МАТЕМАТИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

В ПОМОЩЬ ПОВТОРЯЮЩИМ МАТЕМАТИКУ ПО СПРАВОЧНИКАМ

Тема 4. НЕРАВЕНСТВА.

Содержание

НЕРАВЕНСТВА

Решение неравенств

1.

а) $-2x > 6$

б) $2x \geqslant -6$

в) $-2x > -6$

г) $2x \geqslant 6$

д) $3(x-2) < 2(x+1)$

е) $x - 3(x-2) \leqslant 2(x+1)$

2.

а) $8y > 16$

б) $8y > -16$

в) $-8y > -16$

г) $-8y > 16$

д) $3(y+1) + 4 \leqslant 1 - 2(y-1)$

е) $4(y-1) - 3(y+2) \leqslant 4$

ж) $7(y+3) - 2(y-1) > 11 - 2y$

з) $3(5-y) - 4(y+1) \geqslant 1 - 2y$

Решить неравенства:

3. 1) $9x + 8 < 15 + 7x$; 2) $-3(x+20) < -20$;

3) $-\frac{x}{2} < 3x - \frac{3+2x}{4}$;

4. 1) $3\frac{1}{3}x - \frac{x-8}{6} > \frac{5x+2}{9} - \frac{2x+11}{6}$;

2) $\frac{1}{2}(3x-1) + \frac{x}{5} < 7x + 10{,}1$;

3) $\frac{2}{3}x + \frac{3}{2} < \frac{3x-2}{4} - 1$; 4) $\frac{3-2x}{5} + 8 > \frac{5x+2}{2} - x$.

5. 1) $5 - \frac{x}{3} < 3\frac{1}{2} - \frac{4x+1}{8}$; 2) $3 - \frac{3x}{2} > \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6}$;

3) $5(x-1) - x(7-x) < x^2$; 4) $(x+1)^2 < (x-1)^2$.

6. 1) $x - \frac{x-1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}$;

Решение систем неравенств

1.

а) $\begin{cases} x \geqslant -3 \\ x > 2 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \geqslant -5 \\ x < 4 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \leqslant 5 \\ x < 4 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant -2 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5(x+1) + 6(x+2) > 9(x+3) \\ 7x - 3(2x+3) > 2(x-18) \end{cases}$

е) $\begin{cases} (x-3)(x-4) < (x+1)(x+2) \\ x(x+1) + x(x+2) > (2x-1)(x+3) \end{cases}$

2. 1)

$$\begin{cases} \dfrac{7-x}{2} - 3 < \dfrac{3+4x}{5} - 4, \\ \dfrac{5}{3}x + 5(4-x) < 2(4-x). \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7} + \dfrac{10-3x}{5} > \dfrac{2x+7}{3} - 8, \\ \dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+3)}{6} > \dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{13-x}{2}; \end{cases}$$

2. Решить системы неравенств графически:

а) $\begin{cases} x - 4 > 0, \\ 3 - x < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3 < 0, \\ 1 - 4x > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x + 1 > 0, \\ 2 - x > 0. \end{cases}$

Неравенства второй степени

Решить неравенства:

1. $(x+3)(x+2)>0;$
2. $(x+1)(x-5)<0;$
3. $(x-2)(x-4)>0;$

Справочный отдел

Решить неравенство — это значит указать все действительные значения неизвестных, для которых это неравенство справедливо.

Для решения неравенств вида

(х + а)(х + в) ≤ 0 или (х + а)(х + в) ≥0 на первых порах решают системы уравнений

$$\begin{cases}(x+a)(x+в)\le 0\\ (x+a)(x+в)\ge 0\end{cases} \qquad \begin{cases}(x+a)(x+в)\ge 0\\ (x+a)(x+в)\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+a)\le 0\\ (x+в)\ge 0\end{cases} \quad \begin{cases}(x+a)\ge 0\\ (x+в)\le 0\end{cases} \qquad \begin{cases}(x+a)\le 0\\ (x+a)\le 0\end{cases} \quad \begin{cases}(x+a)\ge 0\\ (x+a)\ge 0\end{cases}$$

------------------------------------- -------------------------------------

------------------------------------- -------------------------------------

2 способ решения. Использование метода интервалов

Приведем алгоритм применения метода интервалов для решения неравенств.

1. Находим корни многочлена
2. Откладываем найденные значения корней многочлена на числовой прямой.
3. Находим знак алгебраического выражения на одном из интервалов.
4. Если нет кратных корней, то знаки чередуются.
5. Записываем ответ.

3 способ решения.

Использование графиков квадратного трёхчлена

1 случай. Многочлен имеет действительные корни и коэффициент при x^2 положителен. $x^2 - 5x + 6 > 0$

График квадратного трёхчлена представляет параболу, ветви которой направлены вверх и пересекают ось Ох в двух точках (корнях уравнения). Очевидно, в этом случае решениями неравенства являются числовые лучи, лежащие по разные стороны от корней многочлена. $x > 3$, $x < 2$. В этом случае говорят, что решением данного неравенства является **внекорневой промежуток**, а при решении неравенства $x^2 - 5x + 6 < 0$ решением является промежуток между корнями $2 < x < 3$.

В этом случае говорят, что решением данного неравенства является **внутрикорневой промежуток.**

2 случай. Многочлен не имеет действительных корней и коэффициент при x^2 положителен.

Пусть имеем $x^2 - x + 6 > 0$.

Дискриминант квадратного трёхчлена меньше нуля.

График квадратного трёхчлена представляет параболу, ветви которой направлены вверх и лежат выше оси Ох.

В этом случае говорят, что неравенство справедливо при любом значении **x.**

А при решении неравенства $x^2 - x + 6 < 0$ график квадратного трёхчлена лежит выше оси Ох. Значит неравенство не удовлетворяет ни при каких значениях **x.**

4. 1) $\frac{4-2x}{1+3x}>0$; 2) $\frac{3a+7}{2-6a}>0$;

3) $\frac{5-2a}{8+5a}>0$; 4) $\frac{5x-8}{2x+4}<0$.

5. 1) $\frac{9-2y}{4y+1}<0$; 2) $\frac{15-4a}{7+3a}<0$;

3) $\frac{2x+1}{x+2}>1$; 4) $\frac{x-1}{x+3}>2$.

6. 1) $\frac{3x-2}{x+1}<1$; 2) $\frac{5x-1}{x+6}<1$;

7. $\frac{3x-5}{x-1}>\frac{3x-8}{x-1}$.

8. $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}>1$.

9. $\frac{x-3}{x^2+4x+3}\geqslant 0$.

Решить неравенства:

10. 1) $x^2-14x+45>0$; 2) $x^2+2x>6x-15$;

3) $x^2-11x+30>0$; 4) $x^2-4x+3>0$.

11 1) $x^2+105>22x$; 2) $x^2-5x+4<0$;

3) $x^2-6x+9<0$; 4) $x^2-8x+7>0$.

12. 1) $3x^2-5x-2>0$; 2) $5x^2-7x+2<0$;

3) $3x^2-7x-6<0$; 4) $3x^2-2x+5>0$.

13. 1) $2x^2-3x+7<0$; 2) $3x^2-4x+5<0$;

3) $3x^2-11x-4<0$; 4) $5x^2-8x-4<0$.

14. 1) $-2+x-3x^2<0$; 2) $-5+4x-3x^2>0$;
3) $2x^2-3x+4>x^2+2x-2$;
4) $2x^2-2x-7>x^2+5x-17$.

Решить неравенства.

15. а) $\frac{1}{x-3}>2$; в) $\frac{x-2}{x+1}<3$;

б) $\frac{2x-1}{x+1}<2$; г) $\frac{x}{3x-1}<\frac{1}{3}$.

16. $\frac{x+1}{x-2}+\frac{1}{2}>\frac{3}{x-2}$.

17. $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}>3$.

18. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x+2}<0$.

Справочный отдел

Для решения неравенств вида

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)\lesseqgtr 0$$

Теорема. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на данном промежутке и не имеет на нем нулей, то при всех значениях x, принадлежащих данному промежутку, функция $f(x)$ сохраняет знак.*

Приведем алгоритм применения метода интервалов для решения неравенств.

1. Находим корни многочлена
2. Откладываем найденные значения корней многочлена на числовой прямой.
3. Находим знак алгебраического выражения на одном из интервалов.
4. Если нет кратных корней, то знаки чередуются.
5. Записываем ответ.

Решение неравенств

Пример 1. Решить неравенство

$$(x-8)(x-3)(2x+1)<0.$$

Решение. На числовой прямой откладываем значения корней многочлена $f(x)=(x-8)(x-3)(2x+1)$, $x_1=8$, $x_2=3$, $x_3=-\frac{1}{2}$. Определяем знак многочлена $f(x)$ на одном из полученных промежутков.

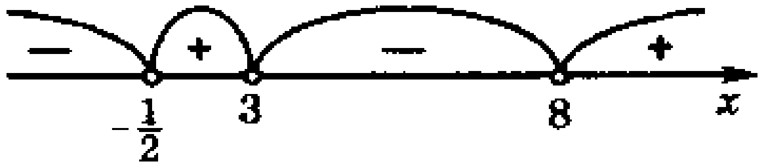


Рис. 1.4

На промежутке $\left(-\frac{1}{2};3\right)$ имеем $f(x)>0$. На остальных промежутках знаки чередуются (рис. 1.4). Записываем ответ.

О т в е т: $3<x<8$, $x<-\frac{1}{2}$.

Пример 2. Решить неравенство

$$(x-2)^{10}(x+3)^{17}(x+1)^5(x^2+3)^{17}>0.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$(x-2)^{10}(x+3)(x+3)^{16}(x+1)(x+1)^4(x^2+3)^{17}>0.$$

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x\neq 2, \\ x\neq -3, \\ x\neq -1, \\ (x+3)(x+1)>0, \end{cases}$$

поскольку при $x \neq 2$, $x \neq -3$, $x \neq -1$ обе части неравенства можно разделить на положительный многочлен $(x-2)^{10}(x+3)^{16}(x+1)^4(x^2+3)^{17}$, который не влияет на смысл неравенства. Решая это неравенство методом интервалов (рис. 1.5), получим $x < -3$, $-1 < x < 2$, $x > 2$.

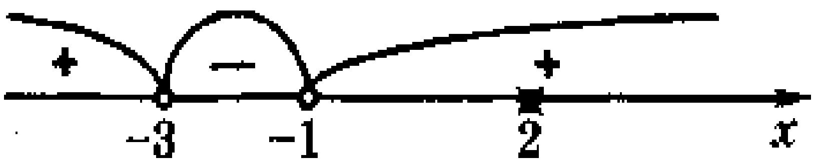


Рис. 1.5

Ответ: $x < -3$, $-1 < x < 2$, $x > 2$.

Пример 3. Решить неравенство $\dfrac{x+1}{x-1} \geq \dfrac{x+5}{x+1}$.

Решение. Запишем неравенство в таком виде:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+5}{x+1} \geq 0.$$

После соответствующих преобразований имеем:

$$\frac{2x-6}{(x-1)(x+1)} \leq 0.$$

Полученное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)(x+1) \leq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Полученное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}(x-3)(x-1)(x+1) \le 0,\\ x \ne -1,\\ x \ne 1.\end{cases}$$

Решаем это неравенство методом интервалов (рис. 1.6).

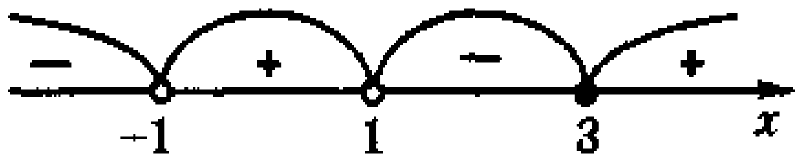


Рис. 1.6

Ответ: $x < -1,\ 1 < x \le 3$.

Упражнения

Решить неравенство:

4. $(x+3)(x-2) > 0.$
5. $(2x-1)(x-5) \le 0.$
6. $(2x-5)(x+6) \ge 0.$
7. $x^2 < 4x.$
8. $(x-3)(x-7) < (x-3)^2.$
9. $(6x-5)(x-8)(x-10)^2 > 0.$
10. $(8-x)(x-2) \ge 0.$
11. $(3-x)(8-x) \ge 0.$

12. $\dfrac{8-x}{9-x} \le 0.$

13. $x < \dfrac{1}{x}.$

14. $\dfrac{2x+1}{x+2} > 1.$

15 $\dfrac{x-1}{x+3} > 2.$

16. $x^2 - 5x + 6 > 0.$

17. $x^2 - 10x + 25 \ge 0.$

18. $x^2 + 4x + 5 < 0.$

19. $14 - 5x - x^2 < 0.$

20. $\dfrac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0.$

21. $x^2 < -3x.$

22. $x^2 > 2x - 5.$

23. $6 < x^2 - 5x + 12 < 8.$

34. $-8 < x^2 + 8x + 8 < -4.$

25. $(x+2)(x-1)(x-3) > 0.$

26. $5(x+3)(x-2)(x-3) < 0.$

27. $(x+3)(x+2)(x-1)^2(x-2)(x^2+3x+5) > 0.$

28. $(x-3)^{1917}(x+5)^{1991}(x-10)^{2000}(x^2+4)^{15} > 0.$

29. $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) < 0.$

30. $(x-1)(x^2+1)(x^3-1)(x^4+1) < 0.$

31. $\dfrac{3x-5}{x-1} > \dfrac{3x-8}{x-1}.$

32. $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} > 1.$

33. $\dfrac{x-3}{x^2+4x+3} \geqslant 0.$

34. $(x^3 - 1)(x - 1) \ge 0.$

35. $x^4 - 29x^2 + 100 \ge 0.$

36. $\dfrac{1}{x - 3} > 2.$

37. $\dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 1} > 3.$

38. $\dfrac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 3)(x - 4)} > 1.$

39. $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 7x + 10} > 0.$

40. $\dfrac{x^2 - 1}{3x - 7 - 8x^2} > 0.$

41. $\dfrac{1}{x + 2} < \dfrac{3}{x - 3}.$

42. $\dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 10x + 25} > 0.$

43. $5x - 20 \le x^2 \le 8x.$

44. $x^6 - 9x^3 + 8 > 0.$

45. $1 < \dfrac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} < 2.$

46. $\dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} < 0.$

47. $\dfrac{4 - x}{x - 5} > \dfrac{1}{1 - x}.$

48. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \ge 1.$

49. $\dfrac{15}{4+3x-x^2} > 1.$

50. $x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x - 9 < 0.$

51. $a^4 + a^3 - a - 1 < 0.$

52. $m^3 + m^2 - m - 1 > 0.$

53. $\dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x+8} \le 0.$

54. $\dfrac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 + 2x + 1} < 0.$

Решить неравенства.

55. $(x+2)(x-1)(x-3) > 0.$

56. $(x+3)(x+2)(x-1)(x-3) > 0.$

57. $5(x+3)(x-2)(x-3) < 0.$

58. $(x+3)(x+2)(x-1)^2(x-2)(x^2+3x+5) > 0.$

59. $(x-7)^4(x+3)^5(x-2)x^6(x+5)^3 > 0.$

60. $(x-2)^3(x+1)^2(x+3)^4(x-4)^5(x-8) > 0.$

61 $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) < 0.$

62. $(x+2)(x-1)^2(x-2)(x^2+3x+5) < 0.$

63. $(x-1)(x^2+1)(x^3-1)(x^4+1) < 0.$

64. $(x^8-1)(x^4-1) < 0.$

65. $(x^3-1)(x-1) \geqslant 0.$

66. $x^4 - 13x^2 + 36 > 0.$

67. $x^4 - 29x^2 + 100 > 0.$

13.

14.

15.

Решить неравенства аналитически и графически.

68. а) $x^2 - 5x + 6 > 0$; г) $14 - 5x - x^2 < 0$;
б) $x^2 - 10x + 25 \geqslant 0$; д) $x + 2 - 6x^2 > 0$;
в) $x^2 + 4x + 5 < 0$; е) $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$.

69. а) $6 < x^2 - 5x + 12 < 8$; б) $-8 < x^2 + 8x + 8 < -4$.

70. а) $x^2 < -3x$; в) $2x^2 - 1 > x$;
б) $x^2 > 2x - 5$; г) $x^2 - 4 < 4 - 2x$.

71. $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 7x + 10} > 0.$

72. $\frac{x^2 - 1}{3x - 7 - 8x^2} > 0.$

73. $\frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 2x + 3} > 0.$

74 $\frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x^3 + 1} > 0.$

75. $\frac{(x-1)(x^2 - x + 1)}{x^3 - 1} > 0.$

76. $\frac{x^2 - 2x + 1}{3x - 5 - x^2} > 0.$

77. $\frac{4x^2 - 5x - 1}{2x^2 - 5x + 3} > 1.$

78. $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)} > 0.$

79. $\frac{x^2 + 2x - 5}{x^3 - x^2 - 4x + 4} > 0.$

80. $\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} < 0.$

81. $\frac{x^3 - 6x^2 + 5x + 12}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2} > 0.$

Решение уравнений с модулями

Покажем применение определения абсолютной величины при решении уравнений с модулями.

Пример 1. Решить уравнение

$$|x-2|+|x-4|+|x-6|=12.$$

Решение. На числовой оси отложим значения переменных, при которых значение каждого модуля равно нулю. Эти точки разбивают числовую ось на промежутки знакопостоянства (рис. 1.1).

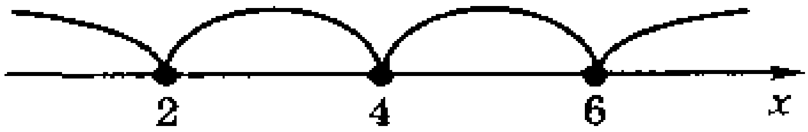


Рис. 1.1

Находим значение переменной для каждого из полученных промежутков.

а) $\begin{cases} x \le 2, \\ 2-x+4-x+6-x=12, \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 2, \\ x=0, \end{cases}$ $x=0.$

б) $\begin{cases} 2 < x \le 4, \\ x-2+4-x+6-x=12, \end{cases}$ $\begin{cases} 2 < x \le 4, \\ x=-4. \end{cases}$

Нет решений.

в) $\begin{cases} 4 < x \le 6, \\ x-2+x-4+6-x=12, \end{cases}$ $\begin{cases} 4 < x \le 6, \\ x=12. \end{cases}$

Нет решений.

Справочный отдел

Абсолютная величина (модуль) неотрицательного действительного числа равна этому числу; абсолютная величина отрицательного действительного числа равна противоположному числу:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

г) $\begin{cases} x > 6, \\ x - 2 + x - 4 + x - 6 = 12, \end{cases}$ $\begin{cases} x > 6, \\ x = 8. \end{cases}$ $x = 8.$

Ответ: 0; 8.

Однако встречаются уравнения, содержащие сумму модулей, но в процессе их решения нет необходимости рассматривать промежутки знакопостоянства.

Пример 2. Решить уравнение

$$|x - 3| + |2x - 1| + |x + 7| = -2.$$

Решение. Действительных корней нет, поскольку сумма неотрицательных чисел не может быть отрицательной.

Пример 3. Решить уравнение

$$|x + 2| + |2x - 3| + |x - 1| + |x - 3| - 3x + 12 = 0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$|x + 2| + |2x - 3| + |x - 1| + |x - 3| = 3x - 12.$$

Левая часть уравнения неотрицательна. Итак, уравнение может иметь действительные корни, если $3x - 12 \geq 0$, то есть при $x \geq 4$. А на этом промежутке выражения, записанные в каждом из модулей, положительны.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ x + 2 + 2x - 3 + x - 1 + x - 3 = 3x - 12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ x = -3{,}5. \end{cases} \quad \text{Нет решений.}$$

Ответ: нет решений.

Пример 4. Решить уравнение

$$x^2 + |x - 2| + |x| + |x + 2| + |x - 3| + |x + 3| - 4 = 0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$|x - 2| + |x| + |x + 2| + |x - 3| + |x + 3| = 4 - x^2.$$

Левая часть уравнения неотрицательна. Итак, уравнение будет иметь решение при $4 - x^2 \geq 0$, откуда $-2 \leq x \leq 2$. Кроме того, левая часть уравнения является четной функцией, то есть если x_0 — корень данного уравнения, то и $-x_0$ тоже его корень.

Таким образом, достаточно найти корни данного уравнения на промежутке $0 \leq x \leq 2$, а если они есть, то к ним следует добавить корни, противоположные по знаку найденным. На данном промежутке имеем:

$$x^2 - x + 2 + x + x + 2 - x + 3 + x + 3 - 4 = 0,$$

откуда $x^2 + x + 6 = 0$.

Уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Упражнения

Решить уравнение:

5. $\dfrac{|x + 3|}{x + 3} = 1.$

6. $|x + 1| = 2x + 1.$

7. $|3 - x| = 2x + 9.$

8. $|x| - |x - 2| = 2.$

9. Найти наименьшее целое число, удовлетворяющее уравнению $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$.

Решить уравнения аналитически

6. $1 + |x| = 0{,}5.$

7. $1 - |x| = 0{,}5.$

8. $\frac{1}{3}|x| - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}.$

9. $0{,}3|x| - 1 = 3 - 0{,}5|x|.$

10. $2|x| - 4{,}5 = 5 - \frac{3}{8}|x|.$

11. $|x - 2| = 3.$

12. $|x| = x + 2.$

13. $|x| = 2x + 1.$

14. $|-x + 2| = 2x + 1.$

Решить уравнение:

15. $|x - 1| + |x + 2| - |x - 3| = 4.$

16. $|2x - 9| + |x - 6| + x = 4.$

17. $5|x - 2| + |x + 1| + |x - 1| + 7 = 3x.$

18. $|3x - 4| = -x + 4.$

19. $\frac{7x + 4}{5} - x = \frac{|3x - 5|}{2}.$

20. $|x - 1| + |x - 2| = 1.$

21. $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9.$

22. $|4x - 1| - |2x - 3| + |x - 2| = 0.$

23. $|x - 1| + |x + 2| - |x - 3| = 4.$

Решение неравенств с модулями

1. (а) $|x|<3$ (г) $|x|>-1$

(б) $|x|>7$ (д) $|x+3|<5$

(в) $|x|\leqslant -2$ (е) $|x-2|>4$

3) $|x-3|>5$; 4) $|x+2|<8$.

Справочный отдел

Решая по определению модуля неравенство с неизвестным под знаком абсолютной величины, имеем:

1. $|f(x)|<a$.

а) Если $a\le 0$, неравенство решений не имеет;

б) Если $a>0$, то данное неравенство эквивалентно неравенству $-a<f(x)<a$.

2. $|f(x)|>a$.

а) Если $a\le 0$, то решением неравенства будет область определения функции $f(x)$;

б) Если $a>0$, то неравенство равносильно совокупности неравенств $f(x)>a$, $f(x)<-a$.

Пример 2. Решить неравенство $\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right|\le 1.$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству $-1\le\dfrac{3x}{x^2-4}\le 1$ или системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{3x}{x^2-4}\le 1,\\[2mm] \dfrac{3x}{x^2-4}\ge -1,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{x^2-4} - 1 \le 0, \\ \dfrac{3x}{x^2-4} + 1 \ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2-3x-4}{(x-2)(x+2)} \ge 0, \\ \dfrac{x^2+3x-4}{(x+2)(x-2)} \ge 0. \end{cases}$$

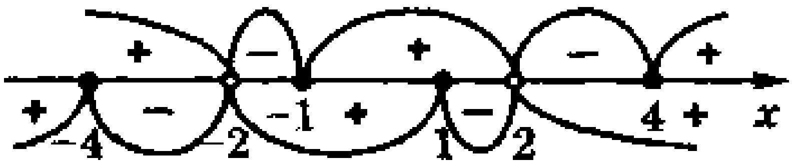


Рис. 1.7

Данная система неравенств равносильна системе

$$\begin{cases} (x-4)(x+1)(x-2)(x+2) \ge 0, \\ (x+4)(x-1)(x-2)(x+2) \ge 0, \\ x \ne \pm 2. \end{cases}$$

Решаем полученную систему методом интервалов (рис. 1.7).

О т в е т: $x \ge 4,\ -1 \le x \le 1,\ x \le -4$.

Пример 3. Решить неравенство $\left|\dfrac{3x+1}{x-5}\right| \ge 1$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств $\dfrac{3x+1}{x-5} \ge 1$ и $\dfrac{3x+1}{x-5} \le -1$, или

$$\frac{2x+6}{x-5} \ge 0 \quad \text{и} \quad \frac{4x-4}{x-5} \le 0.$$

Эти неравенства равносильны таким системам:

$$\begin{cases}(x+3)(x-5) \ge 0,\\ x \ne 5\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}(x-1)(x-5) \le 0,\\ x \ne 5.\end{cases}$$

Решаем неравенство методом интервалов (рис. 1.8, 1.9).

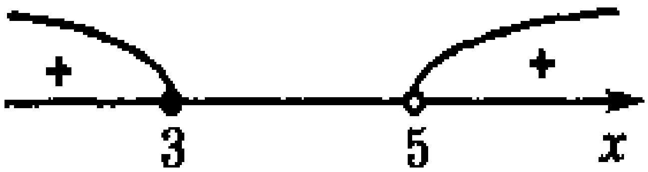


Рис. 1.8

Рис. 1.9

О т в е т: $x \le -3;\ 1 \le x < 5;\ x > 5.$

Пример 4. Решить неравенство $\dfrac{|x+3|}{x^2+5x+6} \ge 2.$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases}\dfrac{x+3}{x^2+5x+6} \ge 2,\\ x+3>0,\\ x \ne -2\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\dfrac{-(x+3)}{x^2+5x+6} \ge 2,\\ x+3<0,\\ x \ne -2.\end{cases}$$

Решаем эти системы неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{(x+3)(x+2)} \geq 2, \\ x > -3, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} - 2 \geq 0, \\ x \neq -2, \\ x > -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x+3}{x+2} \leq 0, \\ x > -3, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$-2 < x \leq -\frac{3}{2}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{-(x+3)}{(x+3)(x+2)} \geq 2, \\ x < -3, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+2} \leq -2, \\ x < -3, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x+5}{x+2} \leq 0, \\ x \neq -2, \\ x < -3. \end{cases}$$

Решений нет.

Решаем эту совокупность неравенств методом интервалов (рис. 1.10, 1.11).

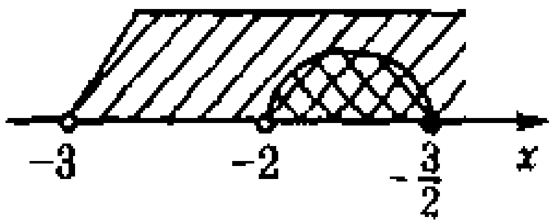


Рис. 1.10

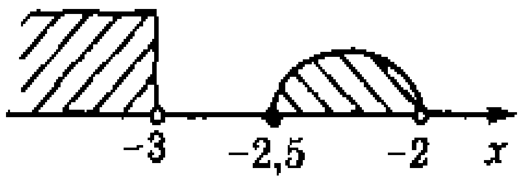


Рис. 1.11

О т в е т: $-2 < x \leq -\frac{3}{2}$.

Упражнения

Решить неравенство:

5. $|4x-1|<11.$

6. $|2x+5|>9.$

7. $|2x-8|\le -9.$

8. $|5x+3|\ge -4.$

9. $\left|\dfrac{2x-3}{x^2-1}\right|\le 2.$

10. $|2x^2-9x+15|\ge 20.$

11. $|x^2-5x|<6.$

12. $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right|<3.$

13. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6}\ge 2.$

14. $\left|\dfrac{3x-2}{x-1}\right|<2.$

15. $\left|\dfrac{3x+2}{x-1}\right|>3.$

16. $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|\ge 1.$

17. $\left|\dfrac{x^2-1}{x+2}\right|<1.$

18. $|x-6|>|x^2-5x+9|.$

19. $|x^3-1|>1-x.$

20. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}\ge 2x.$

21. $|x-1|+|2-x|>3+x.$

22. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0.$

Решить систему неравенств:

23. $\begin{cases}|x^2+5x|<6,\\ |x+1|\le 1.\end{cases}$

24. $\begin{cases}|x^2-4x|<5,\\ |x+1|<3.\end{cases}$

Решить неравенства аналитически и графически.

25. а) $|2x-5|<7$; б) $|3-x|<4$.

26. а) $|3x-5|>10$; б) $|5-x|>\frac{1}{2}$.

27. а) $|x-2|<2x-10$; б) $|2x-1|>x-1$.

28. а) $|x+2|>|x|$; б) $|x|>|1-x|$.

29. а) $|2x+3|>|4x-3|$; б) $|x-1|<|2x-1|$.

30. $|2x-3|-|3x+7|>0$.

31. $|2x+7|-|3x+5|>0$.

32. $|2x+5|-|3x-7|<0$.

33. $|x-1|+|2x-6|<3$.

34. $|x-1|+|x-3|>2$.

35. $|x-1|+|x+2|-|x-3|>4$.

36. $|x+2|+|x+1|+|x-4|>9$.

37. а) $|x^2-x-6|>4$; г) $x^2-|x|>6$;
б) $|x^2-x-3|<9$; д) $|-4x^2-6x-5|<9$;
в) $|2x^2-9x+15|\geqslant 20$; е) $|x^2-5x|<6$.

38. а) $|x^2-x-6|>3+x$;
б) $|x^2-6x+8|<5x-x^2$;
в) $|5x-x^2-6|>x^2-5x+6$;
г) $|x^2-3x+2|>3x-x^2-2$;
д) $|x^2+6x+5|>x^2-8x+16$.

39. а) $|x^2-1|<|x+2|$;
б) $|2x-5|\geqslant 2|x^2-1|$;
в) $|x^2-3x+2|\geqslant|x^2+3x+2|$.

Решить неравенства

40. а) $\frac{2-3|x|}{1+|x|} < 1$

41. а) $\left|\frac{3x-2}{x-1}\right| < 2;$

42. а) $\left|\frac{3x+2}{x-1}\right| > 3;$

Решить неравенства.

43. $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \geqslant 1.$

44. $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right| > 2.$

45. $\left|-\frac{5}{x+2}\right| < \left|\frac{10}{x-1}\right|.$

46. $\left|\frac{x^2-1}{x+2}\right| < 1.$

47. $\left|\frac{2x-3}{x^2-1}\right| \leqslant 2.$

Справочный отдел

Решение иррациональных неравенств

Иррациональными неравенствами *называются неравенства вида $f_1(x) \lessgtr f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — некоторые алгебраические функции, причем хотя бы одна из них — иррациональная функция.*

Обычно решение иррационального неравенства сводится к решению равносильной ему совокупности систем рациональных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство

$$(25 - x^2)\sqrt{x^2 - x - 12} \ge 0.$$

Решение. Область допустимых значений неравенства

$$x^2 - x - 12 \ge 0. \qquad (*)$$

Решив неравенство (*), получим (рис. 1.12) $x \ge 4$, $x \le -3$.

Рис. 1.12

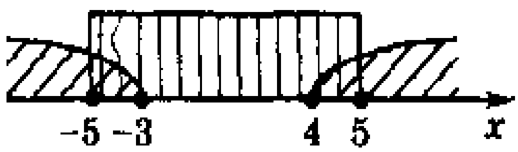


Рис. 1.13

Второй множитель данного неравенства неотрицателен, поэтому множество его решений получим как множество решений систем неравенств

$$\begin{cases} 25 - x^2 \geq 0, \\ x^2 - x - 12 \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 25 \leq 0, \\ x^2 - x - 12 \geq 0. \end{cases}$$

Решая данные системы неравенств, получаем (рис. 1.13): $4 \leq x \leq 5$, $-5 \leq x \leq -3$.

Ответ: $4 \leq x \leq 5$, $-5 \leq x \leq -3$.

Пример 2. Решить неравенство $4 - x < \sqrt{x^2 - 2x}$.

Решение. Область допустимых значений данного неравенства

$$x^2 - 2x \geq 0, \quad x(x - 2) \geq 0 \quad (\text{рис. } 1.14).$$

Отсюда $x \geq 2$ и $x \leq 0$. Рассмотрим случаи:

1. $2 \leq x \leq 4$ и $x \leq 0$. Обе части неравенства неотрицательны, поэтому после возведения их в квадрат получаем равносильное неравенство

$$(4 - x)^2 < x^2 - 2x, \quad \text{или} \quad 16 - 8x + x^2 < x^2 - 2x,$$

откуда $x > \frac{8}{3}$.

Таким образом, множество решений неравенства равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4, \\ x > \frac{8}{3} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ x > \frac{8}{3}, \end{cases}$$

решив которые (рис. 1.15), найдем $\frac{8}{3} < x \leq 4$.

Рис. 1.14

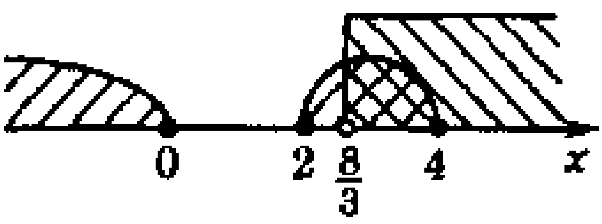


Рис. 1.15

Рис. 1.16

2. $x > 4$. Левая часть неравенства отрицательна, а правая — положительна. Поэтому неравенство справедливо при любом значении x, принадлежащему данному промежутку $x > 4$.

Объединяя полученные решения: $x > 4$ и $\frac{8}{3} < x \le 4$ (рис. 1.16), имеем $x > \frac{8}{3}$.

Пример 3. Решить неравенство

$$3\sqrt{6 + x - x^2} > 4x - 2.$$

Решение. Находим область допустимых значений данного неравенства. Имеем: $6 + x - x^2 \ge 0$, или

$$x^2 - x - 6 \le 0. \qquad (*)$$

Поскольку $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ — корни квадратного трехчлена $x^2 - x - 6$, то решением неравенства (*) является числовой отрезок $-2 \le x \le 3$ (рис. 1.17).

Рассмотрим все возможные случаи (рис. 1.18).

1. $-2 \le x \le \frac{1}{2}$. Левая часть неравенства неотрицательна, а правая — неположительна. Поэтому неравенство выполняется при любом значении x, принадлежащем промежутку $-2 \le x \le \frac{1}{2}$.

2. $\frac{1}{2} < x \le 3$. Обе части неравенства неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат получаем равносильное неравенство: $9(6 + x - x^2) > (4x - 2)^2$, т.е.

$$54 + 9x - 9x^2 > 16x^2 - 16x + 4, \quad x^2 - x - 2 < 0.$$

Рис. 1.17

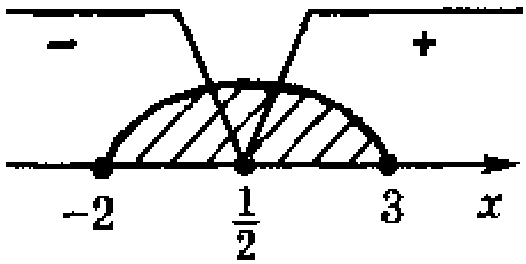


Рис. 1.18

Корни квадратного трехчлена $x^2 - x - 2$ равны $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Решение данного неравенства на рассмотренном числовом промежутке есть числовой интервал $\frac{1}{2} < x < 2$ (рис. 1.19). Объединив полученные результаты $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < x < 2$, получим промежуток $-2 \le x < 2$ (рис. 1.20).

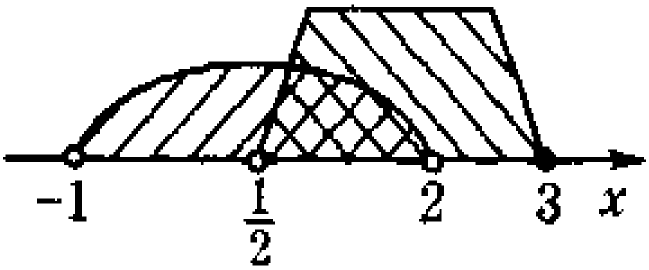


Рис. 1.19

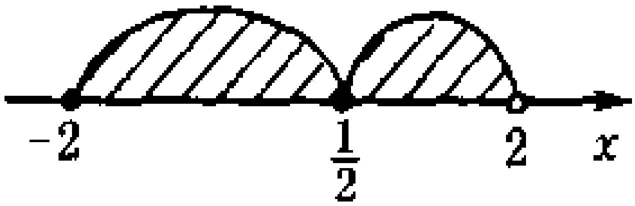


Рис. 1.20

Пример 4. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{2-x} > 1.$$

Решение. Найдем область допустимых значений данного неравенства.

$$\begin{cases} x+3 \ge 0, \\ 2-x \ge 0. \end{cases}$$

Имеем $-3 \le x \le 2$. Запишем данное неравенство в виде $\sqrt{x+3} > \sqrt{2-x} + 1$.

Обе части данного неравенства неотрицательны, поэтому, возводя их в квадрат, получаем неравенство, равносильное данному.

$$x+3 > 2-x+2\sqrt{2-x}+1, \quad x > \sqrt{2-x}.$$

Рассмотрим такой промежуток (рис. 1.21) и все возможные случаи.

1. $-3 \le x \le 0$. Левая часть неравенства отрицательна, а правая — положительна. Поэтому для любого значения x из рассматриваемого промежутка неравенство не выполняется.

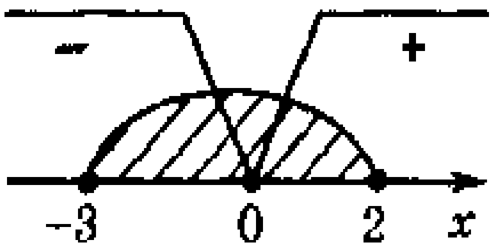


Рис. 1.21

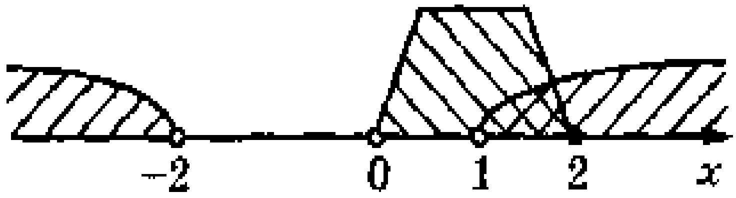


Рис. 1.22

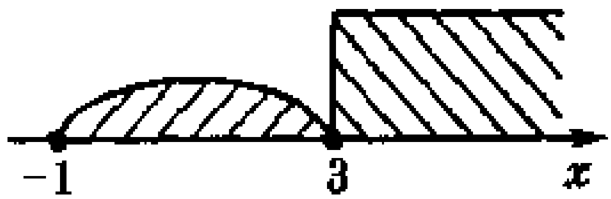


Рис. 1.23

2. $0 < x \le 2$. Обе части неравенства неотрицательны, то есть после возведения в квадрат получаем равносильное неравенство

$$x^2 > 2 - x,$$
$$x^2 + x - 2 > 0.$$

Таким образом, множество решений неравенства — это множество решений системы

$$\begin{cases} 0 < x \le 2, \\ x^2 + x - 2 > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему и иллюстрируя промежутки существования ее решений (рис. 1.22), получаем: $1 < x \le 2$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 3} - 2\sqrt{x^2 + 1} < -5\sqrt{x - 3}.$$

Решение. Область допустимых значений неравенства определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} -x^2 + 2x + 3 \ge 0, \\ x^2 + 1 \ge 0, \\ x - 3 \ge 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \le 0, \\ x^2 + 1 \ge 0, \\ x \ge 3. \end{cases}$$

Корни квадратного трехчлена $x^2 - 2x - 3$ равны $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ (рис. 1.23).

Второе неравенство системы выполняется при любых значениях x. Решение данной системы неравенств — $x = 3$. Подставляя это значение в исходное неравенство, получаем правильное числовое тождество: $-2\sqrt{10} < 0$.

Ответ: $x = 3$.

Существует и общий метод решения неравенств. Его обоснованием является теорема, сформулированная на стр. 86.

Так, чтобы решить неравенство $f(x) \lesseqgtr 0$, где $f(x)$ — произвольная функция, необходимо:

1. Найти область допустимых значений (ОДЗ) функции $f(x)$.

2. Определить все ее корни, то есть решаем уравнение $f(x) = 0$.

3. При помощи найденных корней разбить ОДЗ функции $f(x)$ на промежутки знакопостоянства.

4. Определить, какой знак имеет функция $f(x)$ на каждом из промежутков знакопостоянства, то есть найти множество значений аргумента x, при которых функция $f(x)$ принимает положительные значения, а значит решить неравенство $f(x) > 0$. Аналогично решается неравенство $f(x) < 0$.

Этот способ можно использовать для решения любых неравенств $f(x) \lesseqgtr 0$, если можно найти ОДЗ функции $f(x)$, а также ее корни.

Пример 6. Решить неравенство $\frac{3 - x}{\sqrt{15 - x}} < 1.$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\frac{3 - x - \sqrt{15 - x}}{\sqrt{15 - x}} < 0.$$

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{3 - x - \sqrt{15 - x}}{\sqrt{15 - x}}$ и найдем ее ОДЗ: $15 - x > 0$, $x < 15$.

2. Найдем корни функции $f(x)$:

$$\frac{3 - x - \sqrt{15 - x}}{\sqrt{15 - x}} = 0.$$

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x < 15, \\ \sqrt{15 - x} = 3 - x, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x < 15, \\ 3 - x > 0, \\ (\sqrt{15 - x})^2 = (3 - x)^2. \end{cases}$$

После преобразований получим

$$\begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 5x - 6 = 0, \end{cases} \qquad x = -1.$$

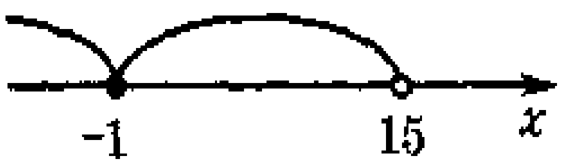


Рис. 1.24

Таким образом, ОДЗ функции делится на два промежутка знакопостоянства (рис. 1.24).

3. Определим знаки функции $f(x)$ на каждом промежутке.

а) $x < -1$; $f(-10) = \dfrac{13 - 5}{5} > 0$, то есть $f(x) > 0$;

б) $-1 < x < 15$; $f(0) = \dfrac{3 - \sqrt{15}}{\sqrt{15}} < 0$, то есть $f(x) < 0$.

Решением исходного неравенства будут те промежутки, где $f(x) < 0$.

Ответ: $-1 < x < 15$.

Упражнения

Решить неравенство:

7. $\sqrt{x} > -1.$

8. $\sqrt{2x-5} > 7.$

9. $\sqrt{\dfrac{1-x}{2x-5}} < 3.$

10. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1.$

11. $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}.$

12. $\sqrt{x+2} > x.$

13. $\sqrt{2x+9} < 3-x.$

14. $\sqrt{x^2-3x-10} > x-2.$

15. $(1+x)\sqrt{x^2+1} > x^2-1.$

16. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-5} \le \sqrt{5-x}.$

17. $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} > -\sqrt{x-5}.$

18. $\sqrt{3x-x^2} < 4-x.$

19. $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0.$

20. $\sqrt{1-x} \leqslant \sqrt[4]{5+x}.$

21. $\sqrt{x+2} > x.$

22. $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x.$

Решить неравенства на множестве действительных чисел.

23. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}>\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{4}}$.

24. $\sqrt{(x-3)(2-x)}<3+2x$.

25. $3\sqrt{6+x-x^2}+2>4x$.

26. $\sqrt{2x^2+5x}-6>2-x$.

27. $(x-2)\sqrt{x^2+1}>x^2+2$.

28. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}<1$.

29. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+8}>3$.

30. $\sqrt{9-x^2}+\sqrt{6x-x^2}>3$.

Доказательство неравенств

При доказательстве неравенств часто делают логическую ошибку. Она состоит в том, что, применяя различные преобразования исходного неравенства и получив очевидное неравенство (например $(a - b)^2 \ge 0$), делают вывод: «из этого следует, что неравенство доказано». То есть мы заранее предполагаем, что исходное неравенство правильно, и в результате преобразований получаем неравенство, правильность которого очевидна. А об исходном неравенстве, которое требовалось доказать, мы так ничего и не знаем.

Правильнее было бы рассуждать в обратном порядке, то есть взять некоторое заведомо правильное неравенство и выполнить преобразования, приводящие к неравенству, которое требуется доказать. Выясним, как это сделать. Будем считать рассматриваемое выше преобразование исходного неравенства как поиск возможного доказательства. Если в результате такого поиска удалось прийти к очевидно правильному неравенству, то можно начинать настоящее доказательство — от этого очевидного неравенства при помощи тех же преобразований, но в обратном порядке, перейти к исходному неравенству.

Следует отметить, что если при сведении данного неравенства к очевидному каждый раз заменять неравенство на равносильное ему, проверяя и подчеркивая это, то обратные преобразования не нужны.

Пример 1. Доказать, что при $a > 0$ выполняется неравенство $a + \frac{4}{a} \ge 4$.

Доказательство. 1-й способ.
(Прямое доказательство).

Для любого действительного числа a квадрат разности $a - 2$ является неотрицательным числом, то есть $(a - 2)^2 \ge 0$ — правильное неравенство. Раскрыв скобки в левой части этого неравенства, получим правильное неравенство: $a^2 - 4a + 4 \ge 0$.

Поскольку по условию $a > 0$, то, разделив все члены последнего неравенства на a, также получим правильное неравенство: $a - 4 + \frac{4}{a} \ge 0$. Прибавим к обеим частям этого неравенства число 4, тогда получим правильное неравенство: $a + \frac{4}{a} \geq 4$. Что и требовалось доказать.

2-й способ. (Обратное доказательство).

Допустим, что доказываемое неравенство правильно, то есть

$$a + \frac{4}{a} \geq 4 \text{ при } a > 0. \qquad (*)$$

Тогда, домножив все члены этого неравенства на $a > 0$, получим равносильное неравенство

$$a^2 + 4 \geq 4a. \qquad (**)$$

Неравенство (**) равносильно такому неравенству:

$$a^2 + 4 - 4a \geq 0. \qquad (***)$$

А последнее неравенство в свою очередь равносильно неравенству

$$(a - 2)^2 \geq 0. \qquad (****)$$

Неравенство (****) верно, поскольку квадрат произвольного действительного числа является числом неотрицательным. Тогда верно и исходное неравенство (*), поскольку оно равносильно неравенству (****).

3-й способ. (Доказательство от противного).

Доказательство от противного основывается на таком логическом законе: *если из выражения A следует выражение B, и выражение B — ложно, то ложно также и выражение A.*

Итак, вернемся к рассматриваемому неравенству. Противоположным неравенству $a + \frac{4}{a} \geq 4$ есть неравенство

$$a + \frac{4}{a} < 4. \qquad (*)$$

Предположим, что неравенство (*) верно. Помножив обе части этого неравенства на $a > 0$, получим равносильное неравенство $a^2 + 4 < 4a$, из которого следует, что

$$a^2 + 4 - 4a < 0, \text{ или } (a - 2)^2 < 0. \qquad (**)$$

Неравенство (**) является следствием неравенства (*), но оно ложно, поскольку квадрат действительного числа

$a - 2$ не может быть отрицательным числом. Значит, ложно и неравенство (*). Поэтому верно противоположное ему неравенство, а именно $a + \frac{4}{a} \geq 4$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать, что для любых действительных x и y

$$x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3 > 0.$$

Решение. Рассмотрим левую часть неравенства как квадратный трехчлен относительно x:

$$A = x^2 + 2x(1 - 2y) + (5y^2 - 6y + 3).$$

Найдем дискриминант этого трехчлена:

$$D = (2(1 - 2y))^2 - 4(5y^2 - 6y + 3) =$$
$$= 4(-y^2 + 2y - 2) = -4((y - 1)^2 + 1) < 0.$$

Поскольку дискриминант квадратного трехчлена отрицателен для любых y, то знак квадратного трехчлена совпадает со знаком коэффициента при x^2, то есть он положителен для всех x и y, что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать, что при любом положительном a справедливо неравенство $\sqrt{a} + \sqrt{a+2} < 2\sqrt{a+1}$.

Решение. Запишем данное неравенство в виде

$$\sqrt{a+2} - \sqrt{a+1} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a}.$$

Перенесем иррациональность из числителя в знаменатель. Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{a+2} + \sqrt{a+1}} < \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}.$$

Полученное неравенство верно при любых положительных значениях a. Оно было получено из предыдущих путем равносильных преобразований, то есть верно и неравенство, которое требовалось доказать.

Пример 4. Доказать, что в произвольном треугольнике удвоенная сумма всех медиан больше, чем сумма всех его сторон.

Решение. Обозначим стороны треугольника через a, b, c, а соответствующие им медианы m_a, m_b, m_c. Рассмотрим треугольник, основанием которого является сторона c, а вершина находится в точке пересечения медиан. Согласно свойствам сторон треугольника имеем:

$$\frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_b > c \quad \text{или} \quad 2m_a + 2m_b > 3c,$$

или

$$2m_a + 2m_b > 3c,$$

$$2m_b + 2m_c > 3a,$$

$$2m_a + 2m_c > 3b.$$

Сложим полученные неравенства:

$$4m_a + 4m_b + 4m_c > 3\,(a + b + c),$$

$$2\,(m_a + m_b + m_c) > \frac{3}{2}\,(a + b + c).$$

Усиливая последнее неравенство, имеем:

$$2\,(m_a + m_b + m_c) > a + b + c,$$

что и требовалось доказать.

Пример 5. Доказать, что для любых значений x справедливо неравенство $x^{18} - x^{17} + x^6 - x + 1 > 0$.

Решение. Определим знак левой части неравенства на каждом из промежутков $x \le 0$, $0 < x < 1$, $x \ge 1$.

1. Если $x \le 0$, то все четные степени x неотрицательны, а $-x^{17}$ и $-x$ приобретают также неотрицательные значения. Значит, левая часть данного неравенства на этом промежутке получает неотрицательные значения и неравенство справедливо.

2. Если $0 < x < 1$, то, преобразовывая левую часть неравенства

$$x^{18} - x^{17} + x^6 - x + 1 = x^{18} + x^6\,(1 - x^{11}) + (1 - x),$$

убеждаемся, что на этом промежутке левая часть неравенства также получает положительные значения. Итак, данное неравенство на промежутке (0; 1) справедливо.

3. Если $x \ge 1$, то, преобразовывая левую часть неравенства

$$x^{18} - x^{17} + x^6 - x + 1 = x^{17}\,(x - 1) + x\,(x^5 - 1) + 1,$$

убеждаемся, что, поскольку выражения в скобках имеют неотрицательные значения, то на этом промежутке данное неравенство также справедливо.

Таким образом, на каждом из рассмотренных промежутков данное неравенство справедливо, то есть оно справедливо при произвольном значении x. Что и требовалось доказать.

Упражнения

Доказать неравенство:

6. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где $a > 0$, $b > 0$.
7. $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.
8. $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
9. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$, где $a > 0$, $b > 0$.
10. $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
11. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
12. $a^2cd + b^2ad + c^2ab + d^2bc \geq 4abcd$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.
13. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
14. $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
15. $(a+b+c+d)^4 \geq 256abcd$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.
16. $(a_1 + a_2 + a_3)^2 \leq 3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$.
17. $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.
18. $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \frac{ab+ac+bc}{3}$.

19. $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$,
где $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.

20. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$,
где $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.

21. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, $a > 0$, $b > 0$.

22. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$,
где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

23. $a^2 + ab + b^2 \geq 0$.

24. $a^2 + c^2 \geq 2b^2$, если $a : b = b : c$.

25. $x^3 + y^3 \geq xy^2 + x^2y$, где $x > 0$, $y > 0$.

26. $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$.

27. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.

28. $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 \geq 0$, где $x > 0$, $y > 0$.

29. $b^2 + a^4 - ab \geq a^3b + 4a^2b$, где $ab < 0$.

30. $a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4 \geq 6a^2b^2$, где $ab > 0$.

31. $x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 9 \geq 0$.

32. $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$.

33. $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + a^2 + a(x + y + z + u) \geq 0$.

34. $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 \geq 2x + 12y + 6z$.

35. $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

36. $1 + 2x^4 \geq 2x^3 + x^2$.

37. $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geq 6abc$.

38. Доказать, что $m + \frac{4}{m^2} \geq 3$ при $m > -1$.

39. Сравнить по величине $x^3 + 1$ и $x^2 + x$, где x — действительные числа.

40. $a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128}$, если $a + b \geq 1$.

41. $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$,
если $a + b + c = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛЮБИТЕЛЕЙ ПОДУМАТЬ

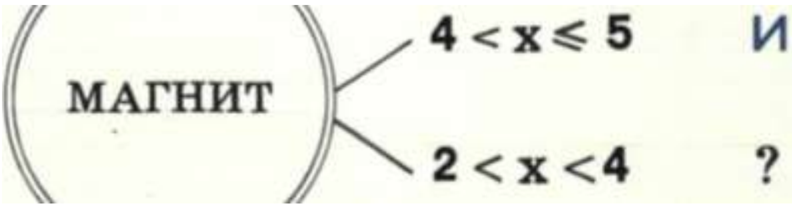
1. Найти неизвестное число

$4{,}3 < x < 5{,}4$	$4x - 2 = 18$
$6{,}1 < x < 7{,}4$	$18 - 3x = -3$
$0{,}2 < x < 1{,}3$	$4x + 7 =$?

2. Найти неизвестное число

$Д \leqslant X < Е$	5
$С < X \leqslant Т$	20
$Б < X < Г$	?

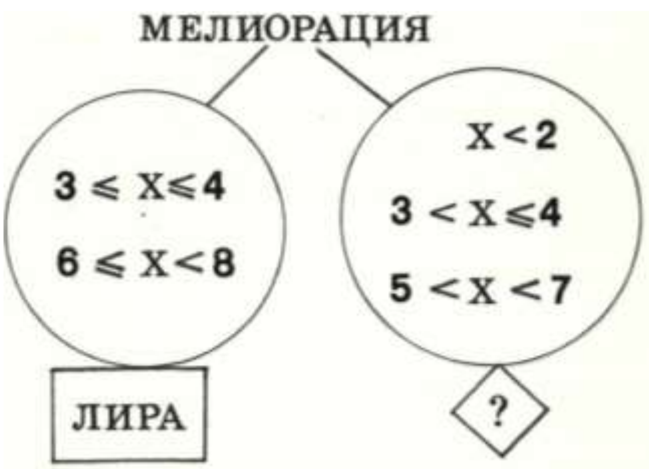
3. Найти неизвестную букву



4. Найти неизвестный числовой промежуток

МАКЕТ	КАМИН	МАК
$-1 < X \leqslant 5$	$X > 2$	?

5. Найти неизвестную слово



6. Найти неизвестную букву

$x \leqslant 5$	$x > 4$	5
КОРА	ЗВЕНО	?

7. Найти неизвестную слово

СТВОЛ	$3x - 1 = 8$	СТОЛ
СТИШОК	$-3 < x - 4 < 1$	?

8. Найти неизвестную слово

СТЕПЕНЬ	$x < 4$	ПЕНЬ
БАНТИК	$(x - 4)(x - 5) = 0$	?

9. Найти неизвестную букву

2754	$1 < 2x - 1 < 5$	7
ПРОЕКТ	$2 < x - 3 \leqslant 3$	?

10. Найти неизвестную букву

$9{,}1 < x < 10{,}2$	И
$4{,}7 < x < 5{,}3$	?

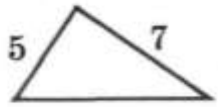
11. Найти неизвестную букву

$-5 < x \leqslant 3$	$x > 2$	3
СТРИЖ	ЖУК	?

12. Найти неизвестное неравенство

ТРАПЕЦИЯ	ТРАП	$x < 5$
СВИСТОК	СТО	?

13. Найти неизвестное неравенство

$\sqrt{x-2}$	
$x \geq 2$	?

14. Найти неизвестное неравенство

$-7 \leq x \leq 10$	$-7 < x \leq 10$
СПОРТ	?

15. Найти неизвестное неравенство

СЛОВО	ЛОВ
$-3 \leq x \leq 8$	?

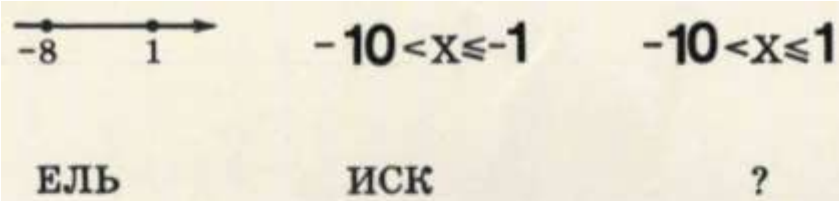
16. Найти неизвестное число

ТРАПЕЦИЯ	ТРАП	$x < 5$
4023	$x \geq 3$	?

17. Найти неизвестную слово

РОВЕСНИК	$3 \leq x < 6$	ВЕС
ТРАНСПОРТИР	$5 \leq x \leq 9$	?

18. Найти неизвестную слово



Ответы и решения

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛЮБИТЕЛЕЙ ПОДУМАТЬ

1. 11. **2.** 3. **3.** 4. **4.** $2 < x \le 5$. **5.** МИР. **6.** 0.
7. СОК. **8.** БАНК. **9. Т**. **10.** Д. **11.** Ж.
12. $3 < x \le 7$. **13.** $2 < x \le 12$. **14.** ПОРТ. $-3 < x \le 7$.
16. 3. **17.** ПОРТ. **18.** КИСЕЛЬ.