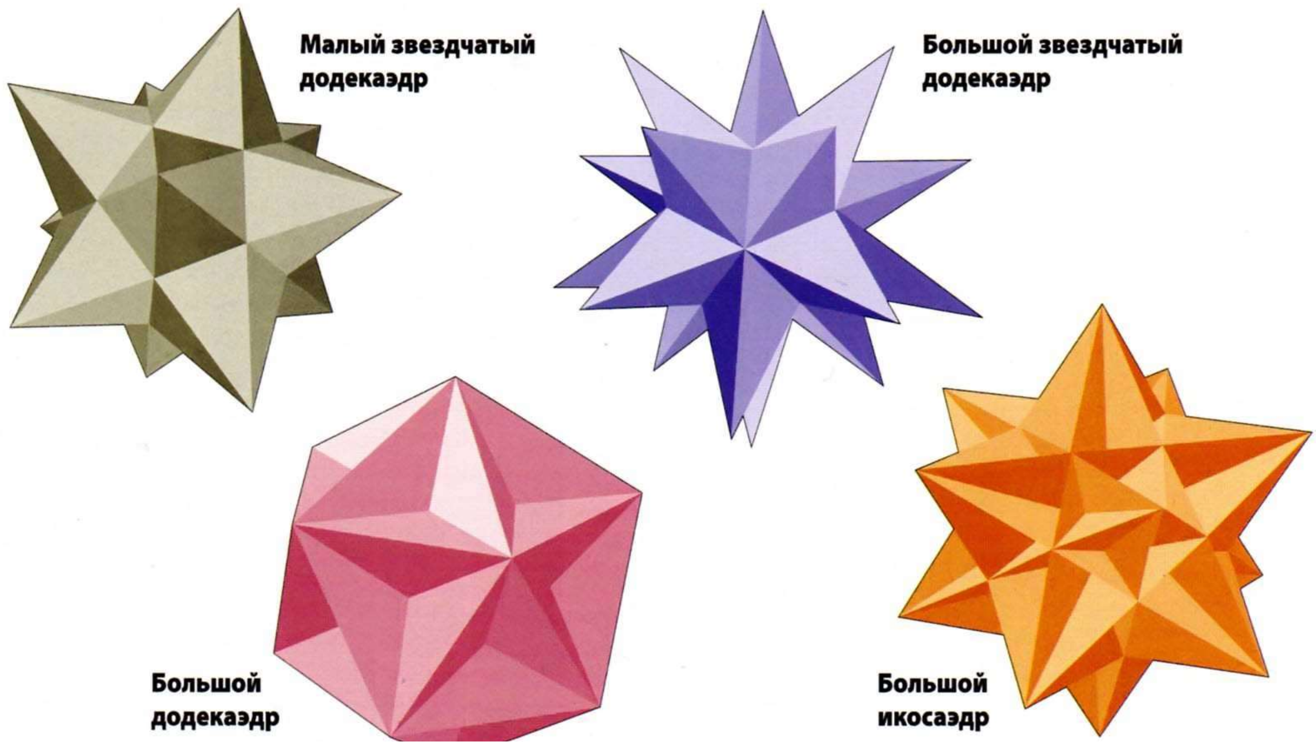
составитель Е.МАНОХА

занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

1

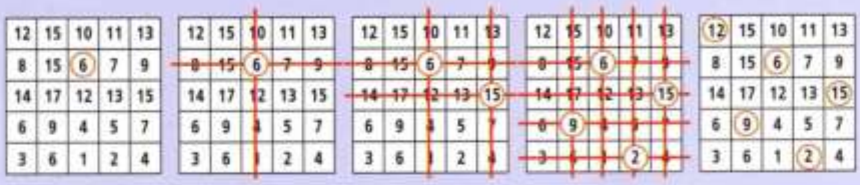
Правильные звездчатые многогранники



12	15	10	11	13
8	15	6	7	9
14	17	12	13	15
6	9	4	5	7
3	6	1	2	4

Квадрат Гарднера

Этот занимательный квадрат придумал знаменитый популяризатор математики Мартин Гарднер. Предлагается, выбрав наугад любое число из квадрата, обвести его кружком. Далее следует зачеркнуть все остальные числа в ряду и колонке обведенного числа. Действие повторяется до тех пор, пока не останется единственное не зачеркнутое число. Оно тоже обводится кружком. Удивительно, но, независимо от того, как выбираются числа, сумма чисел, обведенных кружками, всегда будет одна и та же: **44**.



Основания систем счисления

И абакисты, и их оппоненты, — несмотря на их яростные споры — существовали в пределах одной системы счисления, а именно — десятичной. Основание этой системы — 10. Оно определяется по числу значащих цифр в системе. В данном случае, это: 0, 1, 2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Когда мы пишем 14, то имеем в виду: «один десяток и четыре единицы». Аналогично цифра 30 означает «три десятка и ноль единиц». С учетом того, что

$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1000 \ldots$

числа в десятичной системе могут выражаться так:

$$3547 = 3\times10^3 + 5\times10^2 + 4\times10^1 + 7.$$

20 первых чисел, записанных в разных системах счисления

Десятичная	Двоичная	Восьмеричная	Шестнадцатеричная
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

Однако уже в XVII—XVIII вв. математики работали и с иными системами счисления. Например, с двоичной — ее подробно изучил Лейбниц. Кстати, именно двоичная система нашла впоследствии широкое применение в компьютерах.

▲ *Немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716 гг.). Именно ему приписывается разработка двоичной системы счисления.*

Основание 16

Основание системы счисления может быть и больше 10. Примером тому является основание 16 в шестнадцатеричной системе счисления.

Так как значащих знаков тут больше десяти, то «блок» основных цифр приходится пополнять «основными» буквами (в чем-то возвращаясь к опыту древних греков, которые, как мы помним, числа обозначали буквами). В таблице, представленной на этой странице, показано, как пишутся первые 20 чисел в четырех системах счисления (двоичная, восьмеричная, десятичная и шестнадцатеричная).

Пример такой записи в шестнадцатеричной системе — числу десятичной системы 20285 соответствует число 4F3D.

Основание 2

Простейшая система счисления — двоичная. Она основана на двух значащих цифрах — 0 и 1. Здесь последовательность натуральных чисел образуется так:

Десятичные:	0	1	2	3	4	5	6...
Двоичные:	0	1	10	11	100	101	110...

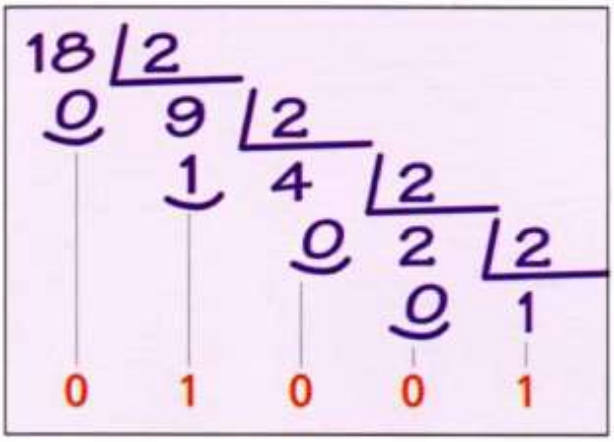
Способ перевода в двоичную систему числа, записанного в десятичной системе, заключается в последовательном делении на число два. Например, для перевода 18 в двоичную систему мы делим это число на два — до тех пор, пока частное не окажется меньшим двойки. После этого мы последовательно записываем это частное и все остатки, которые мы получали при делении (начиная с последнего), — это и будет выражение числа в двоичной системе. Для 18-ти это — 10010. Систему счисления на письме обычно указывают, обозначая основание в качестве подстрочного индекса. Таким образом:

$$18_{10} = 10010_2$$

В десятичной системе:

$$18_{10} = 10 + 8 = 1\times10^1 + 8.$$

▼ *Степени вычислений, невообразимые еще сто лет назад, сегодня доступны любому пользователю. Современный карманный калькулятор имеет ту же вычислительную мощность, что и компьютер 1950-х гг., вот только дешевле он в 30000 раз!*



▲ *Для перевода числа из десятичной системы в двоичную его следует последовательно делить на два — пока частное не окажется меньшим двойки. Записывается это частное и далее по порядку остатки, начиная с последнего. То есть:* $18_{10} = 10010_2$

Аналогично этому в двоичной системе получаем:

$$10010_2 = 1\times2^4 + 0\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 0,$$

что дает нам простой способ преобразования любого «десятичного» числа в «двоичное». Для этого требуется лишь сосчитать количество степеней 2, которое содержит данное число. Иными словами, сколько в нем единиц, «двоек», «четверок», «восьмерок», «шестнадцаток» и т. д.

Например, 17 имеет одну «шестнадцатку», ни одной «восьмерки», ни одной «четверки», ни одной «двойки» и одну единицу — то есть получаем 10001. А в числе 45 — один раз «тридцать два», ни одного — «шестнадцать», один раз «восемь», один раз «четыре», ни одного раза «два» и один раз «единица». Итого: 101101.

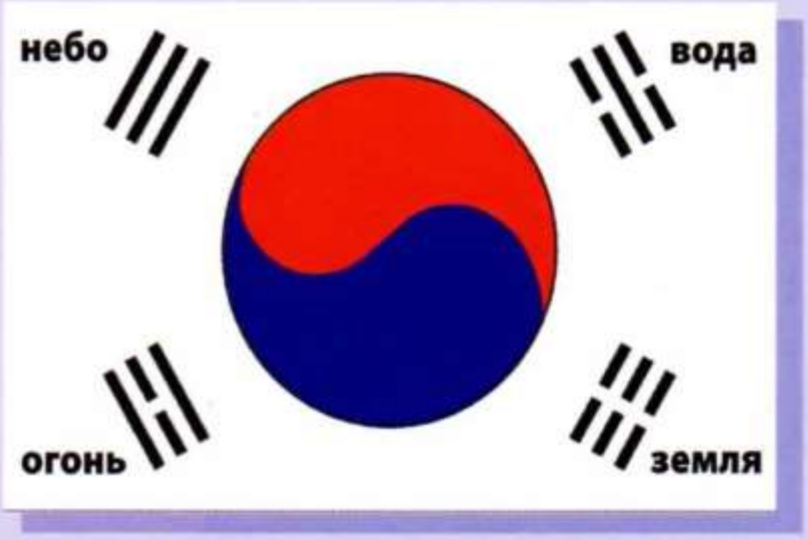
Двоичная система используется не только в вычислительной технике и известной всем телеграфной азбуке Морзе, но и в играх. Одна из таких игр — «Ним». Иногда ее называют еще «Мариенбадом» — по культовому фильму Алена Рене «В прошлом году в Мариенбаде», добавившему ей популярности.

Десятичная система	Двоичная система				
	шест-надцать	восемь	четыре	два	один
17	1	0	0	0	1
14	0	1	1	1	0
9	0	1	0	0	1
20	1	0	1	0	0

◄ *Примеры преобразования чисел из десятичной системы в двоичную.*

Корейский флаг

Флаг Республики Корея образован центральным кругом, графически выражающим двуединство «инь—ян», и четырьмя «триграммами»:



Если принять прерывистую линию — — равной 0, а сплошную линию —— равной 1, то эти «триграммы» соотносятся с двоичными числами 111, 010, 101, 000. Переводя их в десятичную систему, получим: 7, 2, 5, 0. Таким образом, на корейском флаге противоположные символы в сумме неизменно дают число семь, которое всегда и во всех цивилизациях считалось магическим.

НИМ

В Европе первое упоминание об этой игре датируется XV в. Придумали же ее, скорее всего, в Китае. Полный анализ игры в 1901 г. опубликовал профессор математики из Гарвардского университета Чарльз Бутон; он и назвал ее «Ним» — от устаревшей формы английских глаголов «стянуть», «украсть».

В «Ним» играют двое. «Орудиями» игры могут служить палочки, камушки, пуговицы, мандарины — вообще, любые предметы, которые подходят на роль фишек.

Существует множество разновидностей игры. Мы расскажем об одной из наиболее известных. Фишки при этом выкладываются рядами. Рядов может быть сколько угодно, фишек в одном ряду — тоже.

Как играть в «Ним»

Побеждает в игре тот, кто убирает последнюю фишку. Правило всего одно: делая ход, игрок берет столько фишек, сколько хочет, но только из одного ряда.

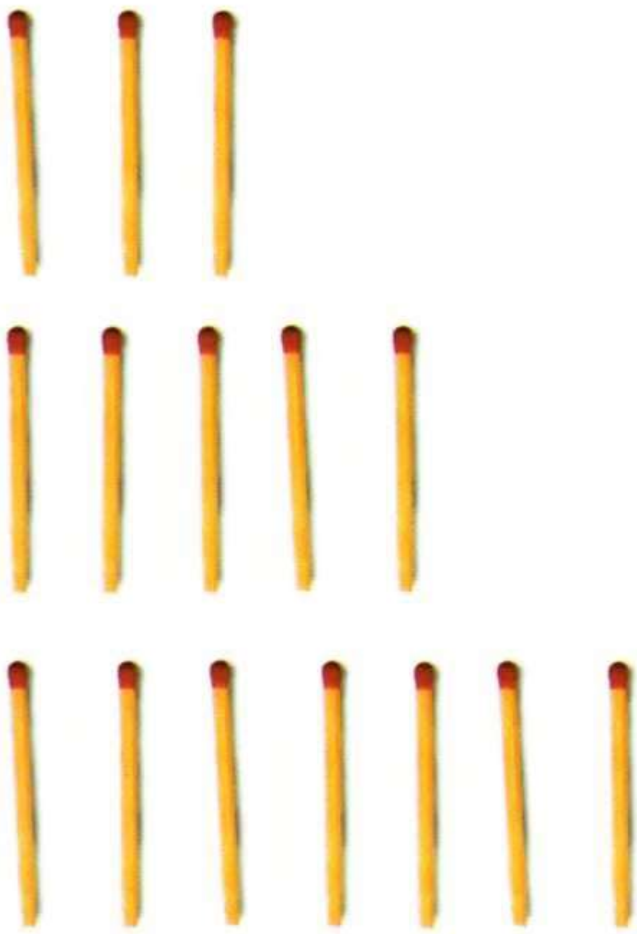
В наипростейшей вариации игра представлена на рисунке слева: фишек (спичек) тут только две.

Очевидно, что в данном случае проигрывает игрок, начинающий партию.

Теперь посмотрим, что происходит в более сложных вариантах. Например, таком:

Здесь выигрывает тот, кто начинает, — он убирает пять предметов из второго ряда и оставляет своему противнику предыдущую позицию.

Вот еще вариант:



В прошлом году в Мариенбаде

«Ним» стал очень популярен после выхода в 1961 г. на экраны фильма режиссера Алена Рене «В прошлом году в Мариенбаде». У игры даже появилось тогда второе название — «Мариенбад». В фильме игра вводится следующим диалогом:

— Я знаю игру, в которую всегда выигрываю.
— Если ты не можешь проиграть, то это не игра.
— Я могу проиграть, но всегда выигрываю.

В этом зашифрованном диалоге игрок признается, что знает логику игры. Он утверждает, что мог бы проиграть. Предполагается, что это возможно, если его сопернику также известна выигрышная стратегия, основанная на двоичной системе. Но это весьма маловероятно («всегда выигрываю»).

Чтобы правильно «разобраться» с ним, нужно воспользоваться методом, основанным на двоичной системе счисления.

Выигрышная стратегия

Первое, что нужно сделать, — это составить небольшую таблицу. В первую колонку записываем количество фишек в каждом ряду, и рядом с ними — «двоичный» вариант (по разрядам). Приводим эту таблицу.

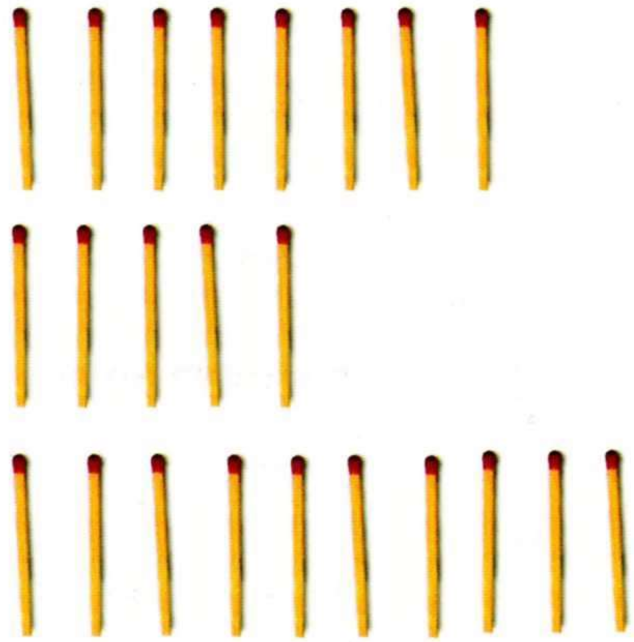
Десятичная система	Двоичная система		
	четыре	два	один
3	0	1	1
5	1	0	1
7	1	1	1
	0	0	1

Далее следует получить «специальную сумму» двоичных колонок, схема тут очень проста: если результат четный, ставим 0, а если нечетный — 1. В нашей таблице результат суммирования будет 001.

Чтобы выиграть в «Ним», надо добиться, чтобы колонки давали в сумме ноль. Это называется «выигрышной позицией». В нашей партии мы к ней перейдем, убрав один предмет из последнего ряда. В результате получаем вот что:

Десятичная система	Двоичная система		
	четыре	два	один
3	0	1	1
5	1	0	1
6	1	1	0
	0	0	0

Другой пример. Предположим «страшную» ситуацию, в которой следующий ход — наш:



Десятичная система	Двоичная система			
	восемь	четыре	два	один
8	1	0	0	0
5	0	1	0	1
10	1	0	1	0
	0	1	1	1

Нашим правильным ходом будет изменить нижний ряд так, чтобы он остался в следующем виде:

Десятичная система	Двоичная система			
	восемь	четыре	два	один
8	1	0	0	0
?	0	0	1	0
10	1	0	1	0
	0	0	0	0

В пересчете это означает, что мы должны, убрав три фишки из второго ряда, оставить там две фишки.

Правильная стратегия в этой игре заключается в том, чтобы всякий раз обеспечивать себе выигрышную позицию. Дальнейшее — дело техники. Попробуйте.

Компьютерный язык

Естественный вопрос — имеют ли описанные системы счисления практическое применение? Имеют, да еще какое! Так, двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы активно используются в информатике. Язык электроники строится на устойчивых парах «включено—выключено», «течет — не течет ток», то есть, по сути, на двоичной системе счисления. Даже спин электрона, описывающий его вращение вокруг собственной оси, может быть ориентирован «кверху» или «книзу». Словом, мы имеем дело с логикой, основанной на оппозиции «да—нет». Каждая из этих двух возможностей представлена 0 и 1, так называемыми «битами» информации.

В компьютерном мире оперируют термином «байт». Байт представляет собой единицу измерения емкости памяти, объединяющую восемь бит. Самое большое число, которое можно выразить одним байтом — 11111111 (двоичная система), соответствует 255 (десятичная система) и FF (шестнадцатеричная система). А для слов из двух байт (16 бит) используется всего четыре шестнадцатеричные цифры. Для 32 бит — 8 шестнадцатеричных цифр и так далее. Программисту гораздо проще использовать и запоминать число 3E, чем число 00111110.

Золотое сечение

Божественная пропорция

В шедеврах изобразительного искусства нас восхищают их красота, пропорции, гармония и композиционная точность. Удивительно, но почти все из перечисленного базируется на простейшей пропорции, открытой еще в Древней Греции. В дошедшей до нас античной литературе эта пропорция приведена в «Началах» Евклида. Впрочем, считается, что она была известна уже Пифагору. При этом некоторые исследователи утверждают, что пропорцию так называемого «золотого сечения» он позаимствовал у древних египтян и вавилонян. Дело в том, что пропорции пирамиды Хеопса, многих храмов, барельефов, а также предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона точно подчиняются закону золотого сечения.

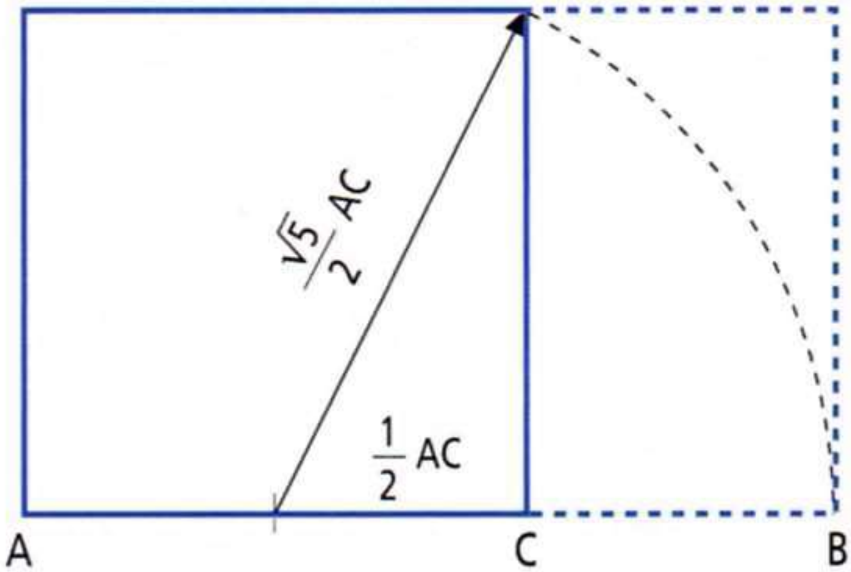
Иллюстрируется золотое сечение следующим образом. Нужно разделить отрезок AB на две части так, чтобы AB/AC = AC/CB.

Это и есть золотое сечение. Само частное от указанного деления называется золотым числом. Как правило, его обозначают буквой Ф. Достаточно несложный расчет, заключающийся в решении уравнения второй степени, дает нам точное значение Ф:

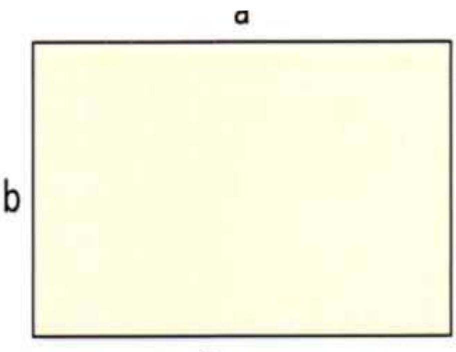
$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$

Золотой прямоугольник

Для построения золотого прямоугольника, чьи стороны находятся в соотношении Ф, выполняются следующие действия. На нижней стороне



$$AB = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ AC$$



$$\frac{a}{b} = \Phi$$

◄▲ Золотой прямоугольник (слева) в Древней Греции был образцом для архитекторов. В этом убеждают, например, пропорции знаменитого Парфенона, в точности повторяющие пропорции золотого прямоугольника. Причем это касается как прямоугольника, образующего основу Парфенона, так и прямоугольников фасада.

АС квадрата обозначается средняя точка, от которой проводится прямая линия до противоположной вершины. Получившийся отрезок откладывается от обозначенной точки на нижней стороне (это можно быстро сделать с помощью циркуля). Отрезок АВ и является нижней стороной золотого прямоугольника. Описанное построение опирается на теорему Пифагора.

Востребованное число

Число Ф, определяя эталон красоты, сегодня пользуется большим «спросом» — вплоть до того, что формат кредитных карточек или проездных железнодорожных билетов подчиняется этой пропорции. Сама природа, похоже, неравнодушна к числу Ф. Закономерности роста большинства популяций грызунов, расположение чешуек на плоде ананаса, развитие раковины улиток и рогов коз, распределение семян в растениях — все это так или иначе соотносится с пропорцией золотого сечения, указывая, что человек был прав, увидев в нем зримое выражение идеи гармонии. Впрочем, истоки и смысл такой востребованности числа Ф нам еще предстоит выяснить.

Особенности золотого числа

При помощи простого карманного калькулятора можно получить некоторые поразительные результаты манипуляций с золотым числом. Например, если его возвести в квадрат, то десятичные разряды останутся неизменными:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$

$$\Phi^2 = 2{,}6180339887\ldots$$

Если мы разделим единицу на золотое число, то эта «история» повторится:

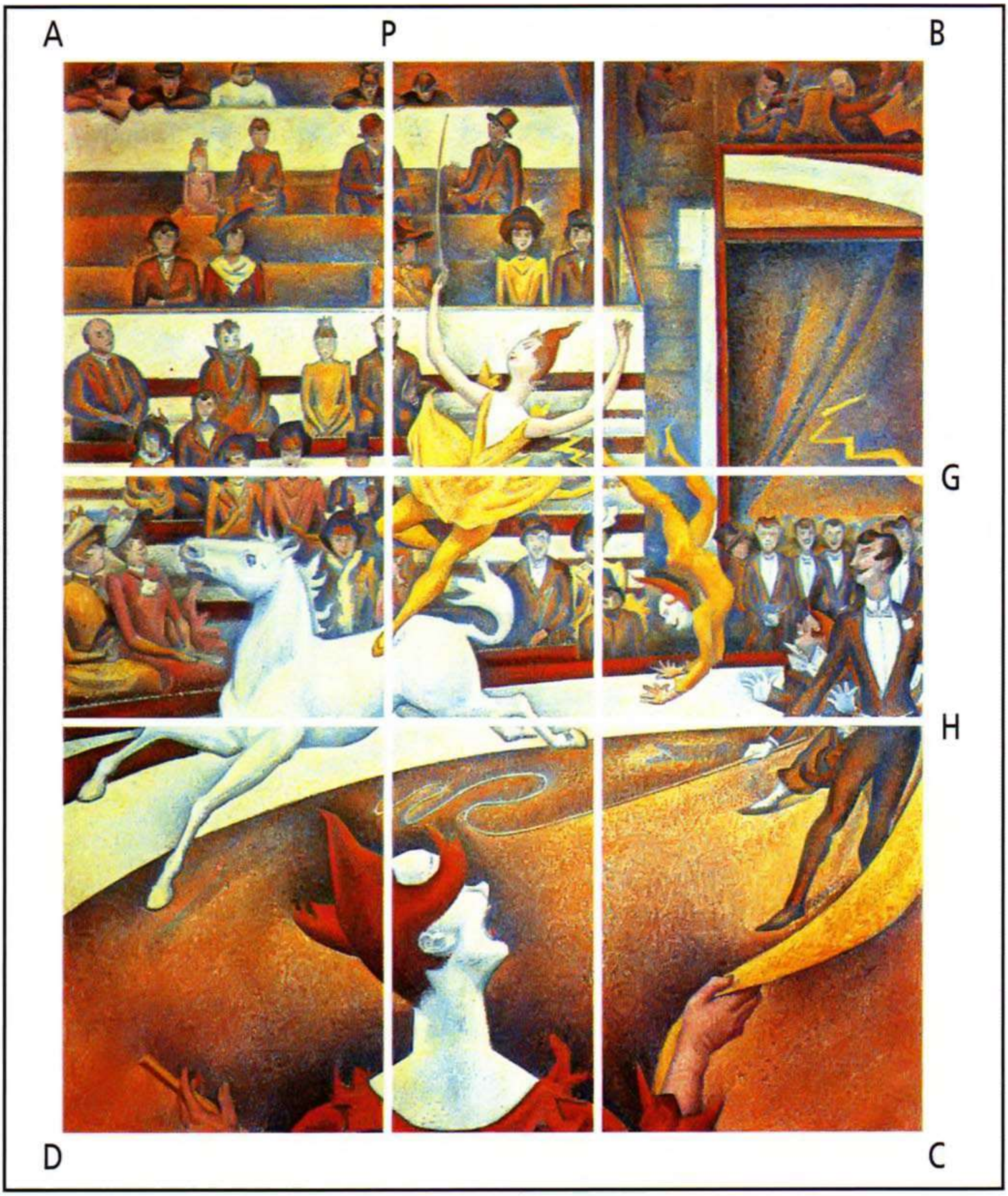
$$\frac{1}{\Phi} = 0{,}6180339887\ldots$$

Еще более удивительно следующее выражение:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}} = \Phi$$

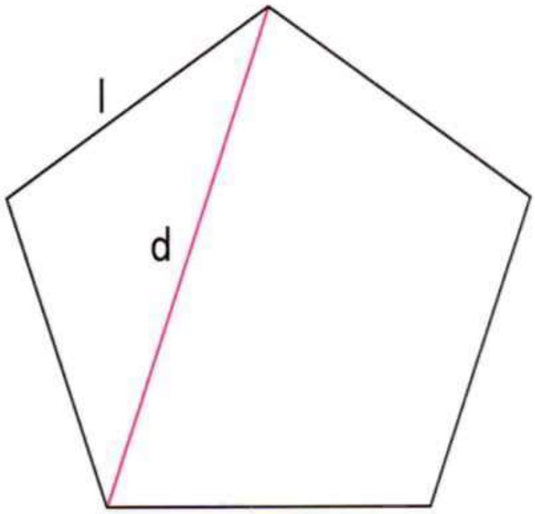
▲ *Золотое число мы обнаружим во многих шедеврах живописи. Возьмем для примера известную картину «Цирк» французского постимпрессиониста Жоржа Сёра (1859—1891 гг.). Изучая эту работу, мы поразимся обилию скрытых в ней золотых пропорций. Все они — производные от*

$$\frac{BC}{GC} = \frac{AB}{AP} = \Phi$$


A
P
B
G
H
D
C

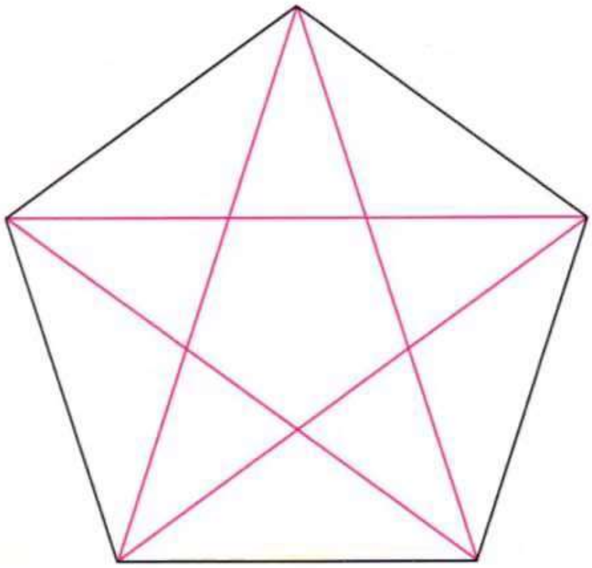
◀ *Великие художники Ренессанса идеал красоты соотносили с золотым числом. Взгляните на этот рисунок Леонардо да Винчи. Если на лице человека расстояние между межбровьем и основанием подбородка мы примем равным единице, то расстояние между межбровьем и той точкой, от которой начинают расти волосы, составит 0,618. В «идеальном» лице подобные пропорции определяют и «местоположение» других значимых его частей.*

Пифагоров пятиугольник



Золотое число Ф скрыто в правильном пятиугольнике — его дает отношение диагонали пятиугольника d к любой из его сторон l.

Пифагорейцы и средневековые алхимики с большим пиететом относились к звездчатому пятиугольнику, считая его магическим. По-другому его называют пифагоровым многоугольником. Это всем известная «звезда». Ее получают соединением противоположных вершин правильного пятиугольника. Если длину стороны звездчатого пятиугольника принять за единицу, то длина стороны правильного пятиугольника будет равна золотому числу.

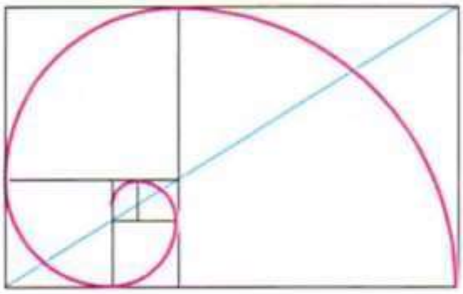


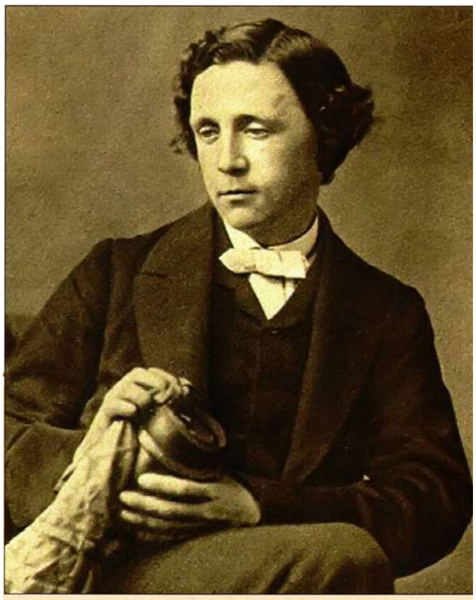
Логарифмическая спираль

Построим золотой прямоугольник так, чтобы большая его сторона имела длину Ф, а меньшая — равнялась единице. Теперь откладываем справа квадрат со стороной 1. Получившийся слева прямоугольник также является золотым. Если мы повторим операцию с этим вновь образованным прямоугольником, то получим еще один золотой прямоугольник (меньших размеров).

Продолжая эту операцию до бесконечности, мы построим множество уменьшающихся золотых прямоугольников. Спираль, вписанная в них, называется логарифмической.

Эта кривая замечательна. Согласно ей, например, развивается морская раковина *Nautilus pompilius*.





Льюис Кэрролл

Рассказ-головоломка

Предисловие

Этот рассказ впервые был опубликован частями в *The Monthly Packet* в апреле 1880 г. В намерение автора входило скрыть (как ту пилюлю, что прятали в лакомство нашего детства столь же хитроумно, сколь бестолково) в каждом узелке одну или более математических задачек — арифметических, алгебраических или геометрических, как получится — для удовольствия и, возможно, развития талантов любезных читателей

Льюис Кэрролл

Чарльз Лютвидж Доджсон (а именно таково настоящее имя Льюиса Кэрролла) родился 27 января 1832 г. в городе Дарсбери графства Чешир. Он был третьим ребенком (первым мальчиком) в семье англиканского священника Чарльза Доджсона и Фрэнсис Джейн Лютвидж. Фотограф, математик и писатель Кэрролл получил всемирное признание, опубликовав книгу «Алиса в Стране Чудес». Как свидетельствуют его дневники, Кэрролл придумал сюжет этой истории, пока прогуливался вдоль Темзы с преподобным Даквортом и тремя дочерьми декана Генри Лиддела (Лориной, Алисой и Эдитой). У Кэрролла вошло в привычку во время прогулок рассказывать девочкам выдуманные им истории, и та, что он рассказал 4 июля 1862 г., привела девочек в такой восторг, что Алиса попросила ее записать. И в том же году, на Рождество, Алиса получила в подарок рукопись, проиллюстрированную самим Кэрроллом. Три года спустя, в 1865 г., вышло первое издание книги с иллюстрациями сэра Джона Тэниэла. Огромный успех книги привел к тому, что появилась вторая часть — «Алиса в Зазеркалье».

Льюиса Кэрролла считают одним из первых математиков-логиков, после Джорджа Буля. Кэрролл более 40 лет преподавал в Оксфорде и под своим настоящим именем опубликовал множество статей и книг по математике, среди которых можно отметить «Логическую игру» и «Евклида и его современных соперников». Кэрролл умер в Гилфорде 14 января 1898 г. в возрасте 65 лет от бронхита.

Узелок 1. Все выше и выше

«Чертенок, води их то вверх, то вниз.»

Когда красноватые вечерние сполохи уже растворялись в черной тени ночи, случайный свидетель мог наблюдать поспешный — скоростью шесть миль в час — спуск по крутому склону горы двух путников; тот, что помоложе, прыгал с камня на камень с ловкостью оленя, в то время как его друг, чьи дряхлые члены явно страдали от того, что были облачены в кольчугу, принятую у туристов в этих местах, передвигался с трудом. Как всегда и случается в таких ситуациях, молодой прервал молчание первым:

— Я бы сказал, что мы хорошо идем! — воскликнул он. — Подъем нам дался не так легко!

— Конечно, хорошо! — пропыхтел старший путник в ответ. — При подъеме наша скорость не превышала и трех миль в час.

— А на равнине наша скорость равна...? — задал вопрос молодой, ибо не был силен в расчетах и предпочитал все детали подобного рода оставлять старшему товарищу.

— Четыре мили в час, — устало ответил второй путник, — и ни унции больше, — добавил он с любовью к метафорам, столь свойственной людям преклонного возраста, — и ни цента меньше!

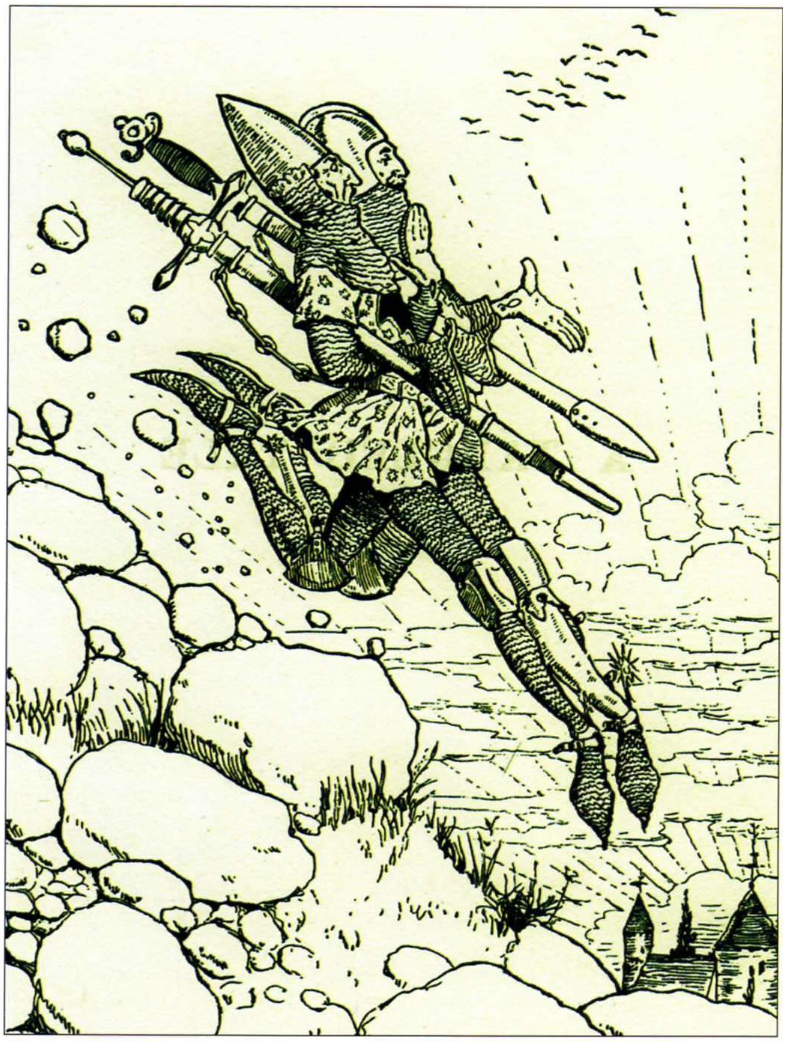
— Когда мы вышли из гостиницы, было три часа, — задумчиво произнес молодой, — и мы вряд ли вернемся к ужину... Весьма вероятно, что хозяин гостиницы наотрез откажется нас накормить!

— Он пожурит нас за позднее возвращение, — услышал он в ответ, — и его выговор будет совершенно справедливым.

— Да, сэр! — воскликнул его товарищ с веселым смешком. — И если мы у него попросим добавки, то весьма вероятно, что получим оплеуху!

— Удовольствуемся десертом, — вздохнул старший, в жизни не слышавший шуток и раздосадованный столь неуместным легкомыслием своего спутника. — Мы вернемся в гостиницу ровно в девять часов. Наверное, мы прошли сегодня немалый путь!
— Но какой, какой? — воскликнул молодой, охваченный волнением и вечной жаждой знаний.

Старший умолк на время.
— Скажи мне, — промолвил он после краткого молчания. — Который был час, когда мы поднялись на гору? Мне не нужно знать время с точностью до минуты, — добавил он, увидав протест на лице собеседника, — я даю тебе полчаса на погрешность. И ведь это все, что я прошу от сына твоей матери! А потом я сообщу с точностью до дюйма, какое расстояние нам удалось пройти с трех до девяти часов.
Ответ юноши больше походил на стенание, и выражение его лица и глубокие морщины, прорезавшие его мужественное чело, указывали на то, как глубоко в пропасть арифметической агонии увлек юношу безобидный с виду вопрос.



▼ Льюис Кэрролл и изображение Алисы, героини известных книг, сделанное художником Джоном Тэниэлом, первым иллюстратором его произведений.

Решение

«Узелок!» — сказала Алиса. — «Дай-ка я его развяжу!»

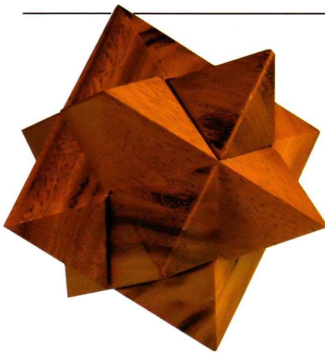
Задачка:
Двое путников с 3 до 9 часов прошли путь по ровной долине, потом поднялись на гору и вернулись к началу маршрута. Скорость их движения по равнине составила 4 мили в час, при подъеме в гору — 3 мили в час, и на спуске с горы — 4 мили в час. Найдите пройденное ими расстояние, а также в какой момент (плюс-минус полчаса) оба путника оказались на вершине горы.

Ответ:
24 мили; в 6.30.

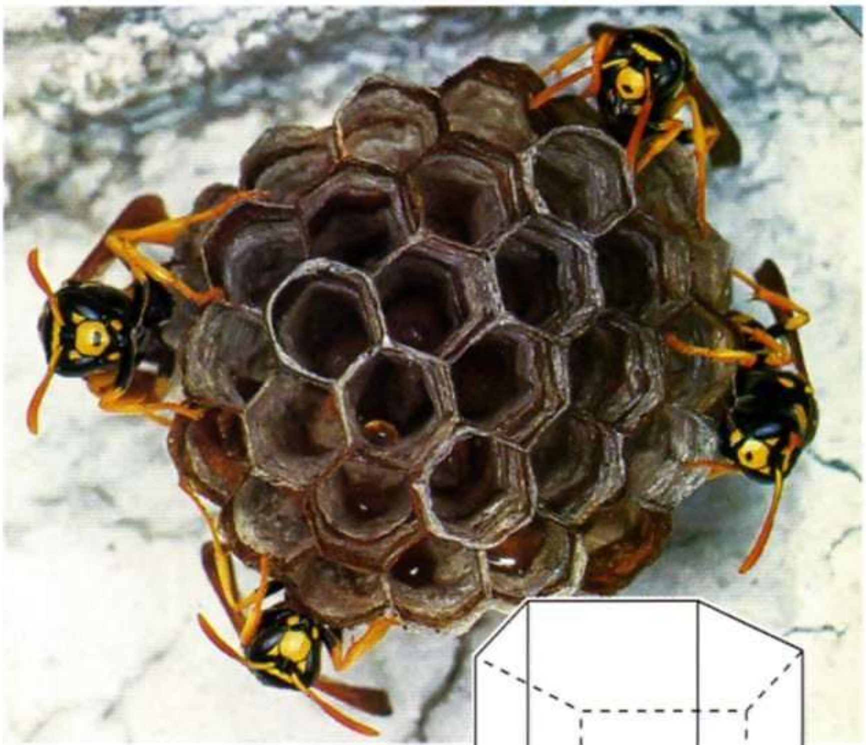
Решение:
Им понадобилось 1/4 часа, чтобы пройти одну милю по равнине, 1/3 — чтобы подняться на одну милю в гору, и 1/6 — чтобы спуститься. Путь туда и обратно по тому же маршруту — неважно, по горе или равнине, — занял бы полчаса. Так что за 6 часов они прошли 12 миль туда и 12 миль — обратно. Если бы 12 миль обратной дороги были в основном ровными, то путники затратили бы чуть больше трех часов, будь они гористыми — немногим меньше 4 часов. Так что они, скорее всего, затратили на путь до вершины 3.30, плюс-минус полчаса. А поскольку они вышли в 3 часа, то на вершину прибыли около 6.30, плюс-минус полчаса.

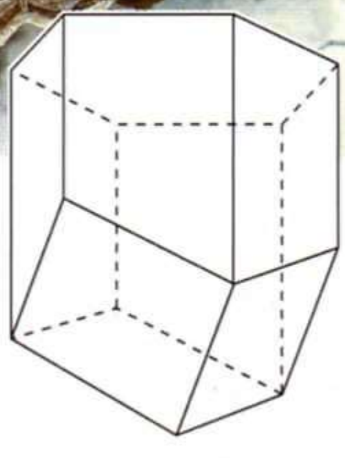
Звездчатый ромбододекаэдр

Удивительный многогранник



Первое формальное описание ромбододекаэдра дал немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (1571—1630 гг.). Он открыл его, изучая заинтересовавшее его строение ячеек пчелиных сот. Они имеют форму шестиугольной призмы, как бы оканчивающейся тремя условными «ромбами».





▲ *Пчелиные соты принимают форму шестиугольной призмы, оканчивающейся тремя условными «ромбами». Взяв за основу эту структуру, можно построить двенадцатигранник, называемый ромбододекаэдром.*

Почему пчелы предпочитают иметь дело именно с такими конструкциями? На протяжении всего XVIII в. ученые пытались ответить на этот вопрос. Одно из тогдашних объяснений основывалось на том факте, что из всех фигур, полностью заполняющих пространство, подобные фигуры (при равном объеме) имеют наименьшую площадь. Получалось, что умные пчелы таким образом экономят воск, идущий на строительство сот.

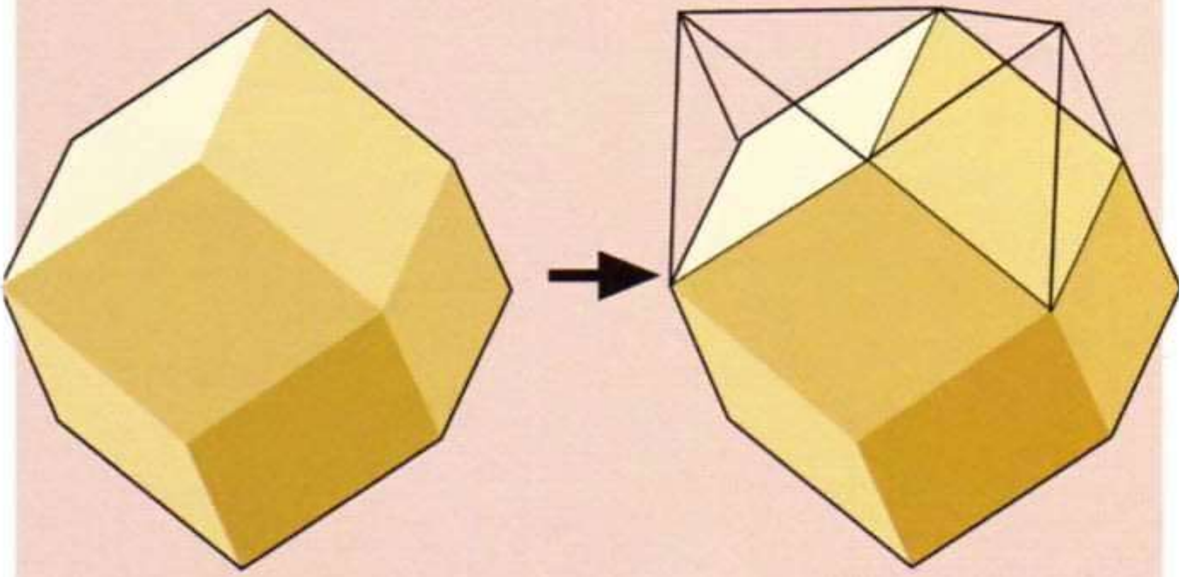
Однако позднее выяснилось, что это утверждение было ошибочным. Нашлись другие способы завершения шестиугольной призмы, позволяющие сэкономить больше объема. Один из таких способов предоставляет усеченный восьмигранник. Другой вопрос — самый ли он экономичный? Многие исследователи до сих пор пытаются найти конечное решение этой проблемы, но пока безуспешно.

◀ *Звездчатый ромбододекаэдр. Характерная для него схема заполнения пространства уникальна по своей красоте и изысканности.*

▶ *«Водопад» Морица Корнелиса Эшера. Славу этому художнику принесли работы, в которых «невозможное» творится в полном соответствии с математическими законами. На этой литографии водопад представляет собой вечный двигатель. Обратите внимание на многогранник, расположенный на вершине правой башни, — это звездчатый ромбододекаэдр.*

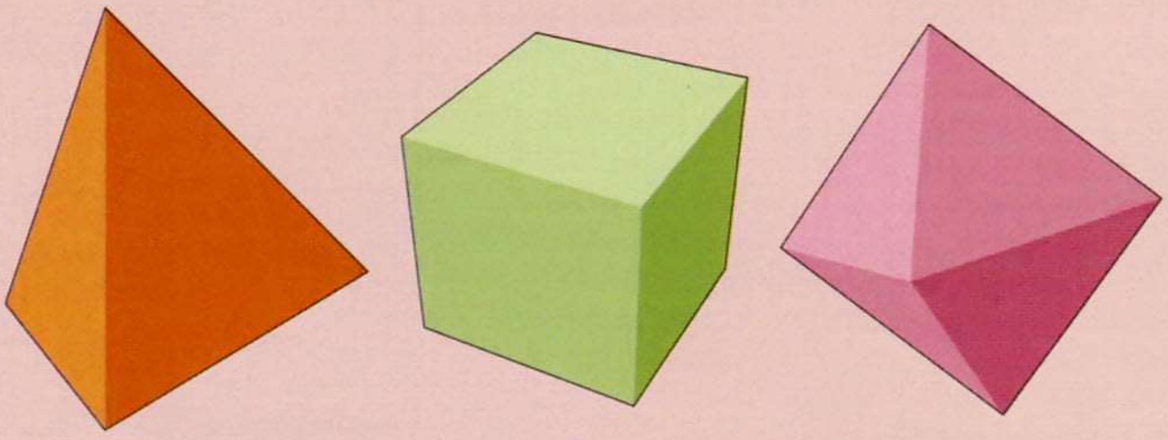
От классического ромбододекаэдра до многогранника Эшера

Из классического ромбододекаэдра легко построить звездчатый. Для этого следует «вытянуть» каждую из граней основной фигуры. При этом возможны различные варианты.

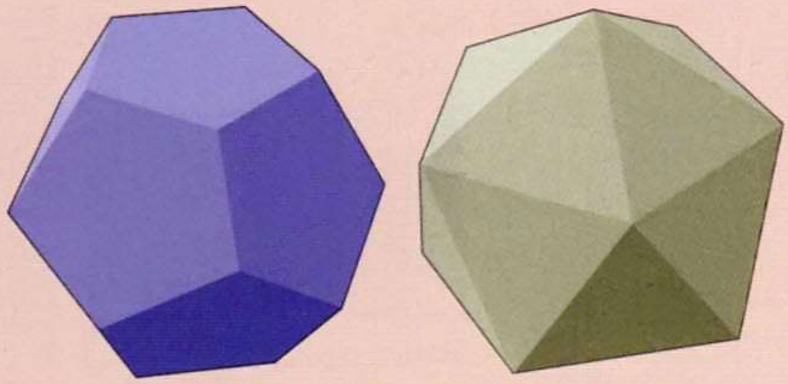


Первый из получаемых звездчатых ромбододекаэдров как раз имеет форму нашей головоломки. Особенностью данной фигуры является возможность ее разделения на шесть равных частей. Задача состоит в том, чтобы сначала разъединить их, а затем вновь собрать воедино.

Что такое многогранник?



Тетраэдр Куб Октаэдр



Додекаэдр Икосаэдр

Многогранник — результат своеобразного логического (то есть проведенного по определенной схеме) «объединения» в пространстве нескольких плоских многоугольников (таких, как квадраты, треугольники и т. д.). Сами многоугольники при этом становятся гранями многогранника, а их стороны — его ребрами. Многогранник ограничен замкнутой поверхностью, то есть характеризуется объемом.

Самые известные тела этого ряда — так называемые выпуклые многогранники. Это такой многогранник, плоскости граней которого не «режут» его самого (его объема). По-другому, более наглядно, — если мы расположим одно из таких геометрических тел на столе, подложив под него лист бумаги (то есть совместив этот лист с одной из граней многогранника), то лист бумаги не будет «встречаться» (соприкасаться, пересекать) с другими его гранями.

Многогранник называется правильным, если: а) он является выпуклым; б) все его грани образованы правильными многоугольниками; в) в каждой вершине сходится одинаковое число граней; г) все его двухгранные углы равны.

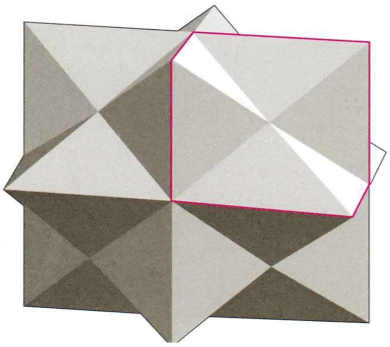
Доказано, что существует всего пять правильных многогранников (по-другому их еще называют платоновыми телами): это тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

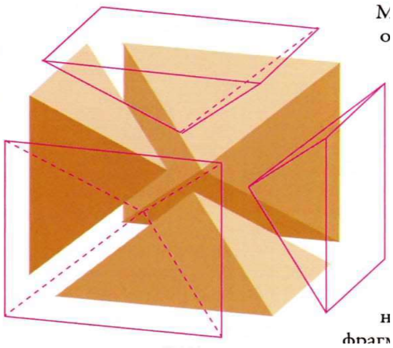
Свойства многогранника Эшера

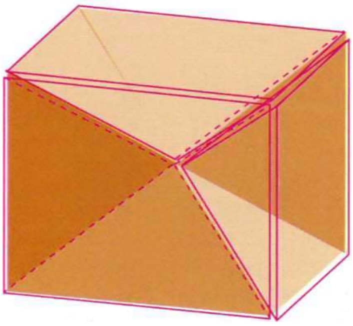
Если мы возьмем несколько звездчатых ромбододекаэдров и попытаемся «прикладывать» их друг к другу, то очень скоро откроем самое замечательное свойство этого геометрического тела, а именно — его способность максимально «компактно» заполнять пространство. Иными словами, звездчатые ромбододекаэдры — абсолютно без зазоров — «складываются» в новый многогранник.

Можно доказать это свойство и чисто теоретически. Представим себе звездчатый ромбододекаэдр, вписанный в куб. Мысленно разделим куб на восемь равных частей, разрезав его двумя «перпендикулярными» плоскостями, проходящими через центр и параллельными граням куба. Одновременно на восемь равных частей делится и звездчатый ромбододекаэдр, причем объем каждой из них занимает ровно половину объема получившихся «кубиков». Другую полови-

тый ромбододекаэдр, вписанный в куб. Мысленно разделим куб на восемь равных частей, разрезав его двумя «перпендикулярными» плоскостями, проходящими через центр и параллельными граням куба. Одновременно на восемь равных частей делится и звездчатый ромбододекаэдр, причем объем каждой из них занимает ровно половину объема получившихся «кубиков». Другую полови-
ну полностью заполнит соответствующий фрагмент другого ромбододекаэдра (повторяющего первый), если мы приложим его сбоку.





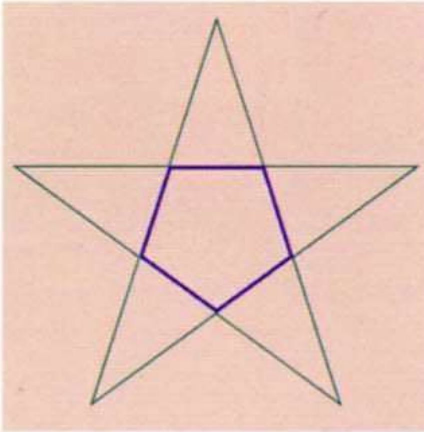


▲ *Если звездчатый ромбододекаэдр вписать в куб, а затем разделить этот куб двумя «перпендикулярными» плоскостями, проходящими через его центр и параллельными граням куба, то в результате получится восемь равных «кубиков» (1), внутри каждого из которых находятся три пирамиды (2), в сумме занимающие ровно половину объема данного «кубика». Как показано на рисунке, эти пирамиды стыкуются без зазоров с тремя пирамидами такого же звездчатого ромбододекаэдра, располагаемого рядом (3).*

«Звездные» формы многоугольников и многогранников

Как получать из обычных многоугольников и многогранников звездчатые многоугольники и многогранники?

Простейший способ заключается в как бы «вытягивании» их сторон или граней. Но не произвольном «вытягивании» — оно совершается ровно по линиям прилегающих сторон или граней. Совсем просто это показать в двухмерном пространстве — на примере правильных многоугольников. Число сторон многоугольника при этом должно быть больше пяти. Если мы продлим стороны треугольника или квадрата, то эти линии не пересекутся, и никакого звездчатого многоугольника в результате мы не получим.



▲ *Продолжая стороны правильного пятиугольника, мы получим пятиконечную звезду — так называемую пентаграмму.*

Первый такой многоугольник образуется при модернизации правильного пятиугольника. Это пятиконечная звезда (так называемая пентаграмма) — в нашем отечестве слишком хорошо всем знакомая. Впрочем, у пентаграммы очень долгая история, она служила магическим символом еще пифагорейцам.

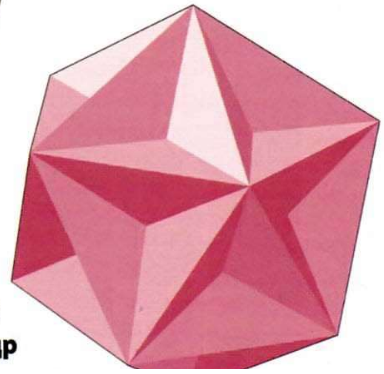
Если мы распространим описанную процедуру на многогранники, то увидим, что «продлеваемые» грани, сходясь, образуют новую фигуру. Но, например, с подобным преобразованием куба нас постигнет неудача.

А вот правильный восьмигранник таким образом превращается в звездчатый октаэдр. Он был открыт еще Леонардо да Винчи, а спустя сто лет переоткрыт Кеплером, который назвал эту фигуру «восьмиугольной звездой». Ее можно рассматривать как соединение двух тетраэдров.

Правильные звездчатые многогранники

Малый звездчатый додекаэдр

Большой звездчатый додекаэдр



Большой додекаэдр

Большой икосаэдр

Существует лишь четыре правильных звездчатых многогранника — математики их называют телами Кеплера-Пуансо. Два из них открыл Иоганн Кеплер (1571—1630 гг.) в начале XVII в., другие два — Луи Пуансо (1777—1859 гг.) в 1809 г. Их названия: малый звездчатый додекаэдр, большой звездчатый додекаэдр, большой додекаэдр и большой икосаэдр. Первые три образованы на основе додекаэдра, а последний — на основе икосаэдра.

Чтобы получить малый звездчатый додекаэдр, нужно продолжить 12 граней правильного додекаэдра. Другие звездчатые многогранники получаются посредством несколько более сложных операций. Грани малого и большого звездчатого додекаэдра представляют собой пентаграммы, а грани звездчатого икосаэдра образованы 20 равносторонними треугольниками.

Вкупе с пятью платоновыми телами, правильные звездчатые многогранники образуют «сообщество» правильных многогранников. Таким образом, их всего девять.

Отметим, что описанную процедуру «звездообразования» можно выполнять с любыми видами многогранников, повторяя ее сколько угодно раз. При этом получаются разнообразнейшие тела, обладающие немалыми художественными достоинствами.