МАТЕМАТИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

В ПОМОЩЬ ПОВТОРЯЮЩИМ МАТЕМАТИКУ ПО СПРАВОЧНИКАМ

Тема 9. ИСКУССТВЕННЫЕ ПРИЁМЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Содержание

.

Системы уравнений второй степени.

703. 1) $\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 28, \\ x + y = 11. \end{cases}$

704. 1) $\begin{cases} xy = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 12, \\ 2x - y = 10. \end{cases}$

Решить системы уравнений:

705. 1) $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7. \end{cases}$

706. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y = 0, \\ y + 2x = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ x - y = -3. \end{cases}$

707. 1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{4}{5}, \\ x - y = 4. \end{cases}$

708. 1) $\begin{cases} (x - 1)(y - 1) = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x - 2)(y + 1) = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

710. 1) $\begin{cases} \frac{4}{x-1} - \frac{5}{y+1} = 1, \\ \frac{3}{x+3} = \frac{2}{y}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3}{x+5} + \frac{2}{y-3} = 2, \\ \frac{4}{x-2} = \frac{1}{y-6}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1 + x + x^2}{1 + y + y^2} = 3, \\ x + y = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x^2 + y + 1}{y^2 + x + 1} = \frac{3}{2}, \\ x - y = 1. \end{cases}$

711. 1) $\begin{cases} (x - 2)(y - 3) = 1, \\ \frac{x-2}{y-3} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{y + 3}{(3x - y)(3y - x)} = \frac{1}{2}, \\ \frac{x-y}{x+y} = \frac{2}{5}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{3x - 2}{y + 5} + \frac{y}{x} = 2, \\ x - y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{2x - 5}{x - 2} + \frac{2y - 3}{y - 1} = 2, \\ 3x - 4y = 1. \end{cases}$

714. Решить графически и алгебраически следующие системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2-y^2=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x^2-y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy=8, \\ y=x^2. \end{cases}$

Решить системы уравнений:

715. 1) $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x+y-xy=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2xy+y=10, \\ x-2xy+y=-2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy-x+y=7, \\ xy+x-y=13; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy+x+y=29, \\ xy-2(x+y)=2. \end{cases}$

716. 1) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy, \\ 4x-4y=xy; \end{cases}$

717. 1) $\begin{cases} (x+y)(8-x)=10, \\ (x+y)(5-y)=20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2-3xy+5y-5=0, \\ (x-2)(y-1)=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-5y^2-3x-y+22=0, \\ (x-3)(y-2)=y^2-3y+2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=45, \\ (x-y)^2-2(x-y)=3. \end{cases}$

Искусственные приемы решения систем уравнений

Классифицировать системы уравнений по методам их решения сложнее, чем уравнения. Внешне похожие системы иногда решаются разными методами. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.517. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3=7, \\ x^2y-xy^2=2. \end{cases}$$

Решение. Умножим обе части второго уравнения системы на -3. Имеем:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ -3x^2y + 3xy^2 = -6. \end{cases}$$

Складывая почленно обе части уравнений системы, получаем: $(x - y)^3 = 1$, $x - y = 1$. Решим систему:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2y - xy^2 = 2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = 1, \\ xy\,(x - y) = 2, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Дальнейшее решение этой системы не составляет труда.

Ответ: $(2; 1)$, $(-1; -2)$.

Пример 1.518. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$$

Решение. Данная система внешне напоминает предыдущую систему, но решать ее следует совсем другим способом.

Сравним свободные члены уравнений системы:

$$\begin{cases} 6x^3 - 6y^3 = 42, \\ 7x^2y + 7xy^2 = 42. \end{cases}$$

Тогда имеем: $6x^3 - 6y^3 = 7x^2y + 7xy^2$.

Разделим обе части равенства на y^3 $(y \neq 0)$:

$$\frac{6x^3}{y^3} - 6 = \frac{7x^2}{y^2} + \frac{7x}{y}.$$

Обозначим $\dfrac{x}{y} = a$. Получаем: $6a^3 - 7a^2 - 7a - 6 = 0$. Решая полученное кубическое уравнение, имеем $a = 2$.

Возвращаемся к подстановке $\dfrac{x}{y} = 2$ и решение данной системы сводим к решению равносильной ей системы:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 1)$.

Системы уравнений, левые части которых однородны

Рассмотрим решение систем вида

$$\begin{cases} A\ (x;\ y) = a, \\ B\ (x;\ y) = b, \end{cases}$$

где a и b — числа, а $A\ (x;\ y)$ и $B\ (x;\ y)$ — однородные выражения относительно x и y.

Пример 1.519. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy - y^2 = 1, \\ 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 6. \end{cases}$$

Решение. 1-й способ. Сравним правые части уравнений системы. Для этого обе части первого уравнения умножим на 6:

$$\begin{cases} 12x^2 - 18xy - 6y^2 = 6, \\ 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 6. \end{cases}$$

Тогда $12x^2 - 18xy - 6y^2 = 3x^2 - 4xy + 2y^2$. Отсюда $9x^2 - 14xy - 8y^2 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно x, имеем:

$$x = \frac{7y \pm 11y}{9}.$$

Данная система уравнений равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} x = 2y, \\ 2x^2 - 3xy - y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{9}y, \\ 2x^2 - 3xy - y^2 = 1. \end{cases}$$

Решая их способом подстановки, имеем:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ 8y^2 - 6y^2 - y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{9}y, \\ \frac{32}{81}y^2 + \frac{4}{3}y^2 - y^2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$,

$$\left(-\frac{4}{\sqrt{59}};\ \frac{9}{\sqrt{59}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{59}};\ -\frac{9}{\sqrt{59}}\right).$$

2-й способ. Так же, как и в предыдущем решении, получаем однородное уравнение

$$9x^2 - 14xy - 8y^2 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на y^2 ($y \neq 0$). Имеем:

$$\frac{9x^2}{y^2} - \frac{14x}{y} - 8 = 0.$$

Обозначим $\frac{x}{y} = z$. Уравнение примет вид

$$9z^2 - 14z - 8 = 0,$$

откуда $z_1 = 2$, $z_2 = -\frac{4}{9}$. Данная система равносильна совокупности систем, каждую из которых решаем методом подстановки:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ 2x^2 - 3xy - y^2 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{4}{9}, \\ 2x^2 - 3xy - y^2 = 1. \end{cases}$$

3-й способ. Применим подстановку $y = mx$:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3mx^2 - m^2x^2 = 1, \\ 3x^2 - 4mx^2 + 2m^2x^2 = 6, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2\,(2 - 3m - m^2) = 1, \\ x^2\,(3 - 4m + 2m^2) = 6. \end{cases}$$

Разделим левую и правую части первого уравнения системы на соответствующие части второго уравнения:

$$\frac{2 - 3m - m^2}{3 - 4m + 2m^2} = \frac{1}{6},$$

откуда $8m^2 + 14m - 9 = 0$, $m_1 = \frac{1}{2}$; $m_2 = -\frac{9}{4}$.

Данная система равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}\,x, \\ 2x^2 - 3xy - y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -\frac{9}{4}\,x, \\ 2x^2 - 3xy - y^2 = 1. \end{cases}$$

Эти системы легко решаются методом подстановки.

Упражнения

Решить системы уравнений:

1.520. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1, \\ 2x^2 + xy - y^2 = 2. \end{cases}$

1.521. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ 3xy - x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$

1.522. $\begin{cases} 5x^2 - 3y^2 - xy^2 = 1, \\ xy + y^2 = 2. \end{cases}$

1.523. $\begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 = 3, \\ 2x^2 + 5xy - 7y^2 = 0. \end{cases}$

Применение теоремы Виета при решении систем уравнений

Рассмотрим системы вида

$$\begin{cases} ax \pm by = m, \\ xy = n \end{cases}$$

и сводящиеся к ним.

Пример 1.524. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 5y = 11, \\ xy = -2. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} 3x + (-5y) = 11, \\ 3x(-5y) = 30. \end{cases}$$

Можно утверждать, что значения $3x$ и $-5y$, удовлетворяющие данной системе уравнений, являются корнями уравнения, составленного при помощи обратной теоремы Виета: $a^2 - 11a + 30 = 0$, откуда $a_1 = 6$, $a_2 = 5$. Итак,

$$\begin{cases} 3x = 6, \\ -5y = 5 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x = 5, \\ -5y = 6. \end{cases}$$

Ответ: $(2; -1)$; $\left(\frac{5}{3}; -\frac{6}{5}\right)$.

Пример 1.525. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

Решение. Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} xy + (x - y) = 3, \\ xy\,(x - y) = 2. \end{cases}$$

Значения xy и $x - y$, удовлетворяющие этой системе уравнений, являются корнями уравнения, составленного на основании утверждения, обратного теореме Виета: $a^2 - 3a + 2 = 0$. Решая полученное уравнение, имеем: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$. Данную систему уравнений можно заменить совокупностью равносильных систем

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + (-y) = 2, \\ x\,(-y) = -1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + (-y) = 1, \\ x\,(-y) = -2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{array}{ll} b^2 - 2b - 1 = 0, & c^2 - c - 2 = 0, \\ b_1 = 1 + \sqrt{2}, & c_1 = 2, \\ b_2 = 1 - \sqrt{2}, & c_2 = -1. \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2}, \\ y_1 = -1 + \sqrt{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 - \sqrt{2}, \\ y_2 = -1 - \sqrt{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -2. \end{cases}$$

О т в е т: $(1 + \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$; $(1 - \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2})$; $(2; 1)$; $(-1; -2)$.

Упражнения

Решить систему уравнений:

1.526. $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$

1.527. $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$

721. 1) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=8, \\ xy=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=-15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=-5, \\ xy=-36. \end{cases}$

722. 1) $\begin{cases} x-y=7, \\ xy=18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=16, \\ xy=-48; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=-2. \end{cases}$

723. 1) $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=-2a^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=2a, \\ xy=-3a^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=b, \\ xy=2b^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=a+2b, \\ xy=ab+b^2. \end{cases}$

724. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ xy=20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ xy=15. \end{cases}$

1.528. $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=3. \end{cases}$

1.529. $\begin{cases} 3x-2y=4, \\ xy=2. \end{cases}$

1.530. $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x+y=3. \end{cases}$

1.531. $\begin{cases} (x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1, \\ x+y=0{,}9. \end{cases}$

1.532. $\begin{cases} x^2y+xy^2=6, \\ xy+(x+y)=5. \end{cases}$

1.533. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9, \\ (x+y)\dfrac{x}{y}=20. \end{cases}$

1.534. $\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7. \end{cases}$

1.535. $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+xy^2=20. \end{cases}$

Решение круговых систем

Системы уравнений, которые сводятся к простейшим системам уравнений вида

$$1)\ \begin{cases} x + y = a, \\ x + z = b, \\ y + z = c \end{cases} \quad \text{или} \quad 2)\ \begin{cases} xy = a, \\ xz = b, \\ yz = c, \end{cases}$$

условно назовем ***круговыми.***

Решение первой системы сводится к почленному сложению обеих частей уравнений. Получим

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2}. \qquad (*)$$

Далее, используя последовательно первое, второе, третье уравнения системы и уравнение (*), находим неизвестные x, y, z.

Решение второй системы сводится к почленному умножению обеих частей уравнений. Получим

$$x^2y^2z^2 = abc.$$

Извлекая корни из обеих частей уравнения и используя последовательно каждое из уравнений системы, находим неизвестные x, y, z.

Пример 1.536. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)=\dfrac{13}{6}, \\ y\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)=\dfrac{20}{3}, \\ z\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{15}{2}. \end{cases}$$

Решение. Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}=\dfrac{13}{6}, \\ \dfrac{yz}{x}+\dfrac{xy}{z}=\dfrac{20}{3}, \\ \dfrac{xz}{y}+\dfrac{zy}{x}=\dfrac{15}{2}. \end{cases}$$

Сложив почленно уравнения системы, имеем

$$\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=\frac{49}{6}.$$

Используя последовательно первое, второе и третье уравнения системы, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{yz}{x}=6, \\ \dfrac{xz}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{xy}{z}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Перемножив почленно обе части уравнений системы, получим $xyz = 6$. Рассматривая последовательно первое, второе и третье уравнения системы с данными уравнениями, находим

$$\begin{cases} x^2=1, \\ y^2=4, \\ z^2=9, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2, \\ z_1 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -2, \\ z_2 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -1, \\ y_3 = 2, \\ z_3 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -2, \\ z_4 = 3. \end{cases}$$

Ответ: (1; 2; 3), (1; –2; –3),
(–1; 2; –3), (–1; –2; 3).

Пример 1.537. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + y + x = 5, \\ yz + y + z = 11, \\ xz + z + x = 7. \end{cases}$$

Решение. Прибавим к обеим частям каждого уравнения по 1:

$$\begin{cases} xy + y + x + 1 = 6, \\ yz + y + z + 1 = 12, \\ xz + z + x + 1 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} y(x + 1) + (x + 1) = 6, \\ y(z + 1) + (z + 1) = 12, \\ z(x + 1) + (x + 1) = 8, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 6, \\ (z + 1)(y + 1) = 12, \\ (x + 1)(z + 1) = 8. \end{cases}$$

Перемножив почленно обе части уравнений системы, получим $(x + 1)^2 (y + 1)^2 (z + 1)^2 = 24^2$. Извлекая корни из обеих частей уравнения и используя последовательно каждое из уравнений системы, имеем:

$$\begin{cases} z + 1 = \pm 4, \\ x + 1 = \pm 2, \\ y + 1 = \pm 3. \end{cases}$$

Ответ: (1; 2; 3); (–3; –4; –5).

Упражнения

Решить систему уравнений:

1.538. $\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$

1.539. $\begin{cases} \sqrt[3]{x + y} + \sqrt[3]{y + z} = 3, \\ \sqrt[3]{y + z} + \sqrt[3]{z + x} = 1, \\ \sqrt[3]{z + x} + \sqrt[3]{x + y} = 0. \end{cases}$

1.540. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3, \\ \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5, \\ \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4. \end{cases}$ **1.542.** $\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$

1.541. $\begin{cases} \dfrac{3}{xy}+\dfrac{15}{yz}=2, \\ \dfrac{15}{yz}+\dfrac{5}{xz}=2, \\ \dfrac{5}{zx}+\dfrac{3}{xy}=2. \end{cases}$ **1.543.** $\begin{cases} x^2-(y-z)^2=1, \\ y^2-(z-x)^2=4, \\ z^2-(x-y)^2=9. \end{cases}$

Использование теоремы Виета для кубического уравнения при решении систем уравнений

Если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

то

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b, \\ x_1x_2x_3=-c. \end{cases}$$

Справедливо и обратное утверждение.

Приведенная выше система уравнений — это аналог формулы Виета для кубического уравнения.

Пример 1.544. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ xyz=2. \end{cases}$$

Решение. Возведем в квадрат первое уравнение системы:

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=16.$$

Используя второе уравнение системы, находим $xy+xz+yz=5$. Итак, данная система равносильна системе

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ xy+xz+yz=5, \\ xyz=2. \end{cases}$$

По теореме Виета делаем вывод, что значения x, y и z, удовлетворяющие данной системе уравнений, являются корнями кубического уравнения $a^3 - 4a^2 + 5a - 2 = 0$, решая которое, получим $a_{1,2} = 1$, $a_3 = 2$.

Выбирая для x, y и z различные комбинации из этих чисел, получаем решения данной системы.

Ответ: (1; 1; 2); (1; 2; 1); (2; 1; 1).

Упражнения

Решить системы уравнений:

1.545. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 3, \\ \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} = 3, \\ \dfrac{1}{xyz} = 1. \end{cases}$ **1.546.** $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1{,}5, \\ xyz = 8. \end{cases}$

Симметричные системы уравнений

При решении систем, симметричных относительно x и y, часто целесообразно вводить новые вспомогательные неизвестные:

$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v, \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 + y^2 = u, \\ xy = v, \end{cases}$ или $\begin{cases} x - y = u, \\ xy = v \end{cases}$ и т.д.

Пример 1.547. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ xy\,(x + y) = 6. \end{cases}$$

Решение. Данная система симметрична относительно x и y. Запишем ее в виде

$$\begin{cases} (x + y)\,(x^2 - xy + y^2) + x^3y^3 = 17, \\ xy\,(x + y) = 6, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} (x + y)\,((x + y)^2 - 3xy) + x^3y^3 = 17, \\ xy\,(x + y) = 6. \end{cases}$$

Положив

$$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v, \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} u(u^2-3v)+v^3=17, \\ uv=6, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u^3-3uv+v^3=17, \\ uv=6, \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} u^3+v^3=35, \\ u^3v^3=216. \end{cases}$$

Применив утверждение, обратное теореме Виета, получим

$$a^2-35a+216=0.$$

Решая это уравнение, находим $a_1=27$, $a_2=8$. Тогда

$$\begin{cases} u=3, \\ v=2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u=2, \\ v=3. \end{cases}$$

Чтобы определить x и y, данную систему уравнений заменяем совокупностью равносильных систем

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=2, \\ xy=3. \end{cases}$$

Ответ: (2; 1); (1; 2).

Упражнения

Решить систему уравнений:

1.548. $\begin{cases} x^2+y^2-3x-3y=-2, \\ 2x^2-xy+2y^2=20. \end{cases}$

1.549. $\begin{cases} x^4+y^4-2x^2-2y^2=62, \\ 3x^2-xy+3y^2=27. \end{cases}$

1.550. $\begin{cases} 2x^2+2y^2-x-y=49, \\ xy+x^2+y^2=13. \end{cases}$

1.551. $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^3y^3=-8. \end{cases}$

1.552. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}=\dfrac{13}{6}, \\ x+y=5. \end{cases}$

1.553. $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x}, \\ y^2-x-5=0 \end{cases}$

1.554. $\begin{cases} y^2-xy=-12, \\ x^2-xy=28. \end{cases}$

1.555. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6, \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$

1.556. $\begin{cases} 12\,(x + y)^2 + x = 2{,}5 - y, \\ 6\,(x - y)^2 + x = 0{,}125 + y. \end{cases}$

1.557. $\begin{cases} \dfrac{x + y}{x - y} + \dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{13}{6}, \\ xy = 5. \end{cases}$

1.558. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4. \end{cases}$

1.559. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3. \end{cases}$

1.560. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$

1.561. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3. \end{cases}$

1.562. $\begin{cases} x^2 + y = y^2 + x, \\ y^2 + x = 6. \end{cases}$

1.563. $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 - xy} + \dfrac{4}{y^2 - xy} = -\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{7}{x^2 - xy} - \dfrac{3}{y^2 - xy} = \dfrac{6}{5}. \end{cases}$

1.564. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23. \end{cases}$

1.565. $\begin{cases} (x + y)^2 + 2x = 35 - 2y, \\ (x - y)^2 - 2y = 3 - 2x. \end{cases}$

1.566. $\begin{cases} \dfrac{4}{x + y - 1} - \dfrac{5}{2x - y + 3} + \dfrac{5}{2} = 0, \\ \dfrac{3}{x + y - 1} + \dfrac{1}{2x - y + 3} + \dfrac{7}{5} = 0. \end{cases}$

Решить системы уравнений с тремя неизвестными:

738*. 1) $\begin{cases} xy=2, \\ yz=6, \\ xz=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=6, \\ yz=12, \\ xz=8. \end{cases}$

739*. 1) $\begin{cases} xy=2, \\ xz=3, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=4, \\ yz=6, \\ x^2+z^2=13. \end{cases}$

740*. 1) $\begin{cases} x+y=1, \\ y+z=2, \\ xz=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=2, \\ y+z=7, \\ x^2+z^2=41. \end{cases}$

741*. 1) $\begin{cases} y-x=3, \\ y-z=4, \\ x^2+y^2+z^2=30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=5, \\ x+z=6, \\ xy+xz+yz=29. \end{cases}$

742*. 1) $\begin{cases} xy+yz=9, \\ yz+xz=5, \\ xy+xz=-16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy+xz=7, \\ xy+yz=15, \\ yz+xz=16. \end{cases}$

743*. 1) $\begin{cases} x+y=1, \\ z+yz=3, \\ xyz=20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-z=7, \\ y-xy=6, \\ xyz=24. \end{cases}$