$.

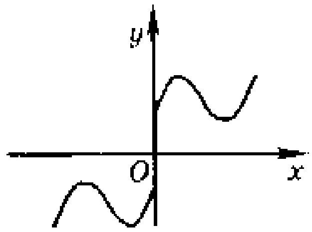
Проверить на нечетность.

$f(-x) = 2^{-x} + 2^x$.

$f(-x) = f(x)$ — функция четная.

Нечетная

график симметричен относительно начала координат



$f(x) = 2^x - 2^{-x}$.

$f(-x) = 2^{-x} - 2^x = -(2^x - 2^{-x})$.

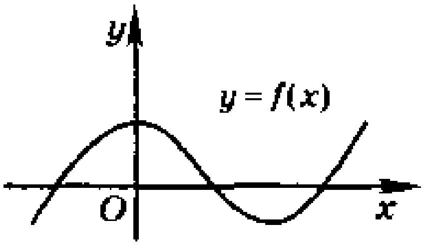
$f(-x) = -f(x)$ — функция нечетная

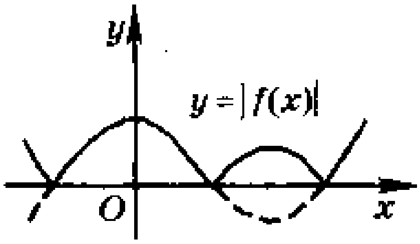
Ни четная, ни нечетная

$f(x) = 2^x$.

$f(-x) = 2^{-x}$.

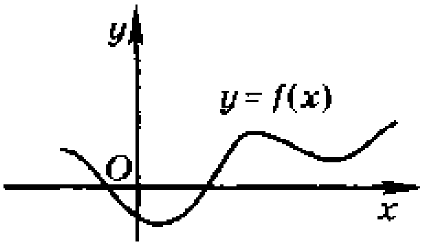
Функция изменилась и не является ни четной, ни нечетной

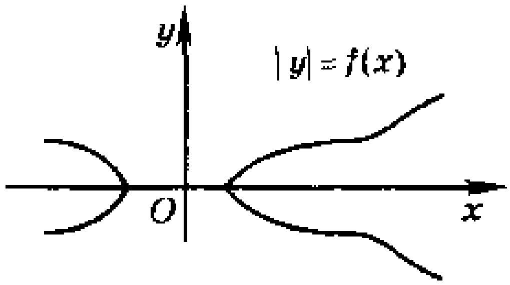




X. Для того чтобы по известному графику $y = f(x)$ построить график $|y| = f(x)$, надо построить линию $y = f(x)$ в верхней полуплоскости и провести симметричную линию в нижней.

То, что сверху, — то и снизу.





10. Зная график функции $y = \log_2 x$, построить графики уравнений:

1) $y = |\log_2 x|$; 3) $|y| = \log_2 x$; 5) $|y| = \log_2 |x|$;

2) $y = \log_2 |x|$; 4) $|y| = |\log_2 x|$; 6) $|y| = |\log_2 |x||$.

11. Зная график функции $y = \sin x$, построить графики уравнений:

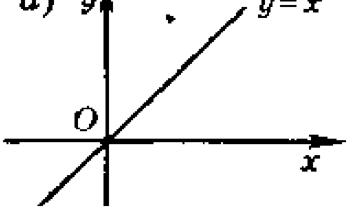
1) $y = |\sin x|$; 3) $|y| = \sin x$; 5) $|y| = \sin |x|$.

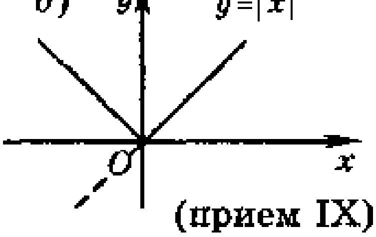
2) $y = \sin |x|$; 4) $|y| = |\sin x|$;

12. Зная график функции $y = x$, построить графики функции:

1) $y = |x|$.

Решение.

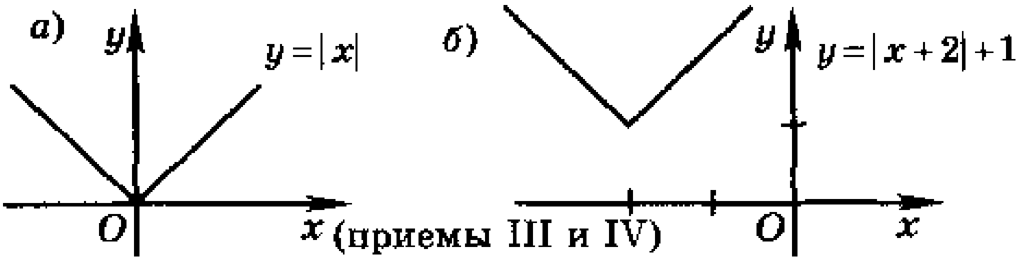




(прием IX)

2) $y = |x + 2| + 1$.

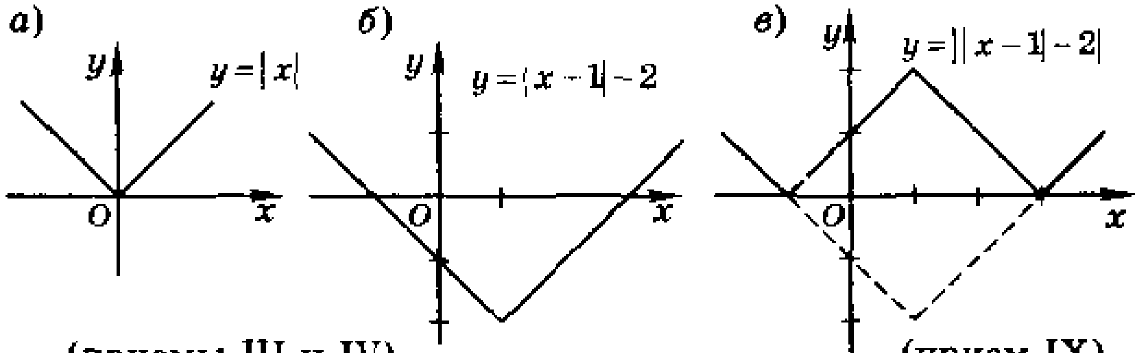
Решение.



(приемы III и IV)

3) $y = ||x - 1| - 2|$.

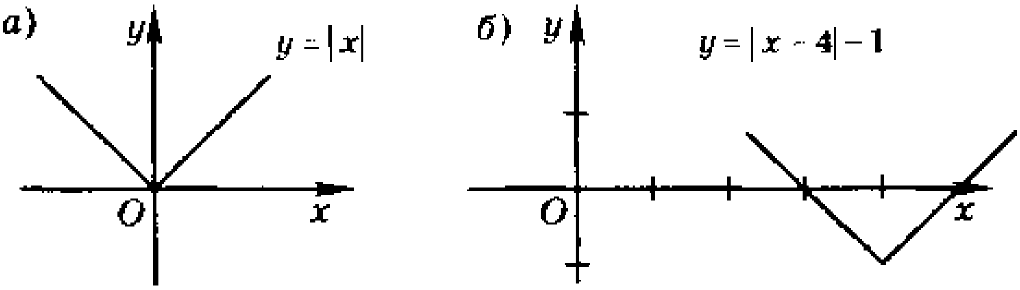
Решение.



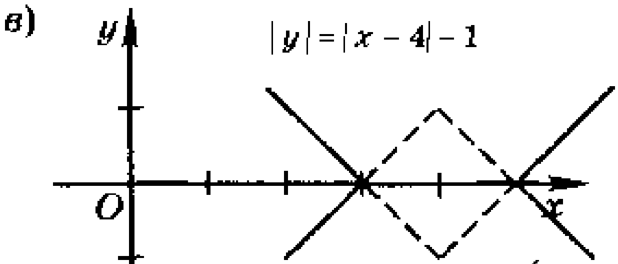
(приемы III и IV) (прием IX)

4) $|y| = |x - 4| - 1$.

Решение.



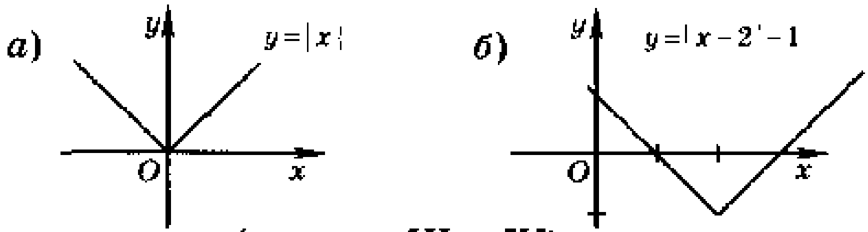
(приемы III и IV)



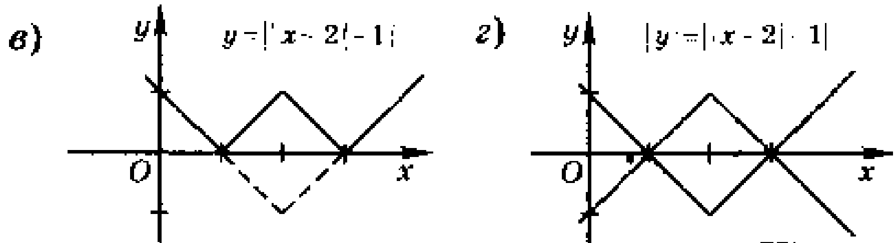
(прием IX)

5) $|y| = ||x - 2| - 1|$.

Решение.



(приемы III и IV)



(прием IX) (прием X)

13. Зная график функции $y = \dfrac{1}{x}$, построить графики:

1) $y = \dfrac{1}{|x|}$; 3) $y = \left|\dfrac{1}{x+2}\right|$; 5) $|y| = \left|\dfrac{1}{x+2}\right| - 3$.

2) $y = \left|\dfrac{1}{x}\right|$; 4) $y = \left|\left|\dfrac{1}{x+2}\right| - 3\right|$;

14. Зная график функции $y = \operatorname{tg} x$, построить графики:

1) $y = \operatorname{tg}|x|$; 3) $y = |\operatorname{tg}|x||$; 5) $|y| = |\operatorname{tg} x|$;

2) $y = |\operatorname{tg} x|$; 4) $|y| = \operatorname{tg} x$; 6) $|y| = \operatorname{tg}|x|$.

Нахождение площадей фигур, ограниченных линиями

Пример 15. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x + 3$, $x = -1$, $y = 0$.

Алгоритм решения:

1) построить график функции $y = -x + 3$ (рис. 1.25);
2) построить графики функций $x = -1$ и $y = 0$ (рис. 1.26);
3) заштриховать фигуру, ограниченную линиями $y = -x + 3$, $x = -1$, $y = 0$, и найти ее площадь:

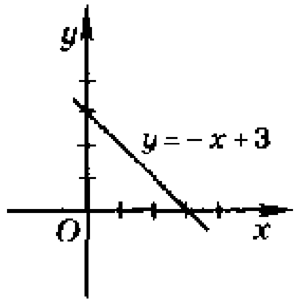


Рис. 1.25

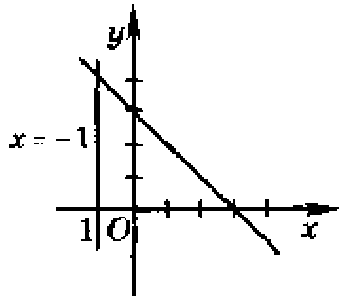


Рис. 1.26

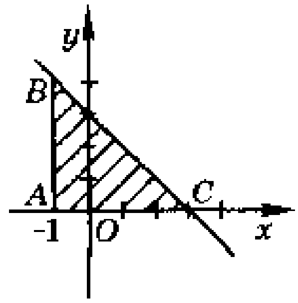


Рис. 1.27

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8.$$

Ответ: 8.

16. **Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x+2y=4$, $x+2y=6$, $x=0$, $y=0$.**

Алгоритм решения:

1) построить график функции $x+2y=4$ (рис. 1.28);

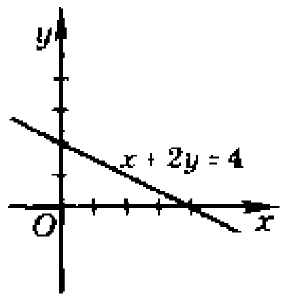


Рис. 1.28

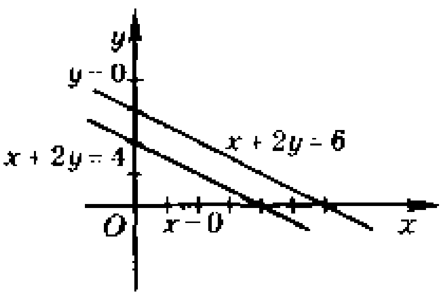


Рис. 1.29

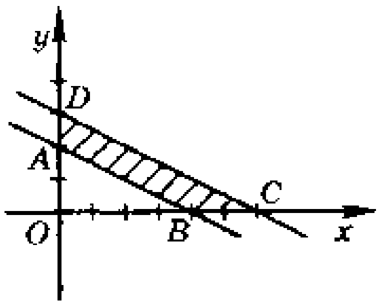
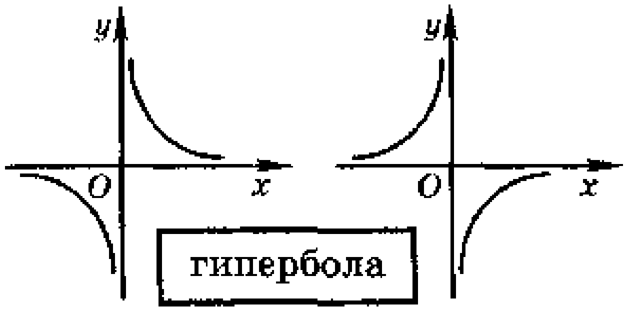
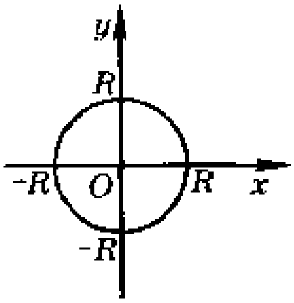


Рис. 1.30

Справочный отдел



обратно пропорциональная зависимость



окружность радиуса R с центром (0; 0)

2) построить графики функций $x + 2y = 6$, $x = 0$ и $y = 0$ (рис. 1.29);

3) заштриховать фигуру, ограниченную линиями $x + 2y = 4$, $x + 2y = 6$, $x = 0$, $y = 0$ и найти ее площадь (рис. 1.30):

$$S_{ABCD} = S_{OCD} - S_{OAB} = \frac{OC \cdot OD}{2} - \frac{OA \cdot OB}{2} =$$

$$= \frac{3 \cdot 6}{2} - \frac{2 \cdot 4}{2} = 5.$$

Ответ: 5.

17. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x + y = 2$, $y = 3x - 6$, $y = x + 2$.

Алгоритм решения:

1) построить график функции $x + y = 2$ (рис. 1.31);

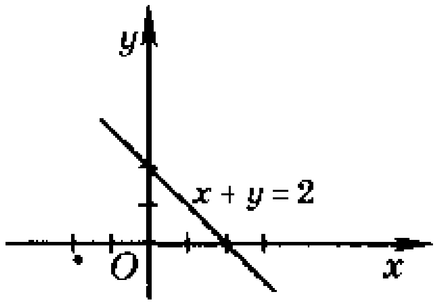


Рис. 1.31

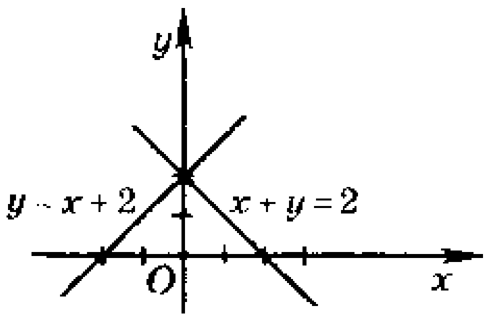


Рис. 1.32

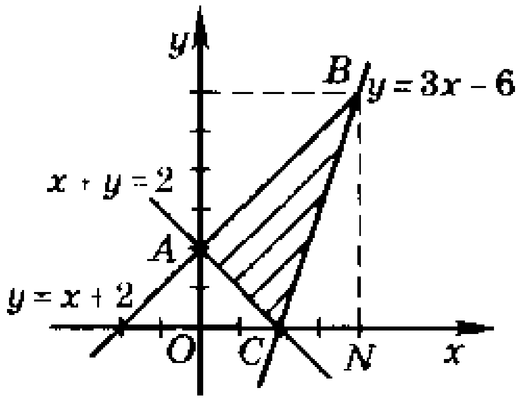


Рис. 1.33

2) построить график функции $y = x + 2$ (рис. 1.32);

3) построить фигуру, ограниченную линиями $x + y = 2$, $y = 3x - 6$, $y = x + 2$ и заштриховать фигуру, ограниченную данными линиями (рис. 1.33);

4) найти координаты точки B (4; 6);

5) найти искомую площадь $S_{ABC} = S_{OABN} - S_{OAC} -$

$$- S_{CBN} = \frac{OA + BN}{2} \cdot ON - \frac{1}{2} OA \cdot OC - \frac{1}{2} CN \cdot BN =$$

$$= \frac{2 + 6}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 8.$$

Ответ: 8.

18. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = |x| - 2$, $y = -|x| + 2$.

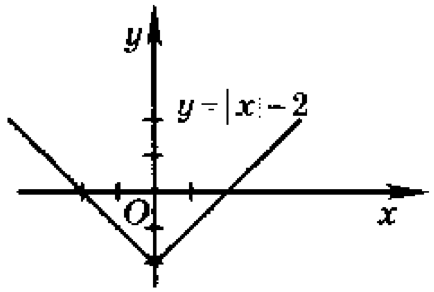


Рис. 1.34

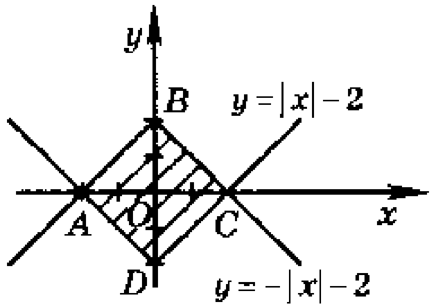


Рис. 1.35

Алгоритм решения:

1) построить график функции $y = |x| - 2$ (рис. 1.34);
2) построить график функции $y = -|x| + 2$ (рис. 1.35);
3) заштриховать фигуру, площадь которой требуется найти;
4) найти искомую площадь: $ABCD$ — квадрат,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 8.$$

Ответ: 8.

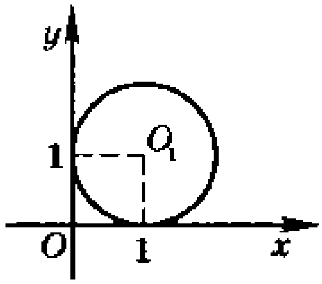


Рис. 1.36

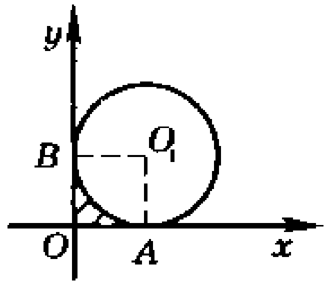


Рис. 1.37

19. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1, \quad y = 0, \quad x = 0.$$

Алгоритм решения:

1) построить график функции $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ (рис. 1.36);
2) заштриховать фигуру, ограниченную линиями $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, $y = 0$, $x = 0$ (рис. 1.37);
3) найти искомую площадь:

$$x = S_{OAO_1B} - \frac{1}{4}\pi R^2 = 1 - \frac{1}{4}\pi.$$

Ответ: $1 - \pi/4$.

20. **Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:**

1) $2x - 3y = 6,\ y = 2,\ x = 0;$
2) $3x + y = 12,\ x - 3y = -6,\ x = 4;$
3) $x + y = 5,\ x = 2,\ x = 3,\ y = 0;$
4) $2x + y = 4,\ y = 1,\ y = 3,\ x = 0;$
5) $x + y = 2,\ 4x + 5y = 20,\ x = 0,\ y = 0;$
6) $y = |x| - 3,\ y = 1;$
7) $y = |x|,\ 3x - 5y = -8;$
8) $x^2 + (y + 1)^2 = 1,\ y = 0,\ x = 1;$
9) $x^2 + (y - 1)^2 = 1,\ x^2 + (y + 1)^2 = 1,\ x = -1.$

Исследование и решение линейных уравнений с параметрами

*Уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — постоянные коэффициенты, называется **линейным уравнением** относительно неизвестной x.*

Это уравнение равносильно уравнению $ax = -b$. Исследуем его.

1. Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = -\frac{b}{a}$.

2. Если $a = b = 0$, то уравнение принимает вид

$$0x = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет любое действительное значение x, а поэтому оно имеет бесконечное количество решений.

3. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение имеет вид

$$0x = -b.$$

Это уравнение не имеет решений.

Рассмотрим решение рациональных уравнений с параметрами.

***Уравнениями с параметрами** называются уравнения вида*

$$f\,(x;\ \alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ \dots;\ \alpha_n) = 0,$$

где x — искомая неизвестная, а α_1; α_2; α_3; ... ; α_n — переменные параметры.

Значения параметров α_1; α_2; α_3; ... ; α_n, при которых выражение $f\,(x;\ \alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ \dots;\ \alpha_n) = 0$ имеет смысл при некоторых значениях x, называются ***допустимыми***.

Решить уравнение с параметрами — значит найти все его решения для каждой системы допустимых значений параметров.

При решении уравнений с параметрами область изменения параметров может быть заданной. Если не указаны пределы изменений параметров, то считается, что параметры принимают все свои допустимые значения.

Пример 21. Решить относительно x уравнение

$$\frac{2}{5x - a} = \frac{3}{ax - 1}.$$

Решение. Имеем $2\,(ax - 1) = 3\,(5x - a)$, откуда

$$(2a - 15)\,x = 2 - 3a.$$

а) Если $a = \frac{15}{2}$, то уравнение имеет вид $0x = -\frac{41}{2}$. Это уравнение, а значит, и данное уравнение не имеют решений;

б) если $a \neq \frac{15}{2}$, то уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{2 - 3a}{2a - 15}$;

в) определим, при каких значениях a найденный корень удовлетворяет уравнению, то есть найдем область определения.

Область допустимых значений неизвестного и параметров, входящих в уравнение, определяется уравнениями: $5x - a \neq 0$ и $ax - 1 \neq 0$. При $x = \dfrac{2 - 3a}{2a - 15}$ получим

$$\frac{10-15a}{2a-15}-a\neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{2a-3a^2}{2a-15}-1\neq 0.$$

Отсюда

$$10-15a-2a^2+15a\neq 0 \quad \text{и}$$

$$2a-3a^2-2a+15\neq 0,$$

$$a\neq\pm\sqrt{5} \quad \text{и} \quad a\neq\pm\sqrt{5}.$$

Итак, если $a\neq\frac{15}{2}$ и $a\neq\pm\sqrt{5}$, то уравнение имеет

1 единственный корень $x=\frac{2-3a}{2a-15}$.

Если $a=\frac{15}{2}$, уравнение не имеет корней.

Пример 21. Решить относительно x уравнение

$$\frac{1}{x}=\frac{b}{a-x}. \qquad (*)$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного и параметров $x\neq 0$, $x\neq a$. Имеем

$$a-x=bx, \quad (b+1)x=a. \qquad (**)$$

а) Если $b=-1$, $a=0$, то уравнение (**) принимает вид $0x=0$. Это уравнение справедливо для любых значений x, входящих в область допустимых значений;

б) если $b=-1$, $a\neq 0$, то уравнение принимает вид $0x=a$. Корней нет;

в) если $b\neq -1$, то уравнение имеет единственное решение $x=\frac{a}{b+1}$;

г) проверим, при каких значениях параметров a и b найденный корень удовлетворяет уравнению.

Исходя из условия, $x\neq 0$ и $a-x\neq 0$. Итак,

$$\frac{a}{b+1}\neq 0 \quad \text{и} \quad a-\frac{a}{b+1}\neq 0.$$

Отсюда $a\neq 0$ и $b\neq 0$.

Таким образом, если $b = -1$, $a = 0$, то уравнение имеет бесконечное множество корней, то есть имеет смысл при любых действительных x, кроме $x = 0$, $x = a$.

Если $b = -1$, $a \neq 0$, то решений нет.

Если $x \neq a$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $x = \dfrac{a}{b+1}$.

Упражнения

Решить уравнение:

21. $2x = a$.
22. $ax = -3$.
23. $ax = b$.
24. $ax + bx = c$.
25. $a^2 x - ab = a$.
26. $ax - 2x = a^2 - 4$.
27. $ax - b - 1 = x - a$.
28. $(a + x) b - a = (b + 1) x + ab$.
29. $y + \dfrac{y}{a} = b$.
30. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{b} = c$.
31. $\dfrac{1}{x - a} = \dfrac{1}{2(x - b)}$.
32. $\dfrac{(1 - a)^2}{x - a} = \dfrac{(1 + a)^2}{x + a}$.
33. Определить, при каких значениях t уравнения имеют положительные решения:

а) $3(2 - x) = 4(t - 2x)$; *б*) $4 - t = \dfrac{2}{x - 1}$.

34. Определить, при каких значениях k уравнения имеют отрицательные решения:

а) $k - 2 = \dfrac{3x + 1}{x + 1}$; *б*) $\dfrac{4x + 3k}{3} = \dfrac{5x - 2k}{4}$.

35. Выражение $\dfrac{5x - 7}{x + 3a}$ равно 1, когда x равен 10. При каком значении x это выражение равно 3?

36. При каких значениях k уравнение

$$3k + 3(x + 1) = \frac{3kx + 15}{5}:$$

а) имеет единственное решение; *б*) не имеет решений?

37. Определить, при каких значениях a корни уравнения $ax = 7x - 1$ целые и кратны 3; кратны 5.

38. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $3(x + 1) = 4 + ax$ будет иметь корень больший, чем -1.

Исследование систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — произвольные действительные числа.

Исследовать систему значит по ее коэффициентам установить, какой из приведенных ниже случаев имеет место:

1. Система имеет единственное решение.
2. Система не имеет решений (несовместна).
3. Система имеет бесконечное количество решений.

Как известно, каждое из линейных уравнений системы изображается в системе координат прямой линией. Поэтому очевидно, что:

1) Система имеет единственное решение, если графики уравнений имеют одну общую точку, координаты которой и являются решениями данной системы.
2) Система не имеет решений, если графики уравнений — взаимно параллельные прямые.
3) Система имеет бесконечное число решений, если графики уравнений совпадают (одна и та же прямая).

Приведем теорему, которая используется при исследовании системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим данную систему:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на b_2, а второе — на $-b_1$ и сложив эти уравнения, имеем

$$(a_1b_2 - b_1a_2)\ x = c_1b_2 - b_1c_2.$$

Умножив первое уравнение на $-a_2$, а второе — на a_1 и сложив их, имеем

$$(a_1b_2 - b_1a_2)\ y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} (a_1b_2 - b_1a_2)\ x = c_1b_2 - b_1c_2, \\ (a_1b_2 - b_1a_2)\ y = a_1c_2 - c_1a_2, \end{cases}$$

равносильную данной системе.

Теорема. *Если* $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ $(\Delta = 0)$ *и* $c_1b_2 - b_1c_2 = 0$ $(\Delta_x = 0)$, *то* $a_1c_2 - c_1a_2 = 0$ $(\Delta_y = 0)$.

Доказательство. Запишем данные уравнения в виде

$$\begin{cases} a_1b_2 = b_1a_2, \\ b_1c_2 = c_1b_2. \end{cases}$$

Перемножим почленно левые и правые части равенств. Получим $a_1b_2b_1c_2 = b_1a_2c_1b_2$, т.е. $a_1c_2 = a_2c_1$. Отсюда имеем $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$, что и требовалось доказать.

Исследуем данную систему аналитически.

1. Если $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ и $c_1b_2 - b_1c_2 = 0$, то и $a_1c_2 - c_1a_2 = 0$, то есть система имеет бесконечное число решений.

Найдем зависимость между коэффициентами в случае, когда коэффициенты не равны нулю.

Из равенства $a_1b_2 = b_1a_2$ имеем $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

Из равенства $c_1b_2 = b_1c_2$ имеем $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Итак, в этом случае $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Система имеет бесконечное количество решений, если коэффициенты при соответствующих неизвестных и свободные члены пропорциональны.

2. Если $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ и $c_1b_2 - b_1c_2 \neq 0$, то система не имеет решений.

Из равенства $a_1b_2 = b_1a_2$ имеем $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$.

Из неравенства $c_1b_2 \neq b_1c_2$ имеем $\dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

Итак, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

Система не имеет решений, если ее коэффициенты пропорциональны между собой, но не пропорциональны свободным членам системы.

3. Если $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, то система имеет единственное решение:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Из неравенства $a_1b_2 \neq b_1a_2$ имеем $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

Система имеет единственное решение, если коэффициенты при соответствующих неизвестных не пропорциональны между собой.

Пример 39. Найти, при каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x + (2a - 1)\,y = 2a, \\ (2a + 1)\,x + (a^2 + 2)\,y = 2\,(a^2 + a + 1) \end{cases}$$

имеет бесконечное количество решений; не имеет решений.

Решение. Система имеет бесконечное количество решений, если $\dfrac{1}{2a+1} = \dfrac{2a-1}{a^2+2} = \dfrac{2a}{2\,(a^2+a+1)}$.

Найдем, какие значения a удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{2a+1} = \frac{2a-1}{a^2+2}, \quad 4a^2 - 1 = a^2 + 2, \quad a = \pm 1.$$

Когда $a = 1$, получим $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, то есть система имеет бесконечное количество решений.

Когда $a = -1$, получим $-1 = -1 = -1$, то есть система имеет бесконечное количество решений.

В других случаях, то есть при $a \neq \pm 1$, система имеет единственное решение.

О т в е т: $a = \pm 1$; значений a, при которых система не имеет решений, не существует.

Пример 40. . Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (a-1)^2 x + (a^2-1) y = (a+1)^2, \\ (2a-1) x + (a+1) y = a^2 - 1 \end{cases}$$

относительно неизвестных x и y.

Решение. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a-1)^2 & a^2-1 \\ 2a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 (a+1) - $$

$$- (2a-1)(a^2-1) = -a(a^2-1).$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} (a+1)^2 & a^2-1 \\ a^2-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3 - (a^2-1)^2 =$$

$$= -a(a+1)^2(a-3).$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} (a-1)^2 & (a+1)^2 \\ 2a-1 & a^2-1 \end{vmatrix} = (a-1)^3(a+1) -$$

$$-(a+1)^2(2a-1) = a(a+1)(a^2-5a+2).$$

Определим, при каких значениях параметра a $\Delta = 0$.

Решим уравнение $-a(a^2-1) = 0$, откуда $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$. Рассмотрим четыре случая.

а) Пусть $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$. Тогда $\Delta \neq 0$ и система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-a(a+1)^2(a-3)}{-a(a^2-1)} = \frac{a^2-2a-3}{a-1},$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a(a+1)(a^2-5a+2)}{-a(a^2-1)} = -\frac{a^2-5a+2}{a-1}.$$

б) Пусть $a = 0$. Данная система имеет вид

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ -x + y = -1. \end{cases}$$

Поскольку $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$, то система имеет бесконечное количество решений: x — любое число, $y = x - 1$.

в) Пусть $a = 1$. Данная система имеет вид

$$\begin{cases} 0x + 0y = 4, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

Поскольку первое уравнение этой системы не имеет решений, то и система не имеет решений.

г) Пусть $a = -1$. Данная система имеет вид

$$\begin{cases} 4x + 0y = 0, \\ -3x + 0y = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечное количество решений: $x = 0$, y — произвольное число.

Ответ: Если $a \neq 0$ и $a \neq \pm 1$,

то $x = \frac{a^2 - 2a - 3}{a - 1}$, $y = -\frac{a^2 - 5a + 2}{a - 1}$;

если $a = 0$, то x — произвольное число,

$y = x - 1$;

если $a = -1$, $x = 0$, то y — произвольное число;

если $a = 1$, то система не имеет решений.

Упражнения

41. При каких значениях m система уравнений имеет положительные решения:

$$\begin{cases} 3x + 7y = m, \\ 2x + 5y = 20? \end{cases}$$

42. Определить, при каких значениях a системы уравнений имеют отрицательные решения:

а) $\begin{cases} 3x - 6y = 1, \\ 5x - ay = 2; \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} (a + 5)x + (2a + 3)y = 3a + 2, \\ (3a + 10)x + (5a + 6)y = 2a + 4. \end{cases}$

43. Определить, при каких значениях m система уравнений

$$\begin{cases} 2mx - 3y = 5, \\ 4x + my = 8 \end{cases}$$

имеет решения $x > 0$, $y < 0$.

44. Исследовать и решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} (m-1)x + 2my = -2, \\ 2mx + (m-1)y = m-1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (a-2)x + 6y = 15, \\ 3x + (2a-4)y = 15. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + (m-1)y = 12, \\ (m-1)x + 12y = 24; \end{cases}$

45. Определить, при каких значениях m и n системы уравнений имеют бесконечное количество решений:

а) $\begin{cases} mx + ny = 8, \\ 5x + 3y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} mx + (n-1)y = 2, \\ 3x + 10y = -1. \end{cases}$

46. Определить, при каких значениях a системы уравнений не имеют решений:

а) $\begin{cases} 4x + 3y = 12, \\ 2x + ay = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2ay = 1, \\ (3a-1)x - ay = 1. \end{cases}$

47. . Дана система двух уравнений с двумя неизвестными x и y

$$\begin{cases} (3+m)x + 4y = 5 - 3m, \\ 2x + (5+m)y = 8. \end{cases}$$

Найти, при каких значениях m эта система имеет *а*) бесконечное количество решений; *б*) не имеет решений.

48. Определить, при каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} ax + y = a, \\ 2ax + ay = 4 \end{cases}$$

имеет: *а*) единственное решение и найти его; *б*) бесконечное количество решений; *в*) не имеет решений.

49. Определить, при каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} (a-1)x + 3y = a, \\ x + (a+1)y = 2 \end{cases}$$

имеет: *а*) единственное решение и найти его; *б*) бесконечное количество решений; *в*) не имеет решений.

Решение неравенств 1-й степени с параметрами

***Неравенством с параметрами** называется неравенство вида $F(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \lesseqgtr 0$, где x — неизвестное искомое число, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — переменные параметры.*

Решение таких неравенств зависит от допустимых значений параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

При решении неравенства с параметрами область изменения параметров может быть задана. Если не указаны промежутки изменения параметров, то считается, что параметры могут принимать все значения, при которых функция $F(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ имеет смысл.

Пример 1. Решить относительно x неравенство

$$(m^2 - 1)\,x > m^2 - m.$$

Решение. Рассмотрим все возможные случаи:

а) пусть $m^2 - 1 > 0$, тогда $m \neq 1$, то есть $m < -1$, или $m > 1$. Разделив обе части исходного неравенства на $m^2 - 1$, получим $x > \dfrac{m}{m+1}$;

б) пусть $m^2 - 1 < 0$, то есть $-1 < m < 1$. Разделив обе части исходного неравенства на $m^2 - 1$, получим $x < \dfrac{m}{m+1}$;

в) пусть $m = 1$. Неравенство примет вид $0x > 0$. Это неравенство не имеет решений;

г) пусть $m = -1$. Неравенство примет вид $0x > 2$. Неравенство не имеет решений.

Итак, в зависимости от значений параметра m неравенство имеет такие решения:

$x > \dfrac{m}{m+1}$, если $m > 1$ или $m < -1$;

$x < \dfrac{m}{m+1}$, если $-1 < m < 1$;

Пример 2. Решить относительно x неравенство

$$\frac{1}{2a} + \frac{1-x}{6} > \frac{-3x+5}{8a}.$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного и параметра: $a \neq 0$, x — произвольное число.

Перенесем все члены неравенства в левую часть. После преобразований имеем

$$\frac{(9-4a)\,x-(3-4a)}{24a} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{9-4a}{24a}\,x > \frac{3-4a}{24a}.$$

Рассмотрим три случая.

а) $\frac{9-4a}{24a} = 0$, то есть $a = \frac{9}{4}$. Проверкой убеждаемся в том, что при $a = \frac{9}{4}$ неравенство выполняется для произвольных значений x.

б) Если $\frac{9-4a}{24a} > 0$, то есть $0 < a < \frac{9}{4}$, то, разделив обе части неравенства на $\frac{9-4a}{24a}$, получим $x > \frac{3-4a}{9-4a}$.

в) Если $\frac{9-4a}{24a} < 0$, то есть $a < 0$ и $a > \frac{9}{4}$, то при делении на $\frac{9-4a}{24a}$ получаем $x < \frac{3-4a}{9-4a}$.

Ответ: если $0 < a < \frac{9}{4}$, $x > \frac{3-4a}{9-4a}$;

x — произвольное число, если $a = \frac{9}{4}$;

$x < \frac{3-4a}{9-4a}$, если $a < 0$, $a > \frac{9}{4}$.

Упражнения

Решить неравенство:

3. $(m-1)\,x < 5m$.
4. $m\,(x-1) > x-2$.
5. $\frac{x}{m} + \frac{1+3x}{2} > \frac{x+2}{4m}$.
6. $\frac{2x-5}{m-1} - \frac{x+7}{3} \leq \frac{3x-2m}{2\,(m-1)}$.