Григорий Филипповский

Авторская школьная геометрия

Части 1 и 2

Оглавление

От автора

Уважаемые читатели!

У вас в руках первая и вторая части книги «Авторская школьная геометрия». В ней представлены задачи, авторами которых являются выдающиеся древнегреческие математики, математики древней Индии, стран арабского халифата. Небольшие главы рассказывают о том, как создавались эти задачи, какие обстоятельства вызвали их к жизни.

Чтобы понять что-то важное, нужно непременно вернуться к истокам.

Авторские задачи интересны сами по себе. Они позволяют проследить ход мыслей великих людей, помогают связать геометрию древнюю с современной.

Автор верит, что эта книга доставит радость всем любителям геометрии: от школьника до преподавателя вуза, поможет читателю расширить свой математический кругозор и общую эрудицию, побудит к самостоятельной научно-исследовательской работе.

Авторская школьная геометрия

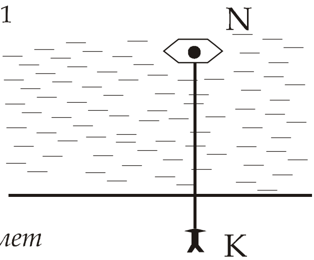
Часть 1

Древняя Греция:
от Фалеса до Птолемея

Глава 1
Четыре истории о Фалесе Милетском

Можем ли мы назвать фамилию математика, который жил и работал до Фалеса из Милета? Нет! Судя по всему, Фалес (~ 640–546 гг. до н.э.) был первым. Он первым выдвинул и применил идею доказательства в геометрии. Фалес доказал, что: вертикальные углы равны; любая хорда меньше диаметра; диаметр делит круг пополам; углы при основании равнобедренного треугольника равны; вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой. И, разумеется, он первым доказал теорему, которая с тех пор носит его имя. Не случайно в Греции Фалеса считали одним из семи мудрецов мира и сложили о нем немало легенд. Некоторые из них дошли до нас через века. Соответствуют ли эти легенды действительности или они лишь плод фантазии поклонников выдающегося мыслителя – мы не знаем. Но вот какие истории о Фалесе Милетском дошли до наших дней.

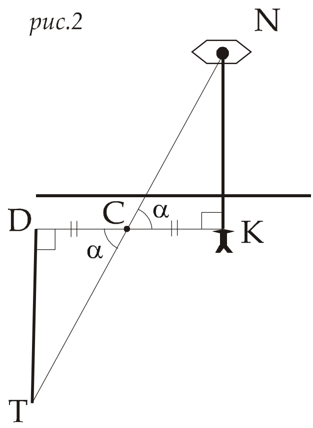
*рис.*1



История 1 рассказывает о том, как юноша Фалес помогал защищать родной Милет от кораблей неприятеля. Вообразим, что мы смотрим на события с высоты птичьего полета. Защитники крепости из катапульты K стараются попасть в корабль N (*рис.1*). Но вода «скрадывает» расстояние, и все камни летят мимо.

– Сейчас я точно подсчитаю расстояние до корабля! – уверенно заявляет друзьям Фалес. Они недоверчиво улыбаются, а кое-кто даже крутит пальцем у виска: что ты друг, с ума сошел? Но Фалес этого не видит, поскольку уже делает измерения. Он проходит вдоль передней линии некоторое расстояние KC (*рис.*2) и в точке C вбивает в землю колышек на высоту своего роста. Затем проходит еще столько же: $CD = KC$ и, повернувшись на $90°$, идет внутрь крепости. Как только в некоторой точке T его глаз совмещает верх колышка и центральную мачту корабля, Фалес кричит: «Я вычислил! Расстояние до корабля найдено!».

рис.2



Действительно, $\Delta TDC = \Delta NKC$ – по катету и острому углу. Итак, $TD = NK$. Таким образом, подсчитав TD, можно точно определить оптимальное боевое положение катапульты и защитить от врагов родной город.

История 2 о том, как, странствуя по Египту, Фалес был поражен величием пирамиды Хеопса.

– Скажите пожалуйста, какова высота пирамиды? – спросил он жрецов.

– О, это дано знать разве что Богу Солнца Ра, а не человеку, – ответили жрецы.

– Минуточку, сейчас я точно подсчитаю высоту пирамиды! – уверил их Фалес. Он вышел на Солнце и измерил длину своей тени. Тень оказалась вдвое больше роста Фалеса. Из этого он сделал вывод, что в данный момент все предметы имеют тень вдвое большую, чем сами предметы. Остается вычислить длину тени пирамиды Хеопса. Она равна OK, или $ON + NK$, или $TD + NK$ (*рис.*3). Расстояния $TD = \frac{1}{2} AD$ и NK легко измеряются, т.е. находится $OK = TD + NK$. А высота пирамиды $SO = \frac{1}{2} OK$.

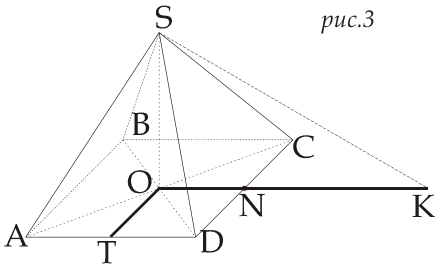


рис.3

Вы думаете, жрецы были в восторге от ума и изобретательности Фалеса? Вовсе нет. Они пришли в ужасное негодование. Еще бы! То, что вообще не дано познать ничтожному человеку, какой-то там грек из Милета вычислил почти мгновенно!.. Такое не прощают! И египетские жрецы решили убить Фалеса. К счастью, один из них оказался порядочным человеком и посоветовал Фалесу скорей садиться на корабль, который вот-вот отплывал из Египта.

История 3 связана с задачами на построение, автором которых также считается Фалес. Он предложил выполнять задачи на построение с помощью циркуля и линейки, которая не имеет делений. Эти задачи очень понравились друзьям и ученикам Фалеса.

Разделить данный отрезок пополам? Никаких проблем!

Построить угол, равный данному? Проще простого!

Разделить данный угол пополам? Пожалуйста!

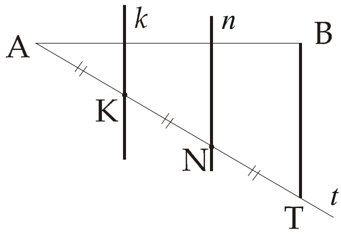
Вдохновленные примером учителя, ученики Фалеса сами стали составлять задачи на построение. Одна из них оказалась «крепким орешком», но Фалес решил ее!

Разделить данный отрезок на 3 равные части.

Решение. Пусть дан отрезок AB, который нужно разделить на 3 равные части. Из точки A проведем луч t и отложим на нем три произвольных, но равных отрезка $AK = KN = NT$ (*рис.4*). Соединим точки T и B. Отрезок TB определит направление, в котором необходимо провести параллельные прямые. Итак, через N и K проводим соответственно прямые n и k параллельно TB. По теореме, которая носит имя *Фалеса*, прямые n и k разделят отрезок AB на 3 равные части.

Заметим, что таким способом мы можем разделить отрезок AB на сколько угодно равных частей.

рис.4



История 4 об увлечении Фалеса астрономией.

Однажды Фалес засмотрелся на звезды и не заметил рядом с собой ямы. Он упал и больно ударился. Женщина, оказавшаяся рядом, посмеялась над ним:

– Ха-ха, все смотришь в небо и совсем не видишь, что делается у тебя под ногами!...

Действительно, в чем-то эта женщина была права: лучше не падать в яму – опасно для жизни!

Но если бы Фалес не наблюдал небосвод, моряки того времени не знали, как ночью ориентироваться по Малой Медведице (именно в этом созвездии находится Полярная звезда).

Астрономические исследования подсказали великому математику идею 365-дневного календаря. Фалес определил размеры Солнца и угловую величину Луны.

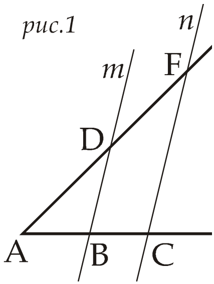
Однажды, после долгих наблюдений за светилами, Фалес точно определил дату солнечного затмения: 28 мая 585 года до н.э. За сутки до этого он встретился с полководцами воевавших в то время лидийцев и микян и сказал им: «Боги очень разгневаны тем, что между вами ведется война. Они решили забрать завтра Солнце с неба и наслать на вас ночь!..»

Так или примерно так говорил Фалес – мы не знаем. Но в указанное им время с неба действительно исчезло Солнце!.. Обе воюющие стороны были страшно напуганы! Вот она – немилость богов, предсказанная Фалесом. В тот же день противники подписали мирное соглашение. С войной было покончено! Так Фалес-геометр стал Фалесом-миротворцем!

Глава 2
Гимн теореме Фалеса

Выдающийся древнегреческий математик Фалес был первым, кто придал геометрии логический характер науки и ввел в нее понятие доказательства. Если египетских землемеров вполне устраивал ответ на вопрос «Как?», то Фалес задался вопросом «Почему?» И успешно отвечал на него! По свидетельству Прокла (V в. н.э.), Фалес выполнял задачи на построение с помощью циркуля и линейки, доказал равенство вертикальных углов и углов при основании равнобедренного треугольника. Считается, что именно он доказал теорему о вписанном угле, который опирается на диаметр. Он доказал признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим углам. И многое другое. Однако имя Фалеса чаще всего вспоминают в связи с теоремой о пропорциональности отрезков, которые пересекаются параллельными прямыми: если $m \parallel n$, то $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DF}$ (*рис.1*).

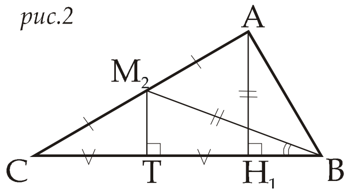
рис.1



Предлагаем серию задач, в которых видна эффективность использования теоремы Фалеса. Комментарии к задачам даем коротко (в стиле комментариев древних математиков: «Смотри!»).

Задача 1. *В треугольнике ABC высота AH_1 равна медиане BM_2. Найдите угол CBM_2.*

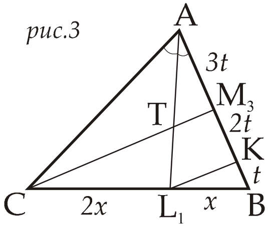
рис.2



<u>*Решение*</u>. Смотри *рис.2*.

$$M_2T=\frac{1}{2}AH_1=\frac{1}{2}M_2B \text{ и } \angle CBM_2=30^\circ.$$

рис.3



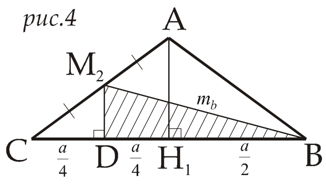
Задача 2. *Биссектриса AL_1 треугольника ABC делит сторону BC в отношении 2:1, считая от вершины C. В каком отношении делит эту биссектрису медиана CM_3?*

<u>*Решение*</u>. Проведем $L_1K \parallel CM_3$ (*рис.3*). Тогда $BK:KM_3=1:2$. Так как $AM_3:M_3K=3:2$, то и $AT:TL_1=3:2$.

Задача 3. *Построить равнобедренный треугольник по основанию $BC = a$ и медиане $BM_2 = m_b$, проведенной к боковой стороне.*

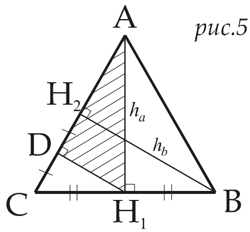
<u>*Анализ и построение*</u>. По теореме Фалеса $CD = DH_1 = \frac{a}{4}$ *(рис.4)*. Поэтому строим базисный треугольник BDM_2 ($\angle D = 90°$, $BD = \frac{3}{4}a$, $BM_2 = m_b$). Дальнейшее очевидно.

рис.4



Задача 4. *Построить равнобедренный треугольник ($b = c$) по двум неравным высотам h_a и h_b.*

рис.5



<u>*Анализ и построение*</u>. По теореме Фалеса $CD = DH_2$ и $DH_1 = \frac{1}{2}BH_2 = \frac{1}{2}h_b$ *(рис.5)*. Строим базисный треугольник ADH_1 ($\angle D = 90°$, $DH_1 = \frac{1}{2}h_b$, $AH_1 = h_a$). Дальнейшее очевидно.

Задача 5. *Точка A лежит на окружности, MK – хорда этой окружности. Найти на окружности такую точку X, чтобы хорда AX делилась хордой MK пополам.*

<u>*Решение*</u>.

I способ. CD = AC (где *AC*⊥*MK*); *p* || *MK* *(рис.6)*.

II способ. KT = AK; p || *MK (рис.7)*.

рис.6

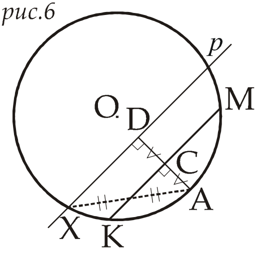
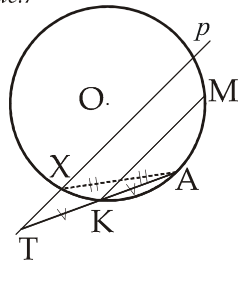


рис.7



Задача 6. *Доказать, что произвольный треугольник можно разрезать на девять равных треугольников.*

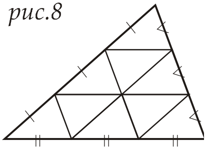


рис.8

<u>*Решение*</u>. Смотри *рис.8*.

Задача 7. *В равнобедренном треугольнике ABC высота AH_1, проведенная к основанию, вдвое меньше биссектрисы CL_3. Найти углы треугольника ABC.*

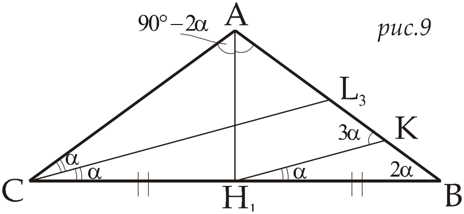


рис.9

<u>*Решение*</u>. Проведем $H_1K \parallel CL_3$ (*рис.9*), тогда $L_3K=KB$ и $AH_1=H_1K=\dfrac{1}{2}CL_3$.

Угол $\angle H_1AK=90°-2a$, а угол $\angle H_1KA=3a$ (как внешний для ΔH_1KB). Следовательно, $90°-2a=3a$, откуда $a=18°$.

<u>*Ответ*</u>: 36°, 36°, 108°.

Задача 8. *BL_2 – биссектриса в прямоугольном треугольнике ABC (ĐC=90°), M – точка пересечения медиан. Известно, что $L_2M \perp AC$ (рис.10). Найдите острые углы треугольника.*

<u>*Решение*</u>. Поскольку $L_2M \perp AC$ и $BC \perp AC$, то $ML_2 \parallel BC$. И тогда, по теореме Фалеса, $\dfrac{AM}{MM_1}=\dfrac{AL_2}{L_2C}$. Но $\dfrac{AM}{MM_1}=\dfrac{2}{1}$ (*M* – центроид), значит, $\dfrac{AL_2}{L_2C}=\dfrac{2}{1}$. По свойству биссектрисы $\dfrac{AL_2}{L_2C}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{1}$, т.е. катет *BC* в два раза меньше гипотенузы *AB*. Следовательно, $\angle A=30°$, $\angle B=60°$.

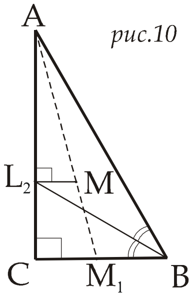


рис.10

<u>*Ответ*</u>: $\angle A=30°$, $\angle B=60°$.

Задача 9. *Вершина A треугольника ABC перемещается так, что длина медианы CM_3 остается неизменной. Какую линию описывает при этом вершина A?*

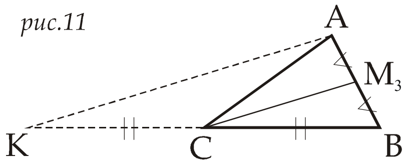
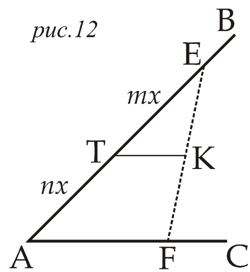


рис.11

<u>*Решение*</u>. Проведем через вершину A прямую параллельно CM_3, которая пересечет продолжение BC в точке K (*рис.11*). По теореме Фалеса $BC=KC$ и $KA=2CM_3$. Поэтому очевидно, что вершина A опишет окружность с центром в точке K радиуса $R_1=2CM_3$.

Задача 10. *Дан угол A и точка K внутри угла. Проведите через K прямую EF (E и F лежат на сторонах угла) – так, чтобы* $\frac{EK}{KF}=\frac{m}{n}$ *(задача И. Ньютона).*

<u>*Решение*</u>. Проведем $KT \parallel AC$ (*рис.12*). Построим точку E на AB – такую, чтобы $\frac{AT}{TE}=\frac{n}{m}$ (построением находим отрезок $TE=\frac{AT\cdot m}{n}$). Прямая EK пересечет AC в точке F (действительно, по теореме Фалеса $\frac{EK}{KF}=\frac{ET}{TA}=\frac{m}{n}$).

рис.12


Задача 11. *Найти косинус угла A равнобедренного треугольника ABC (b=c), ортоцентр которого делит пополам высоту, проведенную к основанию.*

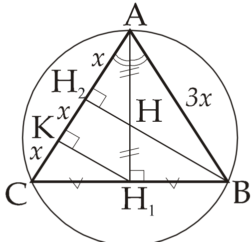


рис.13

<u>*Решение*</u>. Проведем $H_1K \parallel BH_2$ (*рис.13*). Тогда $AH_2=KH_2$ (т.к. $AH=HH_1$) и $CK=KH_2$ (т.к. $CH_1=H_1B$).

Из треугольника ABH_2: $\cos A=\frac{AH_2}{AB}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$.

<u>*Ответ*</u>: $\cos A=\frac{1}{3}$.

Следующие несколько задач предлагаем Вашему вниманию для самостоятельного решения.

Задача 12. На стороне AB равностороннего треугольника ABC взята точка D такая, что $AD:DB=1:2$. На стороне BC – точка E такая, что $BE:EC=1:2$. Докажите, что $DE=R$, где R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Задача 13. Постройте параллелограмм $ABCD$ по середине стороны AD и серединам высот, проведенных из вершины B.

Задача 14. Дана прямая l и три точки, не лежащие на одной прямой и не принадлежащие l. Постройте через эти три точки параллельные прямые, отсекающие на l равные отрезки.

Задача 15. В треугольнике ABC проведены медианы BM_2 и CM_3. Через точку K на BC проведены $KE \parallel BM_2$ $(E \in AC)$ и $KF \parallel CM_3$ $(F \in AB)$. Докажите, что BM_2 и CM_3 делят отрезок EF на 3 равные части.

Задача 16. Через центроид M треугольника ABC проведена произвольная прямая l (точки B и C находятся по одну сторону от l, точка A – по другую). Докажите, что сумма расстояний от точек B и C до l равна расстоянию от вершины A до этой прямой.

Глава 3

Пифагор. Теорема Пифагора. Задачи на построение.

Пифагор (~580-500 гг. до н.э.), родившийся на острове Самос, изучал математику в Милете под руководством Фалеса и его ученика Анаксимандра. Затем он провел около 20 лет в Египте, где овладел премудростями и таинствами жрецов. Когда войска персидского царя Камбиза захватили Египет, Пифагор попал в плен и более десяти лет провел в Вавилоне. Вернувшись на родину 50-летним человеком, он в городе Кротоне основал свою школу. Его выступления были столь ярки и убедительны, что однажды, после того как Пифагор произнес речь против роскоши, все женщины отнесли свои дорогие наряды в храм Геры.

В школе Пифагора особо почитались числа. Их делили на добрые и злые. И все явления во Вселенной старались объяснить с помощью натуральных чисел.

рис.1

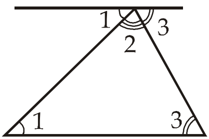
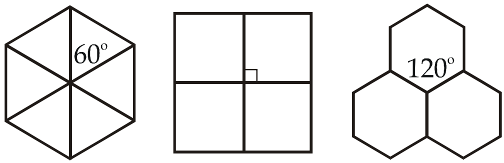


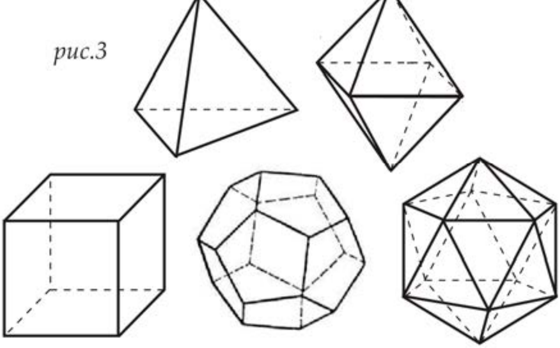
рис.2



В геометрии пифагорейцам принадлежат следующие открытия:

1. Сумма углов треугольника равна 180° (*«двум прямым углам»*) – *(рис.1).*
2. Плоскость можно покрыть лишь тремя видами правильных многоугольников: равносторонними треугольниками, квадратами, правильными шестиугольниками *(рис.2).*
3. Существует 5 видов правильных многогранников: тетраэдр, куб, окта-

рис.3



эдр, икосаэдр, додекаэдр *(рис.3).* В школе Пифагора их называли космическими телами и считали, будто они отвечают за те или иные стихии – Воды, Воздуха, Земли...

4. Мир чисел и мир геометрических построений – совершенно разные миры. Потому хотя бы, что диагональ квадрата со стороной 1 построить можно, а точно вычислить, чему она равна, – нельзя *(рис.4).*

рис.4

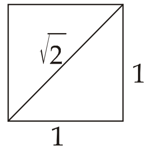
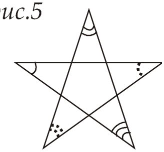


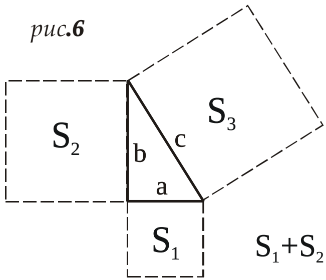
рис.5



Решая задачи на построение с помощью циркуля и линейки, пифагорейцы «вышли» на *три знаменитые задачи:* об удвоении куба, о трисекции угла, о квадратуре круга.
Эмблемой школы Пифагора была звезда *(рис.5)*, сумма углов которой также равна 180°, а длины отрезков связаны отношением «золотого сечения».

И все же самое главное достижение Пифагора и его школы – это сама *теорема Пифагора*: ***площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.*** ***(****рис.6****)***

*рис.****6***



$S_1+S_2=S_3$
или
$a^2+b^2=c^2$

Пифагор показал, почему «египетский» треугольник со сторонами 3, 4, 5 является прямоугольным: $3^2+4^2=5^2$
Появились так называемые «Пифагоровы тройки», которых оказалось бесконечно много. Наиболее часто встречающиеся среди них такие:

$3n$	$4n$	$5n$
$5n$	$12n$	$13n$
$8n$	$15n$	$17n$
$7n$	$24n$	$25n$

Были найдены общие формулы для целых *a, b, c*:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 2k+1 \\ b &= 2k(k+1) \\ c &= 2k^2+2k+1 \end{aligned}},$$

где k – натуральное число.

Таким образом, из области практики, каковой она была в Египте, *Пифагор перевел геометрию в область науки*.
Сегодня существует около 400 способов доказательства теоремы Пифагора. Один из них мы рассмотрим.

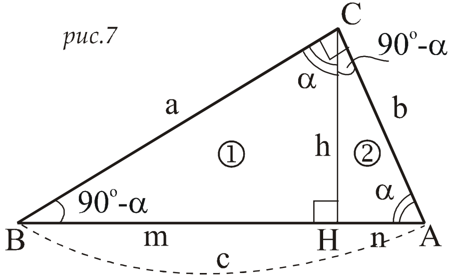


рис.7

Пусть высота *CH* прямоугольного ΔABC, проведенная к гипотенузе $AB = c$, делит ее на отрезки m и n *(рис.7)*. Пусть также $BC = a$, $AC = b$. Очевидно, что треугольники **j** , **k** и весь ΔABC подобны (по двум углам). Из подобия Δ **j** и ΔABC имеем: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{m}{a}$, откуда

$$\boxed{a^2 = cm} \qquad (1)$$

Из подобия Δ **k** и ΔABC: $\dfrac{b}{c} = \dfrac{n}{b}$, или $\boxed{b^2 = cn}$ (2).

Сложив левые и правые части равенств (1) и (2), получим: $a^2 + b^2 = c(m+n)$.

Поскольку $m + n = c$, то $a^2 + b^2 = c^2$

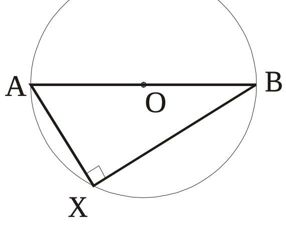
Из теоремы Пифагора вытекает ряд важнейших следствий. Отметим их.

1. Любой из катетов меньше гипотенузы.
2. Равные наклонные имеют равные проекции.
3. Из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.
4. $a = \sqrt{cm}$ – формула (1).
5. $b = \sqrt{cn}$ – формула (2).
6. $h = \sqrt{mn}$ (докажите!)
7. $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ – отсюда начинаются *все* тригонометрические формулы.

Наша дальнейшая беседа будет большей частью связана с задачами на построение (в основном, *с алгебраическим методом в задачах на построение*). И здесь нам, несомненно, помогут как сама теорема Пифагора, так и следствия из нее.

Задача 1. *Дан отрезок AB. Верно ли, что существует бесконечное множество точек X, для которых $XA^2 + XB^2 = const$?*

рис.8



<u>*Решение*</u>. Верно! Построим на *AB* как на диаметре окружность *(рис.8)*. Для любой точки *X* окружности выполняются равенство: $XA^2 + XB^2 = AB^2 = const$ (согласно *теореме Пифагора*).

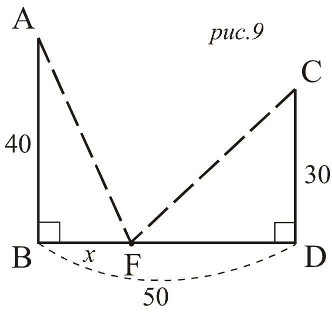


рис.9

Задача 2 *(Леонардо Фибоначчи). Башни BA и DC высотой соответственно 40 футов и 30 футов расположены в 50 футах друг от друга (рис.9). Между ними находится фонтан F*, к которому из *A и C слетают 2 птицы. Они летят с одинаковой скоростью и опускаются к фонтану F одновременно. Найти расстояние (по горизонтали) от каждой из башен до фонтана.*

Решение.
По теореме Пифагора имеем:

$$AF^2 = 40^2 + x^2$$

$$CF^2 = 30^2 + (50 - x)^2$$

Поскольку $AF = CF$ (по условию), то $40^2 + x^2 = 30^2 + (50 - x)^2$,
откуда $BF = x = 18$ (футов), $DF = 50 - x = 32$ (фута).

Задача 3. *В вершине A кирпича размерами* $30 \times 20 \times 20$ *(рис.10) находится паучок. Ему нужно как можно быстрее попасть в вершину B. Найдите длину кратчайшего пути из A в B.*
Решение. Мысленно повернем верхнюю грань кирпича – чтобы она оказалась в одной плоскости с передней *(рис.11)*. Очевидно, что кратчайший путь – отрезок *AB.* По теореме Пифагора $AB = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ (см)

рис.10

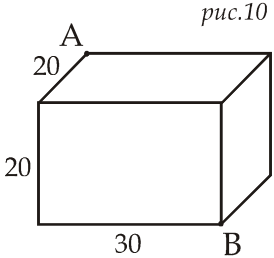
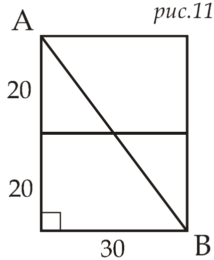


рис.11



Задача 4. *Из точки А к прямой l проведены перпендикуляр АВ и наклонная АС (рис.12) Найдите геометрическое место точек Х, принадлежащих лучу ВС, для которых АХ>АС.*
__Ответ__: Все точки луча *ВС* левее точки *С*.

рис.12

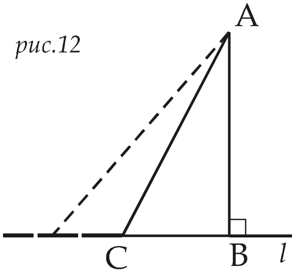
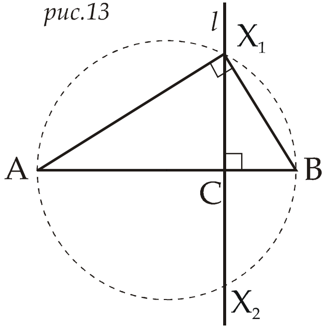


рис.13



Задача 5. *Прямая l перпендикулярна отрезку АВ и пересекает его в точке С (рис.13). Существует ли на прямой l точка Х – такая, что* $XC=\sqrt{AC\cdot BC}$ *?*
__Решение__. Опишем на *АВ* как на диаметре окружность. Точки X_1 и X_2 ее пересечения с l будут искомыми.
Действительно, $X_1C=\sqrt{AC\cdot BC}$ (*см. следствие №6 из теоремы Пифагора*).

Задача 6. *Даны отрезки a, b и c. Постройте отрезок x, где* $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2}$.
__Решение__. Строим отрезок $y=\sqrt{a^2+b^2}$ – *рис.14а.*
Затем строим отрезок $x=\sqrt{y^2-c^2}$ *рис.14б.*

рис.14

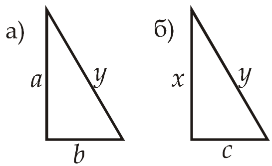
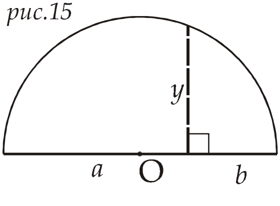


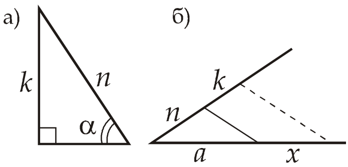
рис.15



Задача 7. *Даны отрезки a и b. Постройте отрезок* $x=\sqrt[4]{a^3b}$.
__Решение__. $x=\sqrt[4]{a^3b}=\sqrt{a\sqrt{ab}}$. Строим отрезок $y=\sqrt{ab}$ (*рис.15*). Затем аналогично строим $x=\sqrt{ay}$.

Задача 8. *Даны отрезок a и угол α. Постройте отрезок $x = a\sqrt{\sin\alpha}$.*

рис.16



<u>Решение</u>. Строим произвольный прямоугольный треугольник с острым углом α (*рис.16а*). При этом $\sin\alpha = \frac{k}{n}$. Затем строим отрезок $x = \frac{ak}{n}$ (*рис.16б*).

Задача 9. *Даны отрезки a и b. Постройте отрезок $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.*

<u>Решение</u>. $x = \sqrt{\sqrt{a^2(a^2 + \frac{b^4}{a^2})}} = \sqrt{a\sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2}}$. Строим отрезок $y = \frac{b \cdot b}{a}$. Затем отрезок $z = \sqrt{a^2 + y^2}$. После чего – отрезок $x = \sqrt{az}$.

Задача 10. *Даны отрезки a, b, c. Постройте отрезок x, если известно, что выполняется формула $\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}$.*

<u>Решение</u>. Возьмем произвольный отрезок t. Тогда справедливой останется формула $\sqrt[4]{xt^3} = \sqrt[4]{at^3} + \sqrt[4]{bt^3} + \sqrt[4]{ct^3}$. Строим отрезок $y = \sqrt[4]{at^3}$ (*см. задачу 7*).

Аналогично строим $z = \sqrt[4]{bt^3}$ и $k = \sqrt[4]{at^3}$.

Пусть $m = y + z + k$. Тогда имеем: $\sqrt[4]{xt^3} = m$; $\quad xt^3 = m^4$ и $x = \frac{m^4}{t^3}$.

Строим сначала отрезок $n = \frac{m \cdot m}{t}$ (см. *задачу 8, рис.16б*),

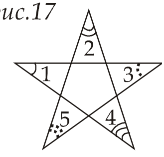
после чего – отрезок $x = \frac{n \cdot n}{t}$.

В завершение беседы остается предложить несколько задач для самостоятельного решения.

Задача 11. Докажите, что для произвольной звездочки

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ \qquad (\textit{рис.17})$$

рис.17



Задача 12. Существуют ли равнобедренные прямоугольные треугольники, все стороны которых – целые числа?

Задача 13. На дереве *BA* сидят две обезьянки. Одна на верхушке *A*, другая – в точке *C* на высоте 10 локтей от земли *(рис.18)*. Источник *I* находится на расстоянии 40 локтей от дерева. Первая обезьянка прыгнула из *A* прямо к источнику *I*. Вторая спустилась с дерева и подбежала к источнику, причем обе преодолели одинаковое расстояние. Какой высоты дерево?

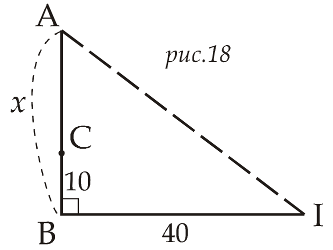


рис.18

Задача 14. Из точки *A* к прямой *l* проведена наклонная *AB*. Закрасьте фигуру, образованную всеми наклонными, проведенными из *A* и меньшими, чем *AB*.

Задача 15. Дан $\Delta ABC\ (C = 90^\circ)$. На луче *AC* постройте точку *X* – такую, что $c = \sqrt{b \cdot AX}$. А на луче *BC* – такую точку *Y*, что $c = \sqrt{a \cdot BY}$ *(рис.19)*.

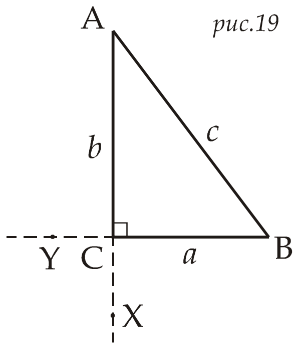


рис.19

Задача 16. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок *x*, где $x = \sqrt{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2-b^2}}$.

Задача 17. Даны отрезки *a, b, c, d*. Постройте отрезок $x = \sqrt[4]{abcd}$.

Задача 18. Даны отрезки *a, b, c, d*. Постройте отрезок $x = \sqrt{\dfrac{a^3}{b} + \dfrac{c^3}{d}}$.

Задача 19. Зная длину отрезка *a*, постройте отрезок $x = a\sqrt[4]{2}$.

Задача 20. Дан отрезок *a* и угол α. Постройте отрезок $x = \dfrac{a}{\sqrt{\cos a}}$.

Задача 21. Постройте отрезок $x = (\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^4$, где *a* и *b* – данные отрезки.

Задача 22. Даны отрезки *a, b, c, d*. Постройте отрезок $x = \sqrt{\dfrac{abc^2+d^2}{b^2+cd}}$.

Глава 4

Евклид – коллекционер ярчайших задач!

Гениальность Евклида (~ 365–300 гг. до н.э.) прежде всего в том, что он собрал все знания по геометрии своего времени в единую систему. Его труд «Начала», состоящий из 13 книг, по своей популярности и количеству изданий (свыше 500) уступает лишь Библии. Почти 80% геометрического материала, который изучает современный ученик, есть в работах Евклида! И это через 2300 лет после выхода в свет его выдающейся книги!

Кто-то из скептиков скажет: «Ну что такого особенного сделал Евклид? Собрал себе (читай: «скомпилировал») все предыдущие геометрические достижения и выдал за свои!..» Здесь Евклида защищает фраза Блеза Паскаля: «Пусть говорят, что я не открыл ничего нового, *но расположение предмета у меня новое*!..».

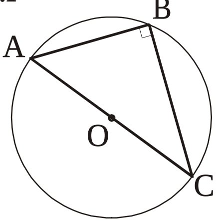
До нашего времени дошло немало легенд о Евклиде. Вот одна из них.

К Евклиду, который с учениками-юношами решал задачи, подошла девушка легкого поведения.

– *Послушай-ка, Евклид, вот я сейчас подмигну твоим ученикам, и они пойдут со мной, а вовсе не останутся с тобой! Веришь?*
– *Возможно, пойдут! – ответил Евклид. – Но дело в том, что ты тянешь их вниз, а я – вверх. А вверх тянуться всегда труднее!..*

Собирая задачи, Евклид уделял особое внимание тому, чтобы задачи эти были интересными и не слишком длинными по условию, посильными и красивыми при решении. Напомним несколько блестящих задач, которые содержатся в «Началах» Евклида.

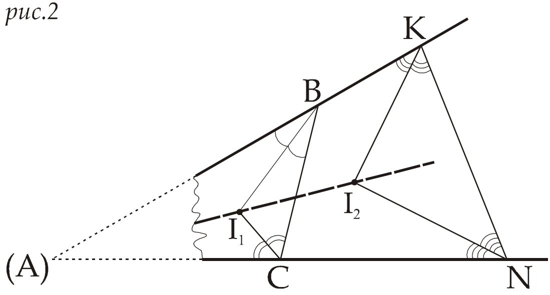
*рис.**1***



Задача 1. *Дана окружность, центр которой не указан. Циркулем и линейкой построить ее центр.*

<u>*Решение*</u>. Проведем произвольную хорду AB и перпендикулярно к ней – хорду BC *(рис.1)*. Тогда AC – диаметр окружности (поскольку вписанный угол ABC – прямой). Остается разделить AC пополам.

рис.2



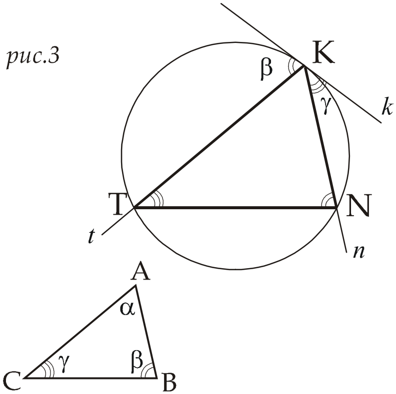
Задача 2. *Построить биссектрису угла, вершина которого недоступна.*

<u>*Решение*</u>. Построим произвольный отрезок BC с концами на сторонах угла (*рис.2*). Биссектрисы углов ABC и ACB определят I_1 – точку пересечения биссектрис треугольника ABC. Таким образом, биссектриса угла A, вершина которого недоступна, также проходит через точку I_1. Теперь берем произвольный отрезок KN с концами на сторонах угла. Проведя аналогичные операции, получим I_2 – точку пересечения биссектрис треугольника AKN. Очевидно, что прямая I_1I_2 совпадет с биссектрисой угла A.

Задача 3. *Вписать в окружность треугольник KNT, подобный данному треугольнику ABC.*

<u>*Решение*</u>. Пусть данный ΔABC имеет углы a, b, g (*рис.3*). Проведем касательную k к окружности через произвольную точку K ($k \perp KO$, где O – центр окружности). Из точки K под углами g и b к прямой k проведем соответственно лучи n и t. Они пересекут окружность в искомых точках N и T. Действительно, поскольку $\cup KN = 2g$, а $\cup KT = 2b$, то $\angle KTN = g$ и $\angle KNT = b$ – как вписанные. Очевидно, что $\angle TKN = 180 - (b + g) = a$.

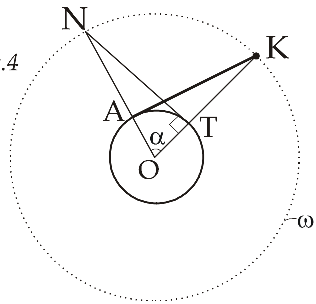
рис.3



Задача 4. *Провести касательную к окружности из точки K вне окружности.*

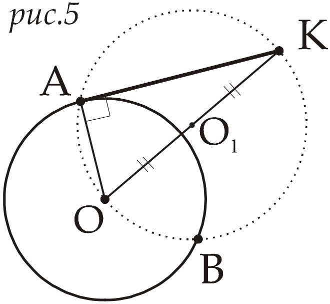
<u>*Решение*</u> (*Евклида*). Пусть KO пересечет данную окружность в точке T (*рис.4*). Построим окружность w радиуса OK, концентрическую данной. Проведем $TN \perp TO$ до пересечения с w в точке N. Отрезок NO пересечет данную окружность в точке A. Нетрудно доказать, что KA – касательная. Действительно, $\Delta OAK = \Delta OTN$ – по двум сторонами и углу a между ними. Итак, $\angle KAO = \angle NTO = 90°$, и KA – касательная к данной окружности.

рис.4



<u>*Замечание 1*</u>. Сейчас касательную проводят проще, чем во времена Евклида. Вот так (*рис.5*)! На отрезке KO как на диаметре строят окружность, которая пересекает данную окружность в искомых точках A и B (поскольку $\angle KAO = \angle KBO = 90°$ – вписанные и опираются на диаметр построенной окружности).

рис.5

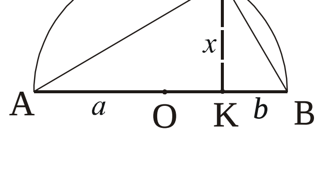


<u>*Замечание 2*</u>. Задачи 1–3 также можно решить и другими способами. Даже уместно устроить соревнование среди учеников: кто найдет больше вариантов решения?

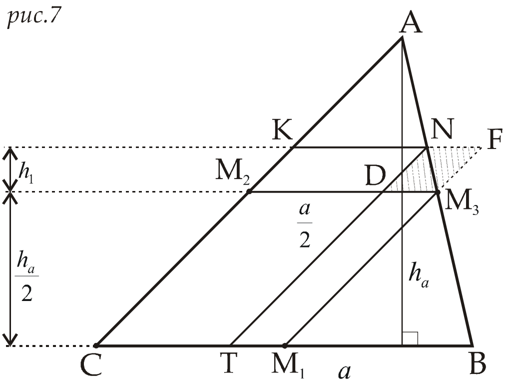
Задача 5. *Для двух данных отрезков a и b найти средний пропорциональный.*

<u>*Решение*</u>. Для построения отрезка $x = \sqrt{ab}$ сделаем следующее. Отложим $AB = a + b$ и на AB как на диаметре строим полуокружность (*рис.6*). Из точки K, которая разделяет a и b, восстанавливаем перпендикуляр к AB. Он пересечет полуокружность в точке N. Поскольку $\angle ANB = 90°$ (вписанный, опирается на диаметр), то $NK = \sqrt{ab}$.

рис.6



Задача 6. *В данный треугольник ABC вписать параллелограмм наибольшей площади.*



Решение. Покажем, что решением задачи будет параллелограмм, три вершины которого находятся в серединах сторон треугольника ABC (точках M_1; M_2; M_3). Итак, сравним площадь параллелограмма $CM_2M_3M_1$ с площадью другого параллелограмма, скажем $CKNT$ *(рис.7)*. Они имеют общую часть – параллелограмм CM_2DT. Нетрудно показать, что $S_{M_2KFM_3} = S_{TDM_3M_1}$ (из подобия ΔNM_3D и ΔABC имеем: $\dfrac{h_1}{h_a} = \dfrac{DM_3}{a} \Rightarrow$ $ah_1 = h_a \cdot DM_3$, или $\dfrac{a}{2} \cdot h_1 = \dfrac{h_a}{2} \cdot DM_3$). Тогда становится очевидным, что $S_{CM_2M_3M_1} > S_{CKNT}$ точно на площадь параллелограмма $DNFM_3$.

Замечание 3. Любопытно, что площадь «наибольшего» параллелограмма составляет $\dfrac{1}{2}S_{ABC}$. Действительно, $S_{CM_2M_3M_1} = \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{1}{2}h_a = \dfrac{1}{4}ah_a = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$.

И последнее. Напомним, что Евклид не побоялся сказать царю Птолемею I, который захотел быстро научиться геометрии: «Ваше величество! *Царского пути в математике не существует!* Если Вы желаете знать геометрию, будьте добры ежедневно вместе с моими учениками уделять ей достаточно времени!..»

Глава 5

Евклид и задачи с недоступными точками

Хорошо известна *задача Евклида:* ***постройте биссектрису угла, вершина которого недоступна.*** Едва ли найдется школьник, который не захочет решить ее. Разве не удивительно: самого угла нет, а его биссектрису провести можно! Задача Евклида вызвала к жизни мощную волну геометрических импровизаций. В результате через 2300 лет сложилась замечательная коллекция задач с недоступными точками, которую можно смело назвать гимном Евклиду! Некоторые из этих задач мы выносим на ваш суд.

Что касается задачи Евклида, то существует 7–8 способов ее решения. Два из них, отличных от способа *главы 4*, мы предлагаем Вашему вниманию. Итак, ***постройте биссектрису угла, вершина которого недоступна.***

Решение.

I способ. Пусть вершина C угла ACB недоступна (*рис.1*). Проведем через произвольную точку $K \in BC$ прямую $k \parallel AC$. Из точки K как из центра проведем произвольную окружность и получим точки E и F в пересечении с k и BC соответственно. При этом $KE = KF$ и ΔEKF – равнобедренный. Продолжим FE до пересечения с AC в точке D. Очевидно, что и ΔDCF (с недоступной вершиной C) является равнобедренным. Тогда серединный перпендикуляр к DF совпадет с биссектрисой угла C.

рис.1

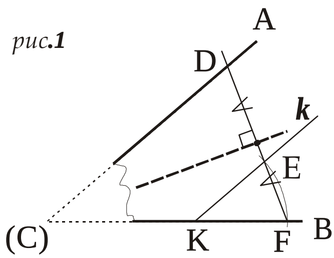
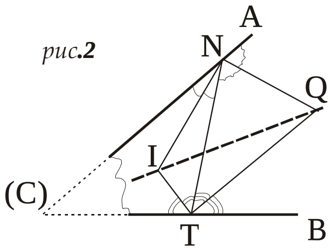


рис.2



II способ. Проведем произвольно отрезок NT $(N \in AC; T \in BC)$ – *рис.2*. Пусть внутренние биссектрисы углов N и T треугольника NCT пересекутся в точке I. Внешние же биссектрисы углов N и T пусть пересекаются в точке Q. Прямая QI совпадет с биссектрисой угла C (*докажите!*)

Еще несколько способов решения задачи Евклида учащиеся предложат сами и, возможно, удивят и порадуют нас. Мы же перейдем к рассмотрению задач на эту тему.

Задача 1. *Дан угол С, вершина которого недоступна, и точка К внутри угла. Проведите прямую КС.*

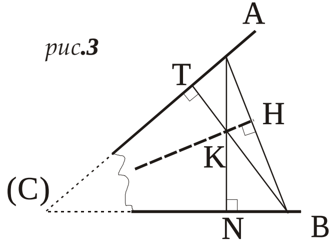


*рис.***3**

Решение. Проведем через K отрезки AN и BT перпендикулярно сторонам угла (*рис.3*). Соединим A и B, проведем $KH \perp AB$. Очевидно, что прямая HK пройдет через вершину C, поскольку точка K является ортоцентром (точкой пересечения высот) в ΔABC.

Задача 2. *Дан угол с недоступной вершиной С и точка К на стороне угла. Определите длину отрезка КС.*

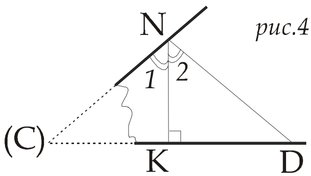


рис.4

Решение. Из точки K восстановим перпендикуляр KN к этой же стороне угла (*рис.4*). Из точки N проведем луч под углом, равным углу CNK: $\angle 2 = \angle 1$. Пусть проведенный луч пересекает прямую KC в точке D. Нетрудно показать, что $KD = KC$ – из равенства ΔNKC и ΔNKD – по катету и острому углу.

Задача 3. *Дан треугольник АВС, вершина С которого недоступна. Найдите его периметр.*

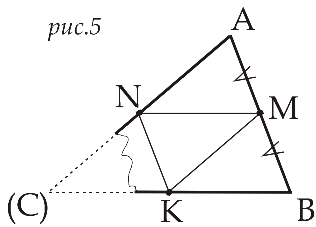


рис.5

Решение. Находим M – середину AB, проводим $MK \parallel AC$ и $MN \parallel BC$ (*рис.5*). Поскольку в таком случае MN, NK и KM – средние линии в ΔABC, то, определив периметр ΔMNK и увеличив его вдвое, мы найдем периметр ΔABC.

Замечание. Подумайте, как быть, если точки N и K (или одна из них) также окажутся недоступными.

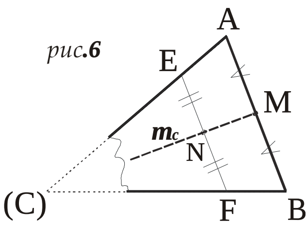


*рис.***6**

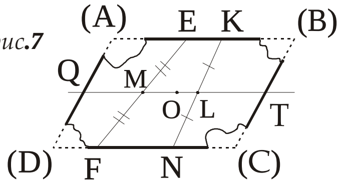
Задача 4. *Вершина С треугольника АВС недоступна. Проведите медиану* m_c.

Решение. Находим M – середину AB. Проводим $EF \parallel AB$ (*рис.6*) – там, где это возможно сделать. Прямая, проведенная через M и N (середину EF), содержит медиану m_c (докажите!).

Задача 5. *Найдите центр O параллелограмма ABCD, все вершины которого недоступны.*

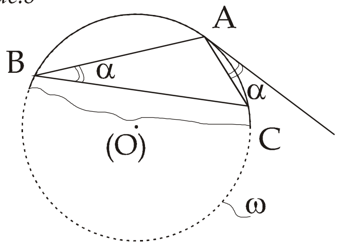
<u>*Решение.*</u> Выберем произвольно $K \in AB$ и $N \in CD$. Найдем положение точки *L* – середины *KN* (*рис.7*). Выбрав аналогично $E \in AB$ и $F \in CD$, найдем *M* – середину *EF*. Пусть прямая *ML* пересекает *AD* и *BC* в точках *Q* и *T* соответственно. Тогда середина отрезка *QT* совпадает с искомой точкой *O*.

рис.7



Если точки *Q* и *T* (или одна из них) недоступны, то аналогичным образом построенная прямая, проходящая через середины *AB* и *CD*, пересечет прямую *QT* в искомой точке *O*.

рис.8



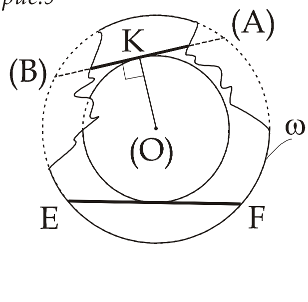
Задача 6. *Проведите касательную к окружности ω в данной точке A, если центр окружности недоступен.*

<u>*Решение.*</u> Проведем хорды *AB*, *BC* и *AC* – там, где это возможно. Пусть $\angle ABC = a$ (*рис.8*). Прямая, проведенная через *A* под углом α к хорде *AC* и будет искомой касательной – *по обратной теореме об угле между касательной и хордой*.

Задача 7. *Концы хорды AB окружности ω недоступны. Определите построением длину AB.*

<u>*Решение.*</u> Находим центр круга *O* (покажите, как это делается), и из него проводим перпендикуляр *OK* к хорде (*рис.9*). Радиусом *OK* проводим окружность, концентрическую данной. Касательная к построенной окружности в любой ее точке определит в пересечении с ω хорду, равную *AB*. Например, $EF = AB$.

рис.9



Следующие четыре задачи связаны с дополнительными ограничениями.

Задача 8. *Дан треугольник ABC с недоступной вершиной C. Указана точка M – середина AB. Проведя не более двух линий, постройте треугольник KN(C), подобный данному.*

Решение. Первая линия: окружность радиуса $MA = MB$ с центром в точке *M*. Она пересечет *AC* и *BC* в искомых точках *K* и *N (рис.10)*. Вторая линия: отрезок *KN*. Действительно, $\angle KNB = 180° - A$ (четырехугольник *ABNK* вписан в окружность). Тогда $\angle KNC = A$. Аналогично показывается, что $\angle NKC = B$.

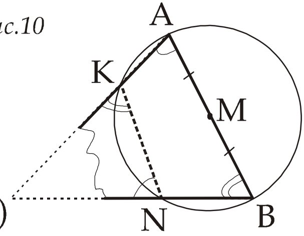


рис.10

Задача 9. *Дан угол, вершина C которого недоступна. При помощи только двусторонней линейки постройте биссектрису угла C.*

Решение. Приложив двустороннюю линейку по одному разу к сторонам угла, получим ромб *CDEF (рис.11)* – правда, без вершины *C*. Приложив ее еще по разу к сторонам *DE* и *EF*, получим ромб *CKNT (рис.12)*. Очевидно, прямая *NE* совпадет с биссектрисой угла *C*.

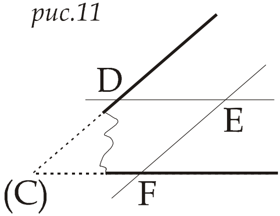


рис.11

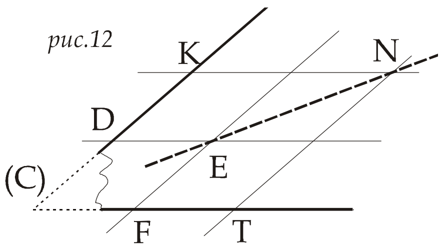


рис.12

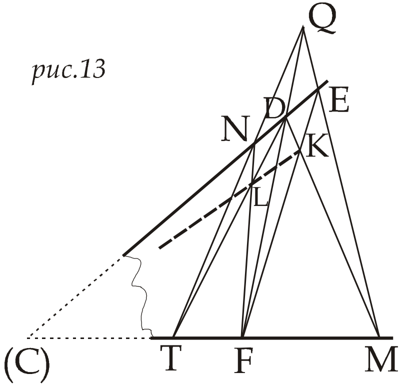


рис.13

Задача 10. *Дан угол, вершина C которого недоступна, и точка K внутри угла. Пользуясь одной линейкой, проведите прямую KC.*

Решение. Через точку *K* проведем произвольно *DM* и *EF*. Пусть $Q = ME \cap FD$ *(рис.13)*. Через *Q* проведем произвольно прямую, пересекающую стороны угла в точках *N* и *T*. Пусть также $L = DT \cap FN$. Покажем, что прямая *KL* пройдет через вершину *C*.

По теореме Менелая для ΔQDT и секущей NF:

$$\frac{QN}{NT}\cdot\frac{TL}{LD}\cdot\frac{DF}{FQ}=1 \qquad (1)$$

По теореме Менелая для ΔQDM и секущей EF:

$$\frac{QE}{EM}\cdot\frac{MK}{KD}\cdot\frac{DF}{FQ}=1 \qquad (2)$$

Приравняв левые части равенств (1) и (2), получим:

$$\frac{QN}{NT}\cdot\frac{TL}{LD}=\frac{QE}{EM}\cdot\frac{MK}{KD} \qquad (3)$$

По теореме Менелая для ΔTQM и секущей EN:

$$\frac{QE}{EM}\cdot\frac{MC}{CT}\cdot\frac{TN}{NQ}=1, \text{ откуда } \frac{QN}{NT}=\frac{QE}{EM}\cdot\frac{MC}{CT} \qquad (4)$$

Подставим значение $\frac{QN}{NT}$ из (4) в (3). Сократив на $\frac{QE}{EM}$, получим:

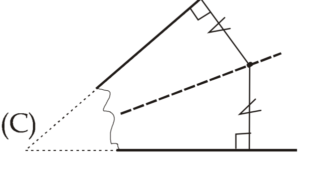
$$\frac{TL}{LD}\cdot\frac{DK}{KM}\cdot\frac{MC}{CT}=1$$

Тогда по обратной теореме Менелая для ΔTDM получаем, что $K-L-C$ – это одна прямая!

Задача 11. *На листе прозрачной бумаги нарисован угол, вершина которого недоступна. Постройте биссектрису этого угла.*

<u>*Решение.*</u> Для решения задачи достаточно совместить стороны угла! ***(рис.14)***

рис.14



В заключение предложим несколько задач для самостоятельного решения.

Задача 12. Дан угол с недоступной вершиной. Удвойте его.

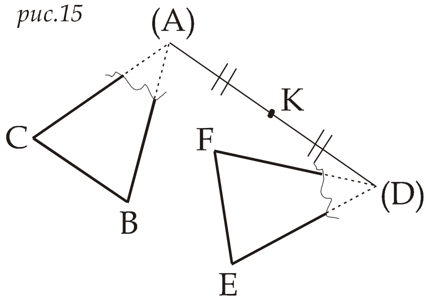
Задача 13. В треугольнике *ABC* вершина *C* недоступна. Проведите в нем высоту h_c.

Задача 14. Дан треугольник *ABC*, вершина *C* которого недоступна. Постройте точку пересечения его медиан.

Задача 15. Все вершины треугольника *ABC* недоступны. Определите построением длины его сторон.

Задача 16. Даны треугольники *ABC* и *DEF*, вершины *A* и *D* которых недоступны. В точке *K* – середине *AD* – спрятан клад *(рис.15)*. Как найти место, где спрятан клад?

рис.15



Задача 17. На обломке круга сохранился его центр *O* и часть хорды *AB* без ее концов. Найдите построением величину угла *AOB*.

Задача 18. В треугольнике *ABC* с недоступной вершиной *C* сохранилась прямая, содержащая медиану m_c. Проведя наименьшее число линий, найдите основания высот h_a и h_b.

Задача 19. Дан треугольник *ABC* с недоступной вершиной *C*. Пользуясь лишь двусторонней линейкой, проведите медиану m_c.

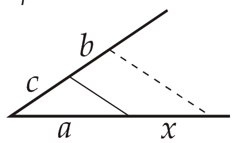
Задача 20. В окружности с недоступным центром проведены две параллельные неравные хорды. При помощи одной линейки разделите эти хорды пополам.

Глава 6

Евклид и построение четвертого пропорционального

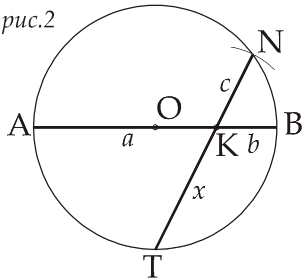
В 6[й] книге «Начал» Евклида встречаем задачу: «К трем данным отрезкам *a*, *b* и *c* построить четвертый, им пропорциональный». Другими словами, даны отрезки *a, b, c*. Необходимо построить отрезок $x=\dfrac{ab}{c}$. Эта задача успешно решается применением обобщенной теоремы Фалеса *(рис.1)*. Действительно, $\dfrac{c}{a}=\dfrac{b}{x}$, откуда $x=\dfrac{ab}{c}$.

рис.1



Предложим еще несколько способов построения отрезка *x*.

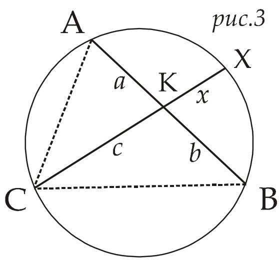
рис.2



Способ 2. На отрезке $AB=a+b$ как на диаметре строим окружность *(рис.2)*. Из точки *K*, разделяющей *a* и *b*, делаем засечку на окружности – раствором циркуля, равным *c*. Получаем точку *N*. Продлим *NK* до пересечения с окружностью в точке *T*. Тогда $KT=x,$ поскольку по теореме о произведении отрезков хорд $ab=cx,$ откуда

$$x=\frac{ab}{c}.$$

Замечание. Любые ли длины отрезков *a, b, c* позволяют осуществить такое построение?



Способ 3.[*] аналогичен предыдущему, но в отличие от него, всегда имеет решение. Построим отрезок $AB=a+b$ $(AK=a; BK=b)$. Через *K* произвольно проведем прямую и отложим на ней отрезок $KC=c$ *(рис.3)*. Вокруг ΔABC опишем окружность (это несложно!). Пусть прямая *CK* пересечет эту окружность в точке *X*. *KX* – искомый отрезок. Действительно, согласно теореме о произведении отрезков хорд $ab=cx,$ откуда $x=\dfrac{ab}{c}.$

---

[*] *Способы 3, 4, 8 предложены Л. Наврозашвили.*

Способ 4. [*] Основан на обратной теореме о равенстве углов, опирающихся на одну дугу. Строим отрезок $AB = a + b$ $(AK = a; BK = b)$ – *рис.4*. Аналогично предыдущему способу проводим $KC = c$. Далее соединяем точки A и C. На луче BA от точки B откладываем $\angle 2 = \angle 1$ и проводим луч. Он пересечет прямую CK в точке X. Очевидно, что точки $A; C; B; X$ принадлежат одной окружности ($\angle ACK = \angle XBK$). Следовательно, KX – искомый отрезок.

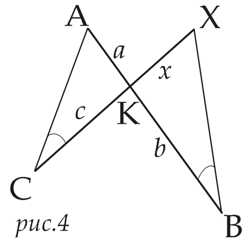


рис.4

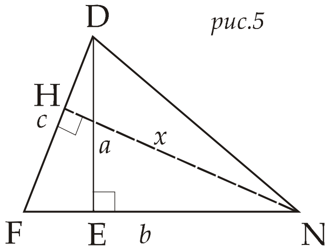


рис.5

Способ 5. Пусть $c > a$. Строим прямоугольный треугольник DEF с катетом $DE = a$ и гипотенузой $DF = c$ (*рис.5*). Продлим FE до точки N – так, чтобы $FN = b$. Соединим N с D и проведем в ΔNDF высоту $NH = x$. Действительно,

$$S_{NDF} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}cx \text{ и } x = \frac{ab}{c}.$$

<u>*Замечание*</u>. Выполните построение в случае $c < a$.

Способ 6. Воспользуемся формулой для ΔABC, доказанной Брахмагуптой (VII век н.э., Индия). $ab = h_c \cdot 2R$ (h_c – высота, проведенная к AB, R – радиус описанной окружности ΔABC) – рис.6.

Поскольку $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ch_c$ и $c = 2R\sin C$ (теорема синусов), то формула Брахмагупты доказана.

рис.6

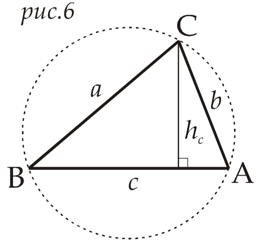
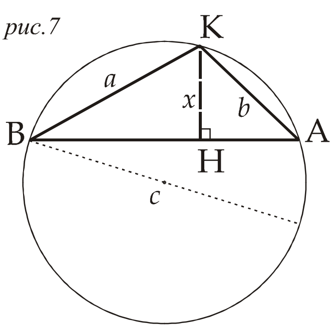


рис.7



Пусть из трех данных отрезков наибольшим является отрезок c. Тогда следующее построение: на отрезке c как на диаметре строим окружность. Из любой ее точки K делаем засечки сначала раствором циркуля, равным a, затем – b (*рис.7*). В полученном ΔAKB проведем высоту $KH = x$.

$$ab = x \cdot 2R, \text{ где } 2R = c \text{ и } x = \frac{ab}{c}.$$

<u>*Замечание*</u>. Выполните аналогичное построение в случае, когда c не является наибольшим отрезком.

Согласно теореме Мора-Маскерони ***всякая задача на построение, разрешаемая циркулем и линейкой, может быть решена одним только циркулем.*** При этом прямая считается построенной, если построены любые две ее точки.

Построим в подтверждение теоремы отрезок $x = \dfrac{ab}{c}$ с помощью одного циркуля *(задача Маскерони)*.

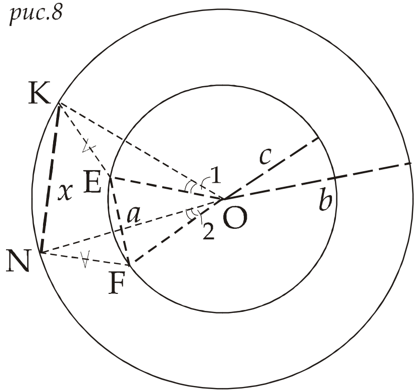


рис.8

<u>Способ 7</u>. *(Маскерони)* Пусть $b > c > a$. Построим две концентрические окружности с центром O, радиусы которых равны b и c *(рис.8)*. На меньшей окружности раствором циркуля, равным a, отмечаем точки E и F. Из точек E и F любым раствором делаем две засечки на большей окружности – точки K и N. Эти две точки определят отрезок

$KN = x = \dfrac{ab}{c}$. И вот почему:

$\Delta OEF \sim \Delta OKN$ (равнобедренные, с равными углами при вершине, т.к. $\angle 1 = \angle 2$ – покажите!).

Следовательно, $\dfrac{EF}{KN} = \dfrac{OE}{OK}$, или $\dfrac{a}{x} = \dfrac{c}{b}$, откуда $x = \dfrac{ab}{c}$.

<u>Замечание</u>. При каком соотношении длин отрезков a, b, c задача может быть разрешена?

<u>Способ 8</u>. [*] Для построения отрезка x воспользуемся окружностью Аполлония. Пусть $a > c > b$. Строим отрезок $AB = c + b$ $(AC = c; CB = b)$ – *рис.9*. Точка C делит его внутренним образом: $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{c}{b}$. Разделим этот отрезок внешним образом точкой Q: $\dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{c}{b}$. На отрезке CQ как на диаметре строим окружность Аполлония. Из точки A раствором циркуля, равным a, делаем засечку на окружности, обозначив ее через X. Тогда $XB = x$ – искомый отрезок.

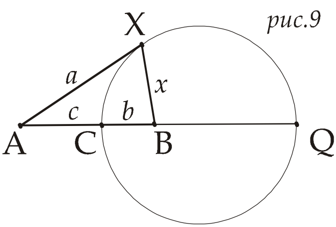


рис.9

<u>Замечание 1</u>. Выполните аналогичные построения для других соотношений между отрезками a, b, c.

<u>Замечание 2</u>. Подумайте, когда данный способ не дает решения.

Несколько задач на тему четвертого пропорционального предложим для самостоятельного решения.

Задача 1. Дан отрезок a и угол α. Постройте отрезок $x = a\sin a$.

<u>*Указание*</u>. *Постройте произвольный прямоугольный треугольник с острым углом α (рис.10), а затем отрезок* $x = \frac{am}{t}$.

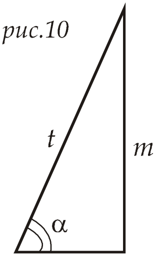


рис.10

Задача 2. Даны отрезки a, b, c, d, k, m, n. Постройте отрезок

$$x = \frac{abcd}{kmn}.$$

Задача 3. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок $x = \frac{a^{2008}}{b^{2007}}$.

<u>*Указание*</u>. *Постройте отрезок* $y = \frac{a \cdot a}{b}$, *затем* $z = \frac{ya}{b}$ *и т.д.*

Задача 4. Даны отрезки a, b, c. Постройте отрезок x, если известно, что справедлива формула $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

<u>*Указание*</u>. *Постройте сначала отрезок* y, *где* $\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ *и* $y = \frac{ab}{a+b}$.

Задача 5. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок $x = \frac{a^4}{a^3 + b^3}$.

<u>*Указание*</u>. $\frac{a^4}{a^3 + b^3} = \frac{a^2}{a + \frac{b^3}{a^2}}$. *Постройте отрезок* $y = \frac{bb}{a}$, *затем отрезок*

$z = \frac{yb}{a}$, *затем* $t = a + z$.

Задача 6. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок $x = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$.

Задача 7. Даны отрезки $h_a; h_b; h_c,$ равные высотам некоторого треугольника ABC. Постройте отрезок r, равный радиусу вписанной в этот треугольник окружности.

<u>*Указание*</u>. *Воспользуйтесь формулой* $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ *и решением Задачи 4.*

Глава 7
Леммы Архимеда из Сиракуз

«Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометрии»

В.Г. Лейбниц

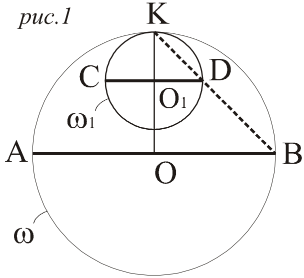
Архимед Сиракузский (~287–212 гг. до н.э.) столь много сделал в области геометрии, механики, астрономии, что даже не совсем верится: неужели все это мог сделать один человек? Однако это так!.. Историк Плутарх (I в. н.э.) пишет: «Во всей геометрии нельзя найти более трудных и глубокомысленных задач, которые были бы решены так просто и ясно, как те, которыми занимался Архимед».

Уникальный геометрический материал содержится в одном из сочинений Архимеда – «Книге лемм». Лемма – это вспомогательная теорема. Архимед стал автором замечательной коллекции таких теорем. О некоторых леммах великого Архимеда мы и поведем наш дальнейший разговор.

1. *Лемма о параллельных диаметрах*

Пусть окружности w и w_1 касаются в точке K. При этом их диаметры AB и CD параллельны (рис.1). Докажите, что точки $K-D-B$ лежат на одной прямой.

рис.1



<u>*Доказательство*</u>. Пусть имеет место внутреннее касание. Поскольку точка касания *K* и центры O_1 и *O* лежат на одной прямой, то достаточно показать, что $\angle O_1KD=\angle OKB$. А это верно. Действительно, $\angle KO_1D=\angle KOB$ (т.к. $CD\parallel AB$), а ΔKO_1D и ΔKOB равнобедренные.

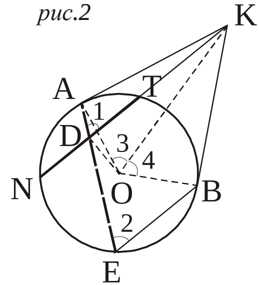
Аналогично рассматривается случай внешнего касания окружностей.

2. *Лемма о касательных и секущей*

Из точки K вне круга проведены к нему касательные KA и KB и секущая $K-T-N$ (рис.2). Провели хорду $BE\parallel KN$. Докажите, что AE делит хорду TN пополам.

<u>*Доказательство*</u>. Пусть $D = AE \cap NT$. Пусть также $\angle 1 = \angle 2 = a$ $(KN \parallel BE)$. Тогда $\angle AOB = 2a$ – центральный (а $\angle 2 = a$ – вписанный). Соединим O и K. Очевидно, что $\angle 3 = \angle 4 = a$. Поскольку $\angle 1 = \angle 3$, то точки $O - D - A - K$ лежат на одной окружности. А так как $\angle OAK = 90°$, то OK – диаметр этой окружности. Тогда и $\angle ODK = 90°$. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. У нас $OD \perp NT$. Следовательно, $ND = DT$.

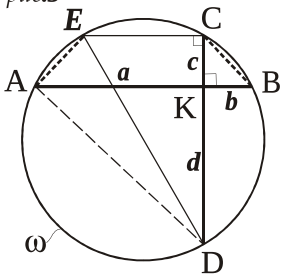
рис.2



3. Лемма о перпендикулярных хордах

AB и CD – перпендикулярные хорды окружности ω, которые пересекаются в точке K (рис.3). AK=a; BK=b; CK=c; DK=d. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2=4R^2$, где R – радиус окружности ω.

рис.3



<u>*Доказательство*</u>. Проведем $CE \parallel AB$. Поскольку $\angle ECD = 90°$, то ED – диаметр окружности ω.

$CB^2 = b^2 + c^2$ (из прямоугольного ΔCKB). При этом $CB = AE$ (дуги, заключенные между параллельными хордами, равны).

$AD^2 = a^2 + d^2$ (из прямоугольного ΔAKD). Применим теорему Пифагора для ΔEAD ($\angle EAD = 90°$ – вписанный, опирается на диаметр):

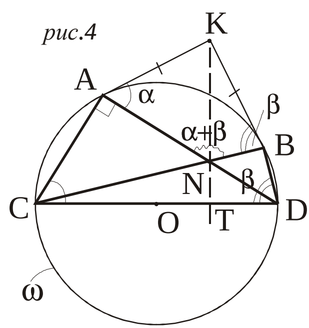
$EA^2 + AD^2 = ED^2$, или $b^2 + c^2 + a^2 + d^2 = (2R)^2$,

что равносильно решению задачи.

4. Лемма о перпендикуляре на диаметр

KA и KB – касательные к окружности ω с диаметром CD (рис.4). AD и BC пересекаются в точке N. Докажите, что $KN \perp CD$.

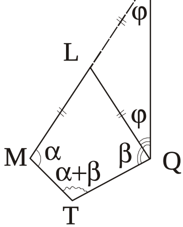
рис.4



<u>*Доказательство*</u>. Решим сначала задачу, которая поможет доказать лемму.

В четырехугольнике LMTQ $LM = LQ$, $\angle LMT = a$, $\angle LQT = b$ и $\angle MTQ = a + b$ (рис.5). Докажите, что точки M, T, Q лежат на окружности с центром в точке L.

рис.5



Решение.

Продлим ML на $LE = ML = LQ$. Пусть также $\angle LEQ = \angle LQE = j \quad (LE = LQ)$. Тогда в четырехугольнике $EMTQ$ сумма углов при вершинах E и T равна сумме углов при вершинах M и Q и равна $a + b + j$. Тогда $a + b + j = 180°$ и около $EMTQ$ можно описать окружность. Поскольку $LM = LE = LQ$, то L – центр этой окружности. Теперь вернемся к *рис.4.* Пусть $\angle ACD = \angle KAD = a$ (вписанный угол и угол между касательной и хордой). Пусть также $\angle BDC = \angle KBC = b$ (по аналогичной причине). Поскольку $\angle BCD = 90° - b$ и $\angle ADC = 90° - a$, то из ΔCND нетрудно сосчитать величину угла CND: $\angle CND = a + b = \angle ANB$

Тогда для четырехугольника $KANB$ имеем только что решенную *вспомогательную задачу*. Согласно этой задаче точка K – центр окружности, описанной около ΔANB. Отсюда $KN = KA$ и $\angle KNA = \angle KAN = a$. Смежный с ним $\angle ANT = 180° - a$. Следовательно, около 4-угольника $ACTN$ можно описать окружность $(180° - a + a = 180°)$. Тогда и сумма углов CAN и CTN равна 180^{o}. Но $\angle CAN = 90°$. Значит, и $\angle CTN = 90°$.

5. Лемма о перпендикулярах из концов диаметра

Диаметр CD пересекает хорду AB. Из C и D к AB проведены перпендикуляры CN и DT. Докажите, что AT=BN (рис.6).

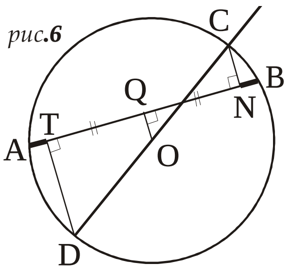


рис.6

Доказательство. Проведем из центра O отрезок $OQ \perp AB$. Тогда $AQ = QB$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам). По теореме Фалеса нетрудно показать, что $QT = QN$ (покажите!). Отняв от равных отрезков равные, получим: $AT = BN$.

6. Лемма о пятиугольнике

Дан полукруг с диаметром AB = 2R и центром O. AC – сторона правильного пятиугольника, вписанного в круг. D – середина дуги AC (рис.7). Из точки пересечения AC и BD к диаметру проведен перпендикуляр QN. Прямые CD и BA пересекаются в точке T. Докажите, что TN=R.

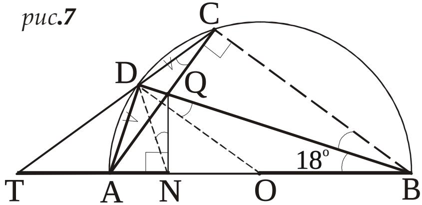


рис.7

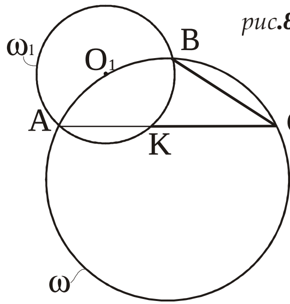
Доказательство. Поскольку AC – сторона правильного пятиугольника, вписанного в окружность, то AD – сторона правильного вписанного десятиугольника. Тогда $\angle AOD = 36° \quad (360° : 10)$. Значит, в ΔAOD $\angle ADO = \angle DAO = 72°$. Очевидно, что $\angle ABD = \angle DBC = 18°$. $\Delta QCB = \Delta QNB$ – по гипотенузе и острому углу, следовательно, $BN = BC$. Тогда $\Delta DNB = \Delta DCB$ – по двум сторонам и углу между ними, откуда $DN = DC$. При этом $DC = DA$. Значит, $DN = DA$. Теперь нетрудно показать, что $\Delta DAT = \Delta DNO$ – по стороне и двум прилежащим углам ($DN = DA$; $\angle DAT = \angle DNO$ – как смежные равным углам; $\angle ADT = \angle NDO = 36°$). Отсюда $TA = NO$ и $TN = AO = R$.

Еще несколько лемм Архимеда предлагаем доказать самостоятельно.

7. Лемма о центре окружности (современная формулировка)

Окружности ω и ω_1 пересекаются в точках A и B, причем центр O_1 окружности ω_1 лежит на ω (рис.8). Хорда AC окружности ω пересекает ω_1 в точке K. Докажите, что KC=BC.

рис.8



8. Лемма о площади арбелона

Арбелон (сапожный нож – греч.) – это фигура, ограниченная тремя полуокружностями, построенными на отрезках AD, DC и AC как на диаметрах (заштрихованная фигура на рис.9).
Докажите, что площадь арбелона равна площади круга, построенного на отрезке *BD* как на диаметре (где $BD \perp AC$).

9. Лемма о квадрате

Если окружность ω описана около квадрата, а окружность ω_1 в него вписана, то $S_w : S_{w_1} = 2:1$.

10. Лемма о сумме дуг перпендикулярных хорд

Хорды *AB* и *CD* окружности ω перпендикулярны *(рис.10)*. Докажите, что

$$\cup AC + \cup BD = \cup BC + \cup AD.$$

11. Лемма о салионе

На отрезках AB, BC, CD, AD как на диаметрах построены полуокружности (на BC в противоположную сторону) – рис.11. При этом $AB = CD$. Заштрихованная фигура называется салион (солонка –греч.)
Докажите, что площадь салиона равна площади круга, построенного на *KN* как на диаметре (*KN* совпадает с серединным перпендикуляром к *AD*).

рис.9

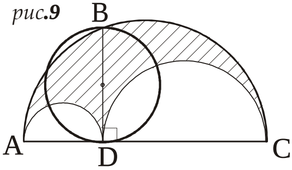


рис.10

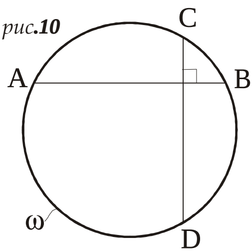
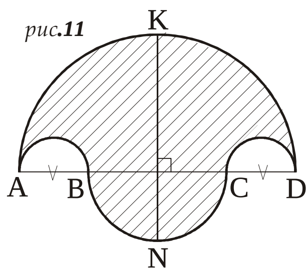


рис.11



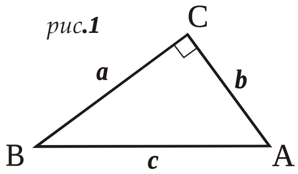
Глава **8**

Задачи Архимеда с прямоугольным треугольником

Книга Архимеда «О прямоугольных треугольниках» лишь упоминается арабскими математиками. До наших дней она не дошла... Можно только предполагать, сколько красивых, занимательных задач было в этой книге!.. Тем не менее, в различных трудах Архимеда мы встречаем задачи, связанные с прямоугольным треугольником. Попробуем собрать их воедино. Заметим, что все задачи Архимед решал с помощью «чистой геометрии» (алгебры в те времена еще не было). Мы же предложим современные формулировки и решения этих задач.

Задача 1. *Докажите, что в прямоугольном треугольнике ABC (C=90°) выполняется равенство: $2(c+a)(c+b)=(2p)^2$, где 2p – периметр треугольника.*

рис.1



Доказательство. Покажем, что

$2(c+a)(c+b)=(a+b+c)^2$ – *рис.1*.

Действительно,

$$2(c+a)(c+b)=2c^2+2ac+2bc+2ab=$$

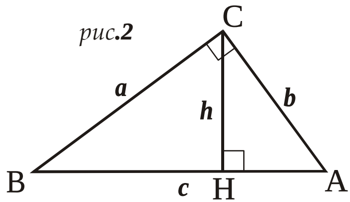
$$=c^2+c^2+2ab+2bc+2ac=$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=$$

$$=(a+b+c)^2=(2p)^2.$$

Задача 2. *В прямоугольном треугольнике ABC (C=90°) проведена высота CH=h (рис.2). Докажите справедливость равенства: $2c(2p+h)=(2p)^2$.*

рис.2



Доказательство.

$2c(2p+h)=2c(a+b+c+h)=2ac+2bc+2c^2+2ch.$ Однако, $c^2=a^2+b^2$ и $ch=ab=2S.$

Тогда $2c(2p+h)=2ac+2bc+a^2+b^2+c^2+2ab=(a+b+c)^2=(2p)^2.$

Задача 3. *В прямоугольном треугольнике ABC (C=90°) имеет место равенство: $(2p)^2+(a-b)^2=(c+a)^2+(c+b)^2$. Докажите!*

Доказательство.

I способ

$$(2p)^2+(a-b)^2=(a+b+c)^2+(a-b)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac+$$

$$+a^2-2ab+b^2=c^2+c^2+2bc+2ac+a^2+b^2=(c+a)^2+(c+b)^2.$$

II способ.

Необходимо доказать, что $(a-b)^2=(c+a)^2+(c+b)^2-(2p)^2$.

Согласно *Задаче 1* $(2p)^2=2(c+a)(c+b)$.

Тогда имеем: $(c+a)^2+(c+b)^2-(2p)^2=(c+a)^2+(c+b)^2-2(c+a)(c+b)=$

$=(c+a-c-b)^2=(a-b)^2$.

Еще раз напомним, что не следует считать *задачи 1–3* слишком легкими – ведь Архимеду приходилось находить *геометрические решения* этих задач.

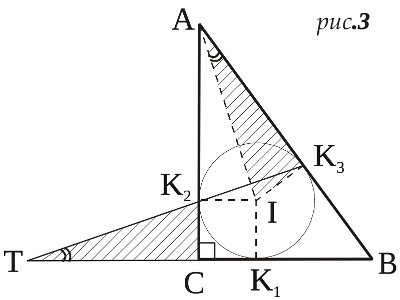


*рис.**3***

Задача 4. *Вписанная в прямоугольный треугольник ABC окружность касается катетов BC, AC и гипотенузы AB соответственно в точках K_1; K_2; K_3. Прямая K_3K_2 пересекает прямую BC в точке T (рис.3). Докажите, что $CT=AK_3=p-a$.*

Доказательство. Соединим вершину *A* с центром *I* вписанной в ΔABC окружности. Нетрудно показать, что $\Delta AK_3I=\Delta TCK_2$ – по катету и острому углу $(IK_3=K_2C=r;\ \angle K_3AI=\angle K_2TC=\frac{A}{2})$. Следовательно, $CT=AK_3$. Покажите самостоятельно, что $AK_3=p-a$.

Задача 5. *Докажите, что в условиях Задачи 4 выполняется соотношение: $\frac{BT}{CT}=\frac{BK_3}{CK_2}$.*

Доказательство. Восстановим из *B* перпендикуляр к *BC* до пересечения с прямой K_2K_3 в точке *D* (*рис.4*).

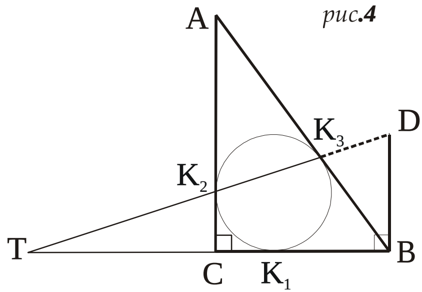
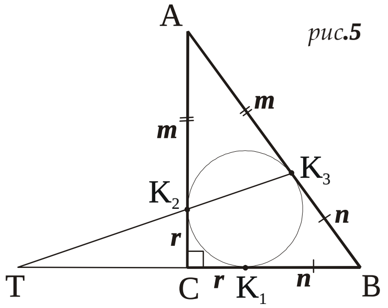


*рис.**4***

Из подобия треугольников TDB и TK_2C следует: $\frac{BT}{CT} = \frac{BD}{CK_2}$.

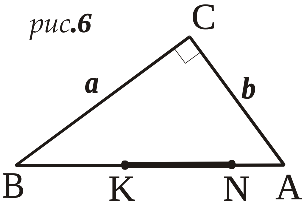
Остается показать, что $BK_3 = BD$ (покажите, что $\angle BK_3D = \angle BDK_3 = 90° - \frac{A}{2}$).

Задача 6. *Докажите, что площадь прямоугольного треугольника ABC ($C=90^o$) вычисляется по формуле: S=mn, где m=AK_3; n=BK_3 (рис.5).*



Доказательство. Продлим K_2K_3 до пересечения с прямой BC в точке T. Согласно *задаче 5* $CT \cdot BK_3 = BT \cdot CK_2$. Однако по *задаче 4* $CT = AK_3 = p - a = m$. Таким образом, $m \cdot n = BT \cdot CK_2$. Но $CK_2 = r$, а $BT = BC + CT = a + p - a = p$.

Тогда $mn = pr = S$.



Задача 7. *На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взяты точки K и N – такие, что AK=b и BN=a (рис.6). Докажите, что KN·2p=4S.*

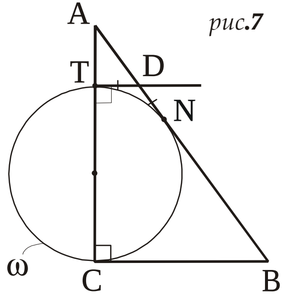
Доказательство. Поскольку $S = pr$, то остается доказать, что $KN = 2r$. Покажем это:
$BK = AB - AK = c - b$; $AN = AB - BN = c - a$;

$$KN = AB - (AN + BK) = c - (c - a) - (c - b) = a + b - c.$$

Поскольку в прямоугольном треугольнике $r = \frac{a+b-c}{2}$, то $KN = 2r$.

Задача 8. *Дан прямоугольный треугольник ABC ($C=90^o$). Окружность ω касается BC в точке C, AB – в точке N и пересекает AC в точке T. Касательная к ω в точке T пересекает AB в точке D (рис.7). Докажите, что*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BN}{ND}.$$



Доказательство. Очевидно, что TC – диаметр окружности ω и $TD \parallel BC$.

Тогда из подобия треугольников ABC и ADT имеем: $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DT}$. Но $BC=BN$ и $DT=DN$ (касательные, проведенные из одной точки). Значит, $\frac{AB}{AD}=\frac{BN}{ND}$.

Задача 9. *На отрезке AB как на гипотенузе построены два прямоугольных треугольника: ACB и ADB. AC и BD пересекаются в точке K (рис. 8). Докажите, что AK·KC=BK·KD.*

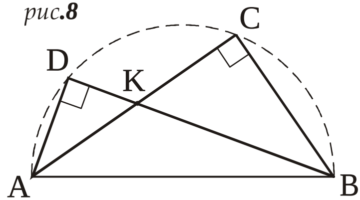


рис.8

Доказательство. Поскольку точки $A;D;C;B$ лежат на одной окружности с диаметром AB, то *по теореме о произведении отрезков хорд* выполняется равенство: $AK\cdot KC=BK\cdot KD$.

Задача 10 (лемма Архимеда). *На катете BC как на диаметре построен полукруг, который пересекает гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC в точке E (рис.9). EN – касательная к полукругу (N∈ AC). ET – перпендикуляр к BC. Докажите, что BN делит ET пополам.*

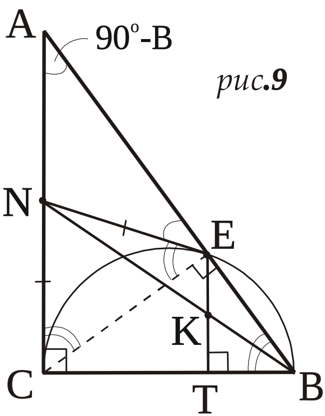


рис.9

Доказательство. Соединим E и C. $\angle CEB=90°$ (вписанный, опирается на диаметр). Тогда и $\angle CEA=90°$. При этом $NE=NC$ (касательные из одной точки). Тогда EN –медиана, проведенная к гипотенузе в прямоугольном треугольнике AEC (покажите!) и $AN=NC$. Поскольку $ET \parallel AC$ и BN делит AC пополам, то BN делит и отрезок ET пополам, т.е. $EK=KT$.

Глава 9
Лемма Архимеда о трисекции угла. «Метод вставок»

Среди задач на построение, решаемых циркулем и линейкой, особое место занимают три классические задачи:

1. *Об удвоении куба* (построить куб, имеющий объем вдвое больший объема данного куба).
2. *О трисекции угла* (разделить произвольный угол на три равные части).
3. *О квадратуре круга* (построить квадрат, равновеликий данному кругу).

Интерес к ним подогревался еще и тем, что ни в античное время, ни в средние века, ни позже никому не удавалось решить эти задачи. Математики понимали, что разделить угол на три равные части с помощью циркуля и линейки, скорее всего, вообще невозможно. Однако доказать это также никто не мог вплоть до первой половины XIX века. Едва ли можно назвать хоть одного крупного математика, которого эти задачи оставили бы равнодушным.

Задача о трисекции угла, вероятно, возникла при построении правильного девятиугольника. Действительно, для этого надо было построить угол $360^o:9=120^o:3$, то есть осуществить трисекцию угла 120^o.

Что касается Архимеда, то для решения задачи о трисекции угла он использовал так называемый «метод вставок». Вот, например, если бы на линейке сделать две засечки – чтобы расстояние между ними было равно радиусу окружности!.. Другими словами, если бы удалось «вставить» отрезок, равный *R*!

Конечно, великий Архимед знал, что «вставка» отрезка, как и любые другие «вставки», – запрещенный прием в задачах на построение. Он и не претендовал на то, что одолел задачу о трисекции угла. Он претендовал только на изобретательность, выдумку, блеск творческой фантазии! На остроумное исследование задачи! На то, что сочинил легкую, но изящную лемму.

Лемма Архимеда о трисекции угла. *Пусть AOB – центральный угол окружности радиуса R (AO=OB=R). Докажите, что если бы удалось «вставить» отрезок CD=R, где B–C–D – одна прямая (рис.1), то трисекция угла AOB была бы выполнена.*

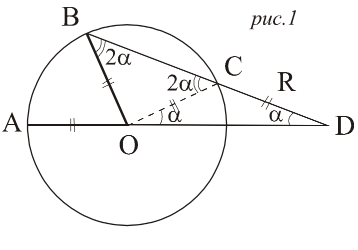


рис.1

Доказательство. Пусть $\angle CDO=\angle COD=a$ ($CD=CO=R$). Тогда $\angle OCB=2a$ (внешний для ΔCOD). Но и $\angle OBC=2a$ ($OB=OC=R$). Поскольку угол *AOB* является внешним для ΔBOD, то $\angle AOB=2a+a=3a$. Вот и получается: $\angle BDA=a$ составляет третью часть $\angle AOB=3a$. Трисекция угла осуществлена.

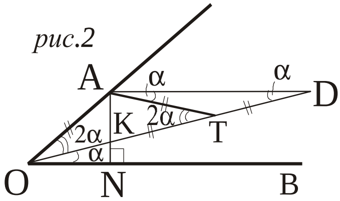
Таким образом, Архимед, воспользовавшись «методом вставок», словно пригласил математиков грядущих поколений придумывать новые задачи, связанные с трисекцией угла. *Некоторые из таких задач предложим Вашему вниманию*.

***Задача Никомеда (II век до н.э.)** Дан угол AOB. AN $\perp$ OB (рис.2). Пусть удалось «вставить» отрезок KD=2AO, где K$\in$ AN; AD и OB параллельны и точки D – K – O лежат на одной прямой. Докажите, что в таком случае выполнена трисекция угла AOB.*

<u>*Доказательство*</u>. Проведем медиану AT к гипотенузе KD прямоугольного ΔAKD. Тогда $AT = KT = TD = AO$.

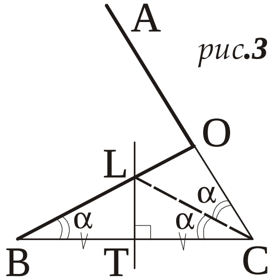
Пусть $\angle ADO = a = \angle DON$ (внутренние накрест лежащие при $AD \parallel OB$). $\angle TAD = a$ ($AT = TD$), а $\angle ATO = 2a$ (внешний для ΔATD). $\angle AOT = \angle ATO = 2a$ ($AT = AO$). Следовательно, луч OD отсек $1/3$ угла AOB.

рис.2



***Задача Паппа Александрийского (III век н.э.)** Дан угол AOB. Пусть по другую сторону от A окажется возможным построить ΔOBC – такой, что серединный перпендикуляр к BC пройдет через основание L биссектрисы CL треугольника OBC (рис.3). Докажите, что тогда трисекция угла AOB осуществлена.*

рис.3

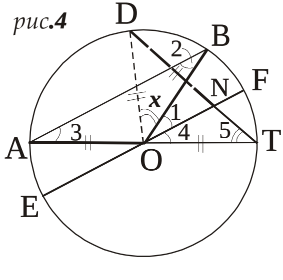


<u>*Доказательство*</u>. Пусть $\angle OCL = \angle LCB = a$. Значит, и $\angle LBC = a$ (LT – медиана и высота в ΔBLC). Теперь очевидно, что $\angle AOB = 3a$, т.к. он является внешним для ΔOCB.

***Задача Якоба Бернулли (1654–1705).** Пусть AOB – центральный угол окружности радиуса R. EF – диаметр, параллельный AB. AT – тоже диаметр (рис.4). Хорда DT вставлена так, что DN = R (N = DT $\cap$ EF). Докажите, что трисекция угла AOB в этом случае осуществлена.*

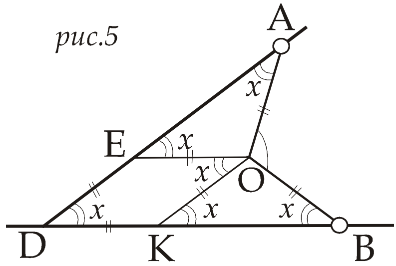
<u>*Доказательство*</u>. Пусть $\angle 1 = \angle 2 = j$ (внутренние накрест лежащие при $AB \parallel EF$). Тогда $\angle 3 = \angle 2 = j$ ($OA = OB = R$). Но и $\angle 4 = \angle 3 = j$ (соответственные при $AB \parallel EF$). Пусть также $\angle DOB = x$. Тогда $\angle DON = x + j = \angle DNO$ ($DO = DN = R$). Однако, $\angle DNO$ – внешний угол для ΔONT, т.е. $x + j = \angle 4 + \angle 5$. Поскольку $\angle 4 = j$, то $\angle 5 = x$. Итак, $\angle 5 = \angle DTA = x$.

рис.4



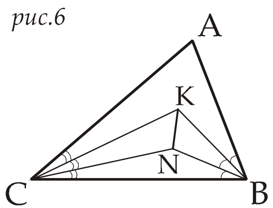
Угол AOD – центральный. Он, как и вписанный $\angle DTA = x,$ опирается на $\cup AD$. Следовательно, $\angle AOD = 2x.$ Тогда $\angle AOB = 2x + x = 3x,$ то есть $\angle DTA = x$ составляет 1/3 часть угла $AOB.$

Задача Джованни Чевы (1648–1734). *На рис.5 представлен его инструмент для деления угла на три равные части. Точки A и B свободно перемещаются по сторонам угла ADB – с тем, чтобы угол AOB принимал всевозможные значения. Докажите, что $\angle$ADB=x=1/3$\angle$AOB.*



Доказательство. Поскольку $OE \parallel DB,$ то $\angle AEO = x = \angle EAO$ ($OE = OA$). Аналогично $OK \parallel AD$ $\angle OKB = x = \angle OBK$ ($OK = OB$).

Тогда $\angle AOB = 360° - (180° - 2x + x + 180° - 2x) = 3x.$ Следовательно, $\angle ADB = x = \frac{1}{3}\angle AOB.$

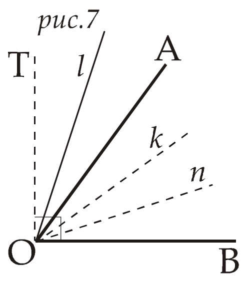


Задача об инцентре. *Пусть в ΔABC удалось осуществить трисекцию углов B и C. При этом ближние к B и C лучи пересеклись в точке N, а дальние – в точке K (рис.6). Сравните величины углов BKN и CKN.*

Решение. Они равны, поскольку N – инцентр (точка пересечения биссектрис) в ΔBKC. Значит, KN – также является биссектрисой, и $\angle BKN = \angle CKN$.

Задача об угле 54°. *Пользуясь циркулем и линейкой, выполните трисекцию угла 54°.*

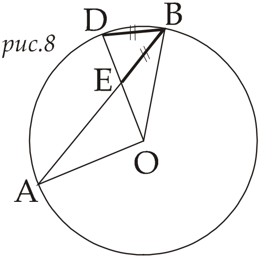
Решение. Пусть дан $\angle AOB = 54°.$ В точке O восстановим перпендикуляр OT к OB (*рис.7*). Тогда $\angle AOT = 90° - 54° = 36°.$ Биссектриса l угла AOT дает угол, равный 18°. Так как $18° = 54° : 3,$ то остается внутри угла AOB дважды отложить угол 18° (лучи n и k). Трисекция угла AOB осуществлена!



Несколько задач, связанных с «методом вставок» и просто с трисекцией угла, предлагаются для самостоятельного решения.

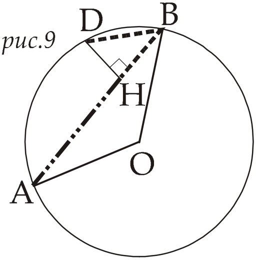
Задача 1. Дан центральный угол AOB. Пусть удалось «вставить» хорду BD – такую, что $BD = BE$ (рис.8). При этом точки $D–E–O$ лежат на одной прямой. Докажите, что в таком случае задача о трисекции угла решена.

рис.8



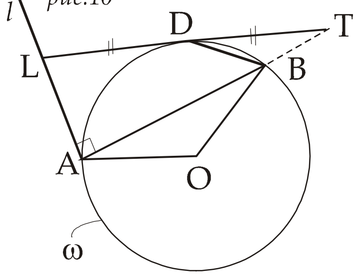
Задача 2. Дан центральный угол AOB. Предположим, что удалось «вставить» хорду BD – такую, что, проведя $DH \perp AB$, получили: $AH = HB + BD$ *(рис.9)*. В таком случае трисекция угла AOB выполнена. Докажите!

рис.9



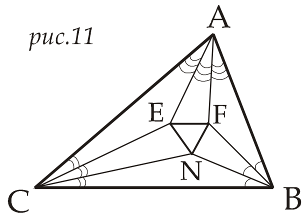
Задача 3. AOB – центральный угол в окружности ω. Пусть удалось «вставить» хорду BD – так, что касательная LT к окружности ω, проведенная в точке D, делится ею пополам, то есть $LD = DT$ *(рис.10)*, где $L \in l$ – перпендикуляру к AB в точке A; T принадлежит прямой AB. Докажите, что тогда трисекция угла AOB осуществлена.

рис.10



Задача 4.* ***Теорема Ф. Морлея (1860–1937)*** Пусть в ΔABC выполнена трисекция каждого из углов. Ближайшие к BC лучи пересеклись в точке N, к AC – в точке E, и к AB – в точке F *(рис.11)*. Докажите, что ΔNEF – равносторонний.

рис.11



Задача 5. Одним циркулем выполните трисекцию угла 54° (найдите две точки, чтобы лучи, проходящие через вершину угла и эти две точки, делили угол на три равные части).

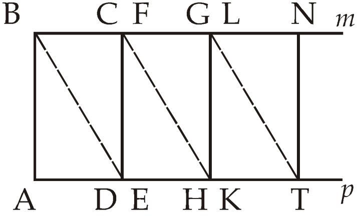
Задача 6. *(почти шутка).* Трисекцию какого угла можно осуществить, пользуясь одной линейкой? <u>*Ответ*</u>*:* 270°.

Глава 10
Мысленное кругосветное путешествие Эратосфена

Эратосфен (~ 285–205 гг. до н.э.) родился в греческом городе Кирене на побережье Африки. Образование получил в Афинах. Будучи одаренным и любознательным человеком, он уже в молодом возрасте заявил о себе как о серьезном математике, астрономе, поэте, философе. У него находим сочинения по географии, грамматике, арифметике («решето» Эратосфена). Среди его работ по астрономии – трактаты «Об измерении Солнца», «О расположении звезд» и другие. Примерно с 245 года до н.э. Эратосфен стал директором Александрийской библиотеки в Египте, где хранилось около 700 тысяч папирусных свитков. И вместе с помощниками рассортировал все эти свитки по темам!
Эратосфен был близким другом Архимеда. Это ему адресовано письмо Архимеда, найденное в 1906 году, в котором Архимед излагает свой Метод – знаменитый ныне *метод масс*. Знакомя с ним друга, Архимед пишет, что хочет оказать этим письмом «большую услугу математике и желает, чтобы с его Методом познакомились многие математики настоящего и будущего». А начинается письмо словами: «Архимед Эратосфену желает благоденствовать». Дружить и вести переписку с великим Архимедом – это говорит о многом! Но возникает вопрос: а каких успехов добился в геометрии сам Эратосфен? Ответим на него, рассказав о двух крупных победах Эратосфена.

Всех древнегреческих математиков волновала так называемая «делосская задача» – *задача об удвоении куба*. Вот она: *«С помощью циркуля и линейки построить куб, объем которого в два раза больше объема данного куба».*
Еще Гиппократ Хиосский (V век до н.э.) перевел эту задачу из пространства в плоскость, сформулировав ее так: по отрезкам a и $2a$ построить такие отрезки x и y, что $a:x = x:y = y:2a$. Действительно, в этом случае

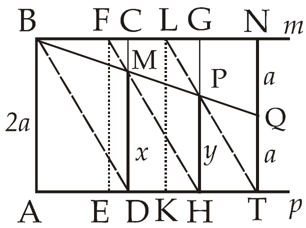
рис.1



$\left(\dfrac{a}{x}\right)^3 = \dfrac{a}{x}\cdot\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{y}{2a} = \dfrac{1}{2}$, откуда $x = a\sqrt[3]{2}$. *Но и после такого, казалось бы, существенного упрощения задача не поддавалась решению.* Тогда математики стали придумывать различные «вставки» и приборы, позволяющие (пусть не совсем корректно) хоть как-то справиться с *задачей об удвоении куба*.

Наиболее простой и удобный прибор изобрел именно Эратосфен. Он назвал его «месолаб» («уловитель средних величин»). Прибор Эратосфена состоял из трех равных прямоугольников: $ABCD$; $EFGH$; $KLNT$, приставленных друг к другу *(рис.1)*. При этом средний прямоугольник был закреплен, а два крайних могли двигаться по параллельным желобкам m и p. Пусть $AB = 2a$. На NT отметим середину – точку Q $(NQ = QT = a)$ и будем вдоль желобков надвигать крайние прямоугольники на неподвижный средний ($ABCD$ – сверху, $KLNT$ – снизу). В тот момент, когда точки $B - M - P - Q$ окажутся на одной прямой ($M = CD \cap FH$ и $P = GH \cap LT$) – *рис.2*, задача будет решена.

рис.2



Действительно, нетрудно показать, что три трапеции: $ABMD$, $DMPH$ и $HPQT$ – подобны. (Например, подобие трапеций $ABMD$ и $DMPH$ следует из того, что $\Delta ABD \sim \Delta DMH$ и $\Delta DBM \sim \Delta HMP$). Тогда $2a : x = x : y = y : a$ (где $x = MD; y = PH$). Или $\dfrac{2a}{a} = \dfrac{2a}{x} \cdot \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{y}{a} = \left(\dfrac{y}{a}\right)^3$.

Итак, $\left(\dfrac{y}{a}\right)^3 = \dfrac{2}{1}$, откуда $y = a\sqrt[3]{2}$. Таким образом, получен отрезок $PH = a\sqrt[3]{2}$.

Следовательно, куб с ребром, равным PH, будет иметь объем $V = 2a^3$.

Эратосфен очень гордился своим изобретением и даже написал стихотворение по этому поводу. А в царском храме на мраморной колонне он изобразил «месолаб» и поместил геометрическое доказательство того, что решение верно.

С нашей точки зрения куда более значительной победой Эратосфена является блестяще совершенное им мысленное кругосветное путешествие. Расскажем о нем.

Случилось Эратосфену несколько раз побывать в городе Сиене, который находится примерно на одной параллели с Александрией. Ученый заметил, что в Сиене 21 июня (самый длинный день в году) Солнце в полдень располагается строго вертикально. В Александрии же в этот день лучи Солнца падали в полдень под углом $7{,}2^{\circ}$ (что несложно подсчитать по длине тени). А если так, то…

Впрочем, сначала Эратосфен определил расстояние между Александрией и Сиеной. Это нетрудно было выяснить у купцов, чьи караваны с верблюдами постоянно курсировали между этими городами. Купцы преодолевали этот путь за 50 дней. В день караван проходил обычно 100 стадий (1 стадия $\approx$ 157 м). Вот и получается: 100·50=5000 стадий $\approx$ 785 км.

Таким образом, $7{,}2^\circ$ составляют примерно 785 км. А поскольку вся окружность – это 360° *(рис.3),* то имеем пропорцию:

$$7{,}2^\circ - 785\ \text{км}$$

$$360^\circ - x\ \text{км},$$

откуда

$$x = 39250\ \text{км}.$$

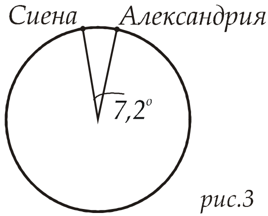


рис.3

Заметим, что современные вычисления дают длину окружности Земли в районе экватора равную 39990 км. А при решении задач ее округляют до 40000 км.

Как тут не восхититься Эратосфеном: поразительная точность мысленного кругосветного путешествия, совершенного 2200 лет назад!..

Глава 11
«Досье» на окружность Аполлония

Замечательный древнегреческий математик Аполлоний Пергский (~260–170 гг. до н.э.) является автором солидного труда «Конические сечения», из которого развилась аналитическая геометрия.

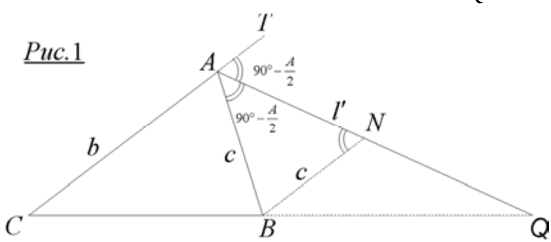
Данные о других его работах, к сожалению, весьма отрывочны, поскольку большинство из них утеряно. Несомненно, однако, что круг геометрических интересов Аполлония, получившего образование в Александрии, был необычайно широк. Он занимался построениями с помощью циркуля и линейки, гармоническим отношением четырех точек прямой, правильными многогранниками и многими другими вопросами геометрии. По свидетельству Паппа Александрийского, Аполлоний уделял большое внимание геометрии окружностей.

Не случайно в школьной геометрии популярны его задачи:

1) постройте окружность, которая проходит через две данные точки и касается данной прямой;
2) постройте окружность, которая касается трех данных окружностей.

Мы же остановимся на так называемой ***окружности Аполлония***, представляющей собою геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух данных точек является некоторым постоянным числом. Покажем, как с помощью окружности Аполлония изящно решается ряд непростых геометрических задач, включая олимпиадные.

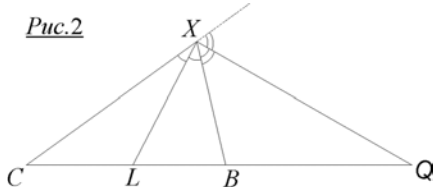
Задача 1 *(преамбула к окружности Аполлония). Пусть* $AQ = l'$ *– внешняя биссектриса угла A в треугольнике ABC (рис.1). Докажите, что* $\dfrac{CQ}{BQ} = \dfrac{b}{c}$.



<u>*Доказательство*</u>. Поскольку l' – внешняя биссектриса, то $\angle BAQ = \angle QAT = 90° - \dfrac{A}{2}$.

Проведем $BN \parallel AC$. Тогда и $\angle BNA = 90° - \dfrac{A}{2}$ (внутренний накрест лежащий с $\angle NAT$). Значит, $BN = AB = c$. Из подобия треугольников CAQ и BNQ имеем: $\dfrac{AC}{BN} = \dfrac{CQ}{BQ}$, или $\dfrac{b}{c} = \dfrac{CQ}{BQ}$, что и требовалось доказать.

Задача 2 *(окружность Аполлония). Найти геометрическое место точек, расстояния от которых до двух данных точек C и B относятся как $m:n$.*



Решение. Пусть X – одна из точек искомого ГМТ (*рис.2*). Соединим её с B и C. Согласно условию $\frac{XC}{XB}=\frac{m}{n}$.

Проведем внутреннюю (XL) и внешнюю (XQ) биссектрисы угла X в треугольнике XBC.

По свойству внутренней биссектрисы

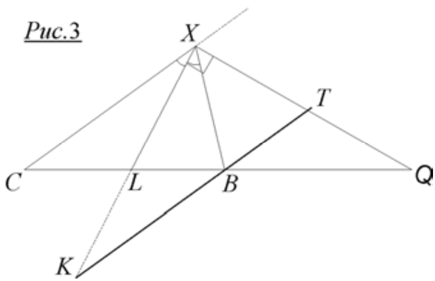
$$\frac{XC}{XB}=\frac{CL}{BL}.$$

По свойству внешней биссектрисы $\frac{XC}{XB}=\frac{CQ}{BQ}$. (см. задачу 1).

Следовательно,
$$\frac{CL}{BL}=\frac{CQ}{BQ}=\frac{m}{n}.$$

Поскольку точки B и C заданы, то легко находятся точки L и Q, которые делят отрезок BC в отношении $m:n$ внутренним и внешним образом. При этом $\angle LXQ=90°$ (угол между биссектрисами смежных углов). Тогда, найдя точки L и Q, на отрезке LQ как на диаметре строим окружность. Это и есть окружность Аполлония. Докажем, что всякая точка X окружности Аполлония удовлетворяет условию $\frac{XC}{XB}=\frac{m}{n}$.

Проведем через B прямую $KT \parallel XC$ (*рис.3*).



Из подобия ΔCXL и ΔBKL: $\frac{XC}{BK}=\frac{CL}{BL}=\frac{m}{n}$.

Из подобия ΔCXQ и ΔBTQ: $\frac{XC}{BT}=\frac{CQ}{BQ}=\frac{m}{n}$.

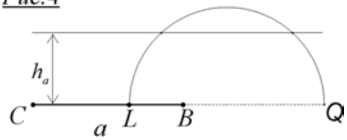
Поскольку $\frac{XC}{BK}=\frac{XC}{BT}$, то $BK=BT$. Но ΔKXT – прямоугольный. Тогда точка B – середина гипотенузы KT. Следовательно, $BK=BT=XB$.

Заменив в равенстве $\frac{XC}{BK}=\frac{m}{n}$ отрезок BK на XB, получим $\frac{XC}{XB}=\frac{m}{n}$.
Доказательство того факта, что кроме окружности Аполлония нет точек, удовлетворяющих условию задачи, основано на том, что существуют только две точки, делящие данный отрезок BC в отношении $\frac{m}{n}$: одна – внутренним образом, и одна – внешним.

***Задача 3**. Постройте треугольник ABC по a; h_a; $\frac{b}{c}$.*

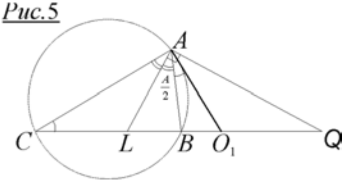
<u>*Решение*</u>. Строим отрезок $BC=a$ *(рис.4)*. Поскольку отношение $\frac{b}{c}$ задано, находим точки L и Q. На LQ как на диаметре строим окружность Аполлония. Вершиной A треугольника ABC будет являться любая из точек пересечения окружности Аполлония с прямой, удаленной от BC на расстояние h_a.

<u>*Рис.4*</u>



***Задача 4**. Восстановите ΔABC по точкам B, C, основанию L биссектрисы угла A и основанию H_1 высоты, проведенной к BC.*
<u>*Решение*</u>. Зная точки B, C и L, находим точку Q и строим окружность Аполлония. Из точки H_1 восстанавливаем перпендикуляр к BC, который пересечет окружность Аполлония в точке A.

<u>*Рис.5*</u>

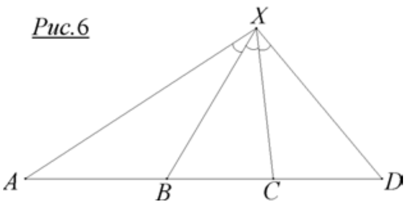


***Задача 5.** Докажите, что прямая O_1A (где O_1 – центр окружности Аполлония) касается окружности, описанной около ΔABC.*
<u>*Решение*</u>. Если мы докажем, что $\angle BAO_1=C$ *(рис.5)*, то это и будет означать, что O_1A касается окружности, описанной около ΔABC. Действительно, угол ACB является вписанным в эту окружность. И если $\angle BAO_1=C$, то он является углом между касательной и хордой в этой окружности.
Очевидно, что $O_1A=O_1L=R_A$ (радиус окружности Аполлония), ΔALO_1 – равнобедренный. Тогда $\angle O_1AL=\angle ALB=180^\circ-B-\frac{A}{2}$ (из ΔALB).
Найдем $\angle BAO_1$.

$$\angle BAO_1=\angle O_1AL-\frac{A}{2}=180^\circ-B-\frac{A}{2}-\frac{A}{2}=180^\circ-B-A=C,$$

что равносильно требуемому.

Задача 6. *На прямой даны четыре точки A, B, C, D в указанном порядке. Постройте такую точку X, из которой отрезки AB, BC и CD видны под равными углами.*



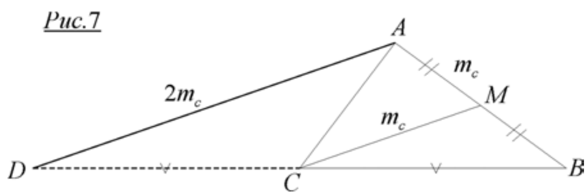
<u>*Решение*</u>. Пусть X – искомая точка (*рис*.6). Тогда должно выполнятся соотношение $\frac{XA}{XC}=\frac{AB}{BC}=\frac{m}{n}$. То есть точка X принадлежит окружности Аполлония, построенной для точек A, C и отношения $\frac{AB}{BC}=\frac{m}{n}$.

Аналогично $\frac{XB}{XD}=\frac{BC}{CD}=\frac{k}{t}$, и точка X принадлежит окружности Аполлония, построенной для точек B, D и отношения $\frac{BC}{CD}=\frac{k}{t}$. Следовательно, X – точка пересечения двух ГМТ (двух окружностей Аполлония).

Заметим, что эти две окружности могут не пересекаться. Тогда такой точки X не существует.

Задача 7. *На плоскости дан отрезок BC. Найдите множество точек A плоскости – таких, что медиана, проведенная из вершины C, равна AB ($m_c=c$).*

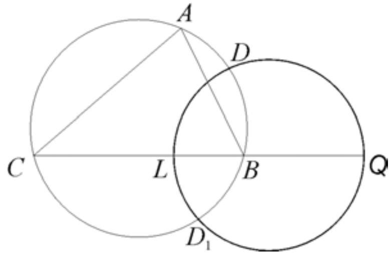
<u>*Решение*</u>. По условию $CM=AB=m_c$ (*рис.7*). Продлим BC до точки D так, что $CD=BC$. Тогда по теореме Фалеса $AD=2m_c$. При этом $AB=m_c$. Тогда для отрезка BD необходимо найти геометрическое место точек A таких, что $\frac{AD}{AB}=\frac{2}{1}$.



Остается построить окружность Аполлония для отрезка BD и отношения $2:1$.

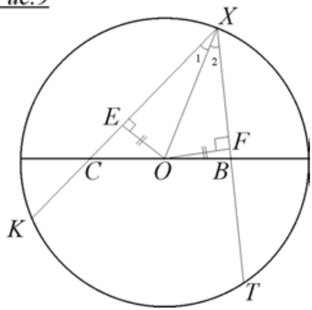
Задача 8. *Треугольник ABC вписан в окружность. Постройте на окружности такую точку D, чтобы выполнялось равенство:* $AC \cdot CD = AB \cdot BD$.

Рис.8



Решение. Искомая точка D обладает тем свойством, что $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AC}{AB}$, где отношение $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{m}{n}$ – известно. Тогда находим точки L и Q (*рис.8*) для отрезка BC – такие, что $\dfrac{CL}{BL} = \dfrac{CQ}{BQ} = \dfrac{m}{n}$. На LQ как на диаметре строим окружность Аполлония, которая пересечет данную окружность в точках D и D_1.

Рис.9

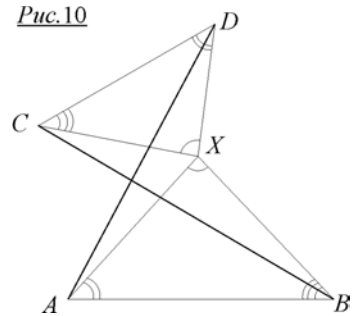


Задача 9. *Точки B и C лежат на диаметре данной окружности. Проведите через них две равные хорды, имеющие общее начало.*

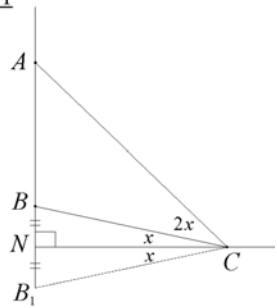
Решение. Пусть B и C – данные точки на диаметре, X – общее начало двух равных хорд XK и XT (*рис.9*). Чтобы XK и XT были равны, они должны быть равноудалены от центра окружности ($OE = OF$). Из равенства треугольников XEO и XFO следует, что $\angle 1 = \angle 2$, тогда XO – биссектриса в треугольнике XBC, и $\dfrac{XC}{XB} = \dfrac{CO}{BO}$. Поскольку точки C, O, B заданы, то задано и отношение $\dfrac{CO}{BO} = \dfrac{m}{n}$. Становится очевидным, что X – это точка пересечения соответствующей окружности Аполлония с данной окружностью.

Задача 10. *На плоскости даны два отрезка AB и CD. Найдите точку X – такую, что* $\angle AXB = \angle CXD$ *и при этом DAXB подобен DDXC (рис.10).*

Рис.10



Решение. Пусть X – искомая точка. Тогда из подобия треугольников имеем: $\dfrac{CX}{BX} = \dfrac{DX}{AX} = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{m}{n}$. Построим две окружности Аполлония: первую – для точек B, C и отношения $\frac{CX}{BX}=\frac{m}{n}$; вторую – для точек A, D и отношения $\frac{DX}{AX}=\frac{m}{n}$. Искомой точкой X будет точка пересечения этих двух окружностей.



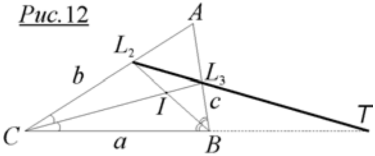
***Задача 11**. На стороне прямого угла N даны две точки A и B (рис.11). Найдите на другой стороне угла такую точку C, чтобы $\angle ACB = 2\angle BCN$.*

Решение. Согласно условию, точка C должна быть такой, чтобы $\angle BCN = x$ и $\angle ACB = 2x$. Отразим точку B симметрично относительно вершины N прямого угла – получим точку B_1, очевидно, что $\angle B_1CB = 2x$. Тогда отрезок BC должен быть биссектрисой угла ACB_1.

При этом, поскольку есть точки A; B; B_1, то есть и отношение $\frac{AB}{BB_1}=\frac{m}{n}$.

Для отрезка AB_1 и отношения $\frac{m}{n}$ строим окружность Аполлония, которая пересечет вторую сторону угла в искомой точке C.

***Задача 12**. В треугольнике ABC дан центр вписанного круга I. При помощи одной линейки постройте отрезок, равный диаметру одной из окружностей Аполлония.*

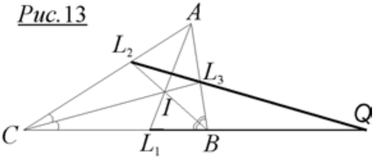


Решение. Сначала докажем, что прямая L_2L_3 пересечет продолжение BC именно в точке Q. Пока же обозначим точку пересечения прямых L_2L_3 и BC через T (*рис.12*). По теореме Менелая для ΔABC и секущей L_2L_3 имеем: $\frac{AL_3}{L_3B}\cdot\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}=1$.

Но по свойству внутренней биссектрисы $\frac{AL_3}{L_3B}=\frac{b}{a}$ и $\frac{CL_2}{L_2A}=\frac{a}{c}$.

Тогда $\frac{b}{a}\cdot\frac{BT}{TC}\cdot\frac{a}{c}=1$ и $\frac{CT}{BT}=\frac{b}{c}$.

*Рис.*13



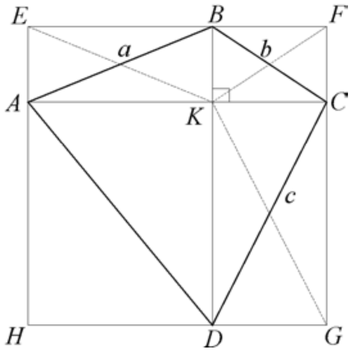
Но и $\dfrac{CQ}{BQ} = \dfrac{b}{c}$. А это означает, что $T \equiv Q$.

Теперь решение самой задачи 12 не составит труда.

Продлеваем AI до пересечения с BC – получаем точку L_1. Аналогично получаем точки L_2 и L_3 (*рис.13)*. Прямая L_2L_3 пересечет продолжение BC в точке Q. L_1Q – искомый диаметр.

Задача 13*. Постройте четырехугольник ABCD с равными и перпендикулярными диагоналями по заданным трем его сторонам:* $AB = a; BC = b; CD = c.$

*Рис.*14

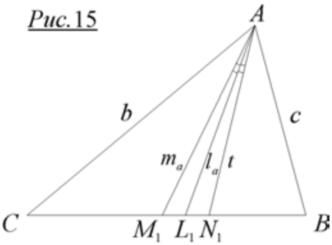


<u>*Решение*</u>. Опишем около искомого четырехугольника $ABCD$ квадрат $EFGH$ (*рис.14)*. Анализ показывает, что если K – точка пересечения диагоналей искомого четырехугольника, то очевидно, что $EK = AB = a$; $KF = BC = b$ и $KG = CD = c$.

Тогда берем произвольный квадрат $E_1F_1G_1H_1$.

Для отрезка E_1F_1 и отношения $\dfrac{a}{b}$ строим окружность Аполлония. Для отрезка F_1G_1 и отношения $\dfrac{c}{b}$ строим ещё одну окружность Аполлония. Две эти окружности пересекутся в точках K_1 и K_2. Проведя через K_1 две прямые параллельно сторонам квадрата, получим четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Воспользовавшись подобием, нетрудно теперь построить искомый четырехугольник $ABCD$. Аналогичное построение выполняется для точки K_2. Задача имеет 2 решения.

*Рис.*15



Задача 14*. Докажите, что общая хорда описанной около DABC окружности и окружности Аполлония является симедианой этого треугольника.*

<u>*Доказательство*</u>. Напомним, что прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы внутреннего угла при вершине треугольника, называется симедианой.

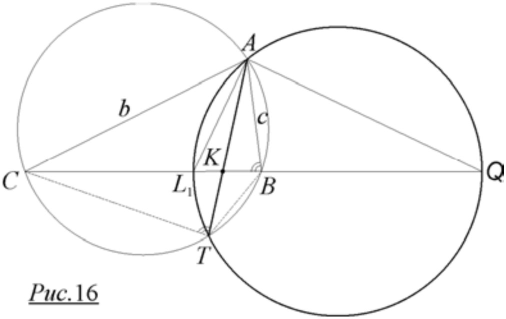


Рис.16

На рисунке 15 $AN_1 = t$ – отрезок одной из симедиан в ΔABC. Основное свойство симедианы: $\dfrac{CN_1}{BN_1} = \dfrac{b^2}{c^2}$ (докажите его самостоятельно).

Вернемся к задаче 14. Пусть описанная около ΔABC окружность и окружность Аполлония с диаметром L_1Q пересекаются по хорде AT (*рис.16*).

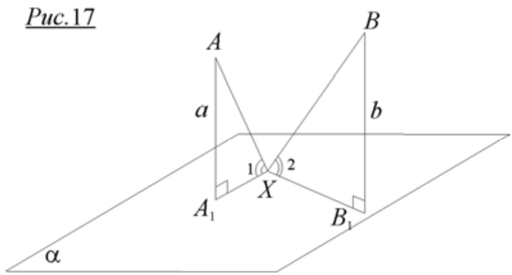
Треугольники ABK и CTK подобны (по двум углам). Тогда $\dfrac{CK}{AK} = \dfrac{CT}{c}$ (1).

Треугольники ACK и BTK подобны и $\dfrac{BK}{AK} = \dfrac{BT}{b}$ (2).

Разделим (1) на (2) и получим: $\dfrac{CK}{BK} = \dfrac{b}{BT} \cdot \dfrac{CT}{c} = \dfrac{CT}{BT} \cdot \dfrac{b}{c}$. Но $\dfrac{CT}{BT} = \dfrac{b}{c}$ (поскольку окружность Аполлония есть геометрическое место точек, расстояние от которых до данных точек C и B относятся как $\dfrac{b}{c}$. При этом точка T принадлежит окружности Аполлония). Тогда $\dfrac{CK}{BK} = \dfrac{b^2}{c^2}$. А это означает, что $K \equiv N_1$ и хорда AT совпадает с симедианой треугольника ABC.

Задача 15*. Найти геометрическое место точек плоскости, обладающее тем свойством, что прямые, соединяющие их с двумя точками вне плоскости, одинаково наклонены к плоскости.*

Рис.17



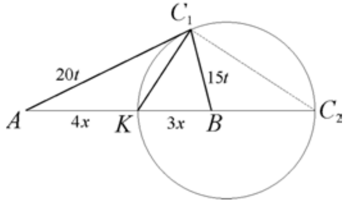
Решение. Пусть A и B – точки, лежащие вне данной плоскости α (*рис.17*). Пусть также точки A_1 и B_1 – проекции этих точек на плоскость α, и $AA_1 = a$; $BB_1 = b$.

Если точка X принадлежит искомому ГМТ, то $\angle 1 = \angle 2$. Значит, ΔAXA_1 подобен ΔBXB_1. Тогда $\frac{A_1X}{B_1X} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{a}{b}$. И наоборот, если отношение расстояний от некоторой точки X плоскости α до точек A_1 и B_1 равно $\frac{a}{b}$, то эта точка принадлежит искомому множеству (в этом случае ΔAXA_1 подобен ΔBXB_1. и $\angle 1 = \angle 2$). Значит, нам остается найти множество точек X на плоскости α, для которых $\frac{A_1X}{B_1X} = \frac{a}{b}$. Следовательно, искомым множеством является окружность Аполлония, построенная для точек A_1 и B_1 (проекций точек A и B) при отношении $\frac{A_1X}{B_1X} = \frac{a}{b}$.

Заметим, что окружность Аполлония может быть эффектно использована и при решении алгебраических текстовых задач.

***Задача 16**. В точках А и В посреди океана находятся два корабля. Они начинают двигаться прямолинейно и равномерно в неизвестных направлениях со скоростями 20 км/ч и 15 км/ч, пока не встретятся в точке С (рис.18). Каково наибольшее возможное время их движения до встречи, если АВ = 50 км?*

<u>*Решение*</u>. Поскольку отношение скоростей кораблей равно $4:3$, то строим точки K и C_2, которые делят AB в отношении $4:3$ внутренним и внешним образом. Очевидно, что точка C_2 окружности Аполлония будет искомой, когда время движения кораблей максимально.



$\frac{AC_2}{BC_2} = \frac{4}{3}$, или $\frac{50 + BC_2}{BC_2} = \frac{4}{3}$, откуда $BC_2 = 150$ (км). Тогда для корабля, находящегося в точке B, имеем $15 \cdot t_{\max} = 150$; $t_{\max} = 10$ (часов).

В заключение предложим несколько задач на окружность Аполлония для самостоятельного решения.

Задача 1. Постройте ΔABC, если известна длина биссектрисы AL_1, а также длины отрезков CL_1 и BL_1, на которые она делит противоположную сторону.

Задача 2. Дан ΔABC. Касательная к описанной около него окружности в точке A пересекает продолжение BC в точке K. $AK = k$. Известна также длина внешней биссектрисы $AQ = n$. Найдите длину внутренней биссектрисы AL_1.

Ответ: $\sqrt{4k^2 - n^2}$

Задача 3. Найдите радиус окружности Аполлония треугольника ABC, если $CL_1 = m$; $BL_1 = n$.

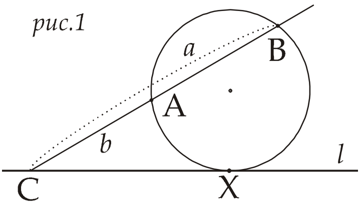
Ответ: $RA = \dfrac{mn}{m-n}$.

Задача 4. Три точки A, B и C расположены на одной прямой (B – между A и C). Возьмем произвольный круг с центром B и обозначим через M точку пересечения касательных, проведенных из A и C к этому кругу. Найти геометрическое место точек M.
Ответ: *Круг с центром на прямой AC.*

Задача 5. Докажите, что три окружности Аполлония треугольника ABC пересекаются в двух точках F_1 и F_2 и что прямая F_1F_2 проходит через центр окружности, описанной около ΔABC.

Глава 12
Вариации на тему одной задачи Аполлония

Задача 1. *(<u>Задача Аполлония</u>) Построить окружность, которая проходит через две данные точки и касается данной прямой.*



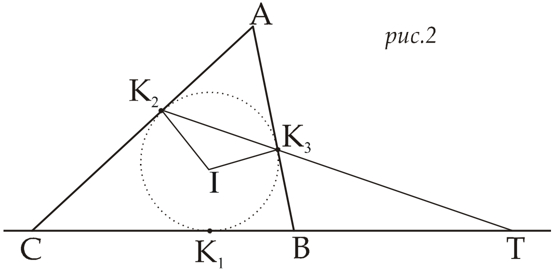
<u>*Решение*</u>. Пусть A и B – данные точки, l – данная прямая (*рис.1*). Продлим BA до пересечения с прямой l в точке C. Пусть также $BC = a$, $AC = b$. Анализ показывает, что если X – искомая точка, то $CX^2 = ab$ (квадрат касательной равен произведению всей секущей на ее внешнюю часть), или $CX = \sqrt{ab}$.

Следовательно, сделав из точки C раствором циркуля засечку радиусом $\sqrt{ab}$, получим искомую точку X. После этого остается построить окружность, которая проходит через точки $A; B; X$.

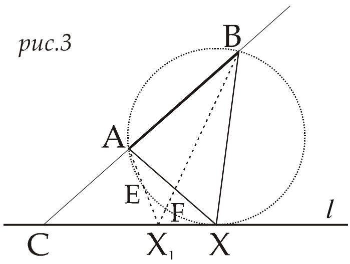
<u>*Замечание*</u>. В случае, когда $AB \parallel l$, решение задачи очевидно.

Задача 2. *Восстановить треугольник ABC по прямой, содержащей BC, и точкам K_2 и K_3 касания вписанной окружности со сторонами AC и AB соответственно.*

<u>*Решение*</u>. Согласно задаче Аполлония найдем точку K_1 касания вписанной окружности со стороной BC (*рис.2*). Точки $K_1; K_2; K_3$ определяют окружность с центром в точке I. Через точки K_2 и K_3 проведем касательные к этой окружности; точка пересечения этих касательных – A, а пря- прямую BC они пересекают в точках B и C. Треугольник ABC – искомый.

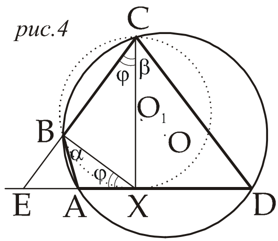


Задача 3. *Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой l такую точку X, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.*



Решение. Искомой точкой будет точка X, которую найдем, воспользовавшись *задачей Аполлония (рис.3)*. Докажем, что угол AXB больше любого другого угла AX_1B. Поскольку угол AXB вписанный, то он равен половине дуги AB; в то же время вершина угла AX_1B находится вне окружности, поэтому этот угол равен полуразности дуг AB и EF. Таким образом, угол AXB больше угла AX_1B.

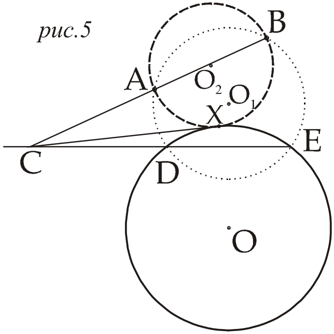
Задача 4. *Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Найдите на стороне AD (рис.4) такую точку X, чтобы угол ABX равнялся углу DCX.*



Решение. Продолжим BC до пересечения с AD в точке E и найдем точку X при помощи задачи Аполлония: $EX = \sqrt{CE \cdot BE}$. Докажем, что это и есть та самая точка X. Пусть $\angle ABX = a$, $\angle DCX = b$. Опишем окружность вокруг ΔBCX, которая будет касаться стороны AD. Пусть также $\angle BCX = j$. Тогда $\angle BXA = j$ (угол между касательной и хордой). Из ΔABX имеем: $\angle BAX = 180° - (a + j)$. Но поскольку четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, что $\angle BAD + \angle BCD = 180°$, или $180° - (a + j) + b + j = 180°$, откуда $a = b$. Следовательно, точка X, найденная *по задаче Аполлония*, – искомая!

Задача 5. *Точки A и B находятся вне окружности с центром O (рис.5). Постройте вторую окружность, которая касается первой и проходит через данные точки.*

Решение. Построим окружность с центром O_1, в которой AB будет хордой и которая пересекает первую, скажем, в точках D и E. Пусть C – точка пересечения прямых AB и DE. Из точки C проведем касательную CX к первой окружности (с центром O). Докажем, что X – искомая точка. По свойству секущих для окружности O_1: $CB \cdot CA = CE \cdot CD$. Однако для окружности O по свойству

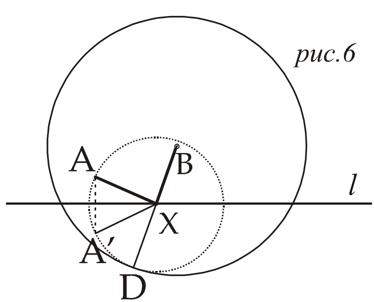


секущей и касательной имеем: $CE \cdot CD = CX^2$; отсюда получаем: $CA \cdot CB = CX^2$. Отсюда следует, что X – точка касания. Тогда окружность с центром O_2, которая проходит через точки A; X; B, – искомая.

Заметим, что случай, когда точки находятся внутри первой окружности и имеет место внутреннее касание, рассматривается аналогично.

Задача 6. *Точки A и B находятся по одну сторону от прямой l. Найти на этой прямой такую точку X, чтобы сумма отрезков $AX + XB = a$, где a – отрезок заданной длины.*

Решение. Из точки B как из центра проведем окружность радиуса a (*рис.*6). Пускай точка A' симметрична точке A относительно прямой l. Анализ показывает, что окружность с центром в точке X радиуса $XA' = XA$ будет касаться первой окружности в некоторой точке D, причем точки D; X; B лежат на одной прямой. Но тогда, чтобы решить задачу, необходимо построить окружность, которая проходит через две точки A и A' и касается данной окружности с центром в точке B. А эта задача уже была нами рассмотрена! (*Задача* 5).



Глава 13

Геронов треугольник и… почти вся геометрия

Герон Александрийский, живший в I веке н.э., стал, быть может, самым знаменитым специалистом по практической геометрии. Его труды – это своеобразная энциклопедия по механике и прикладной геометрии. В них даются правила для точного, а чаще – для приближенного вычисления площадей и объемов фигур. Герон большей частью не доказывает правила, а поясняет, как ими пользоваться в практической жизни. Не случайно греческие, а позже римские архитекторы и землемеры успешно пользовались рецептами Герона для нахождения площадей квадрата, прямоугольника, треугольника, для вычисления объемов куба, параллелепипеда, пирамиды, конуса. В сочинении «Метрика» Герон приводит доказательство знаменитой формулы для площади треугольника со сторонами *a, b, c:* $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр треугольника.

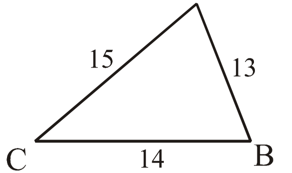
Сегодня эта формула известна как *формула Герона*. Хотя справедливо было бы сказать, что *автором формулы является Архимед, получивший ее за 300 лет до Герона*.

Герон же, составляя своеобразные справочники по практической геометрии, не считал нужным указывать в них, кто автор той или иной формулы.

В сочинении «Геометрика» Герон приводит такой пример для измерения площади треугольника: *«Ты можешь измерить треугольник и так. Пусть, например, одна сторона имеет в длину 13 мерных шнуров, другая 14 и третья 15. Чтобы найти площадь, поступай вот как. Сложи 13, 14 и 15 – получится 42. Половина этого будет 21. Вычти из этого 3 стороны одну за другой: останется 8, затем 7 и, наконец, 6. А теперь перемножь их: 21 раз по 8 – получится 168, возьми это 7 раз – получится 1176, а это еще 6 раз – получится 7056. Отсюда квадратный корень будет 84. Вот сколько мерных шнуров будет в площади треугольника.»*

О треугольнике со сторонами 13, 14, 15, получившем название *Геронова треугольника*, мы и поведем дальнейший разговор. Решая задачи на Геронов треугольник, постараемся «прокрутить» в памяти важнейшие факты и формулы геометрии. Итак, речь пойдет о треугольнике *ABC*, в котором *a=14; b=15; c=13 (рис.1).*

рис.1



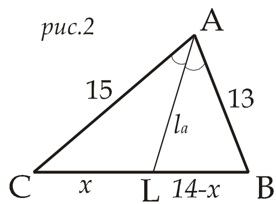
Задача 1. *Определите вид Геронова треугольника. Найдите косинусы его углов.*

Решение. Поскольку $b=15$ – наибольшая сторона, и при этом $b^2 < a^2 + c^2$ (225<169+196), то ΔABC – остроугольный. Воспользовавшись *теоремой косинусов*, определим косинусы его углов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, или

$13^2 = 14^2 + 15^2 - 2\cdot 14\cdot 15\cdot \cos C$, откуда $\cos C = \frac{3}{5}$. Аналогично получим

$\cos B = \frac{5}{13}$; $\cos A = \frac{33}{65}$.

Задача 2. *Найдите h_a; l_a; m_a в Героновом треугольнике.*

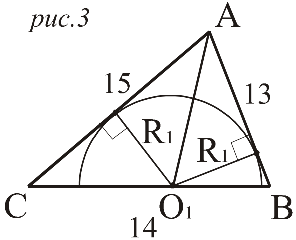


Решение. $\boxed{h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\cdot 84}{14} = 12.}$

Для нахождения l_a воспользуемся свойством биссектрисы: $\frac{AC}{AB} = \frac{CL}{BL}$ *(рис.2)*, или $\frac{15}{13} = \frac{x}{14-x}$, откуда $x = \frac{15}{2}$; $14 - x = \frac{13}{2}$. Тогда по формуле биссектрисы $l_a^2 = AC\cdot AB - CL\cdot BL$ имеем: $l_a^2 = 15\cdot 3 - \frac{15}{2}\cdot\frac{13}{2}$, откуда $\boxed{l_a = \frac{3\sqrt{65}}{2}}$.

Медиану m_a найдем, применив формулу медианы: $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$. Подставив значения, получим: $\boxed{m_a = 2\sqrt{37}}$.

Задача 3. *Окружность касается сторон b и c Геронова треугольника, а центр ее лежит на стороне a. Найдите радиус окружности.*



Решение. Пусть O_1 – центр этой окружности, а ее радиус – R_1 *(рис.3)*. Тогда площадь ΔABC равна сумме площадей треугольников ABO_1 и ACO_1,

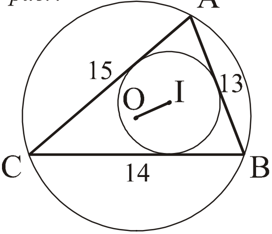
т.е. $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot R_1 + \frac{1}{2}\cdot 13\cdot R_1 = 14R_1$. Но

$S_{ABC} = 84$ (по формуле Герона).

Следовательно, $R_1 = \frac{84}{14} = 6$.

Задача 4. *Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей в Героновом треугольнике.*

рис.4



<u>*Решение*</u>. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, I – центр вписанной в него окружности (*рис.4*). Пусть также R и r – соответственно радиусы этих окружностей. Для нахождения расстояния OI следует применить *формулу Эйлера*: $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (докажите!)

При этом $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{14\cdot15\cdot13}{4\cdot84} = \dfrac{65}{8}$; $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{84}{21} = 4$.

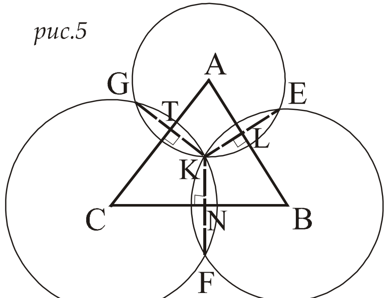
Тогда $OI^2 = R(R-2r) = \dfrac{65}{8}(\dfrac{65}{8} - 8)$, и $\boxed{OI = \dfrac{\sqrt{65}}{8}}$.

Задача 5. *Вершины Геронова треугольника служат центрами трех окружностей, пересекающихся в одной точке по хордам равной длины. Найдите длины этих хорд.*

<u>*Решение*</u>. Известно, что общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии их центров и делится ею пополам (докажите!) Тогда в нашем случае равные хорды KE; KF и KG перпендикулярны соответственно отрезкам AB; BC; AC и делятся ими пополам (*рис.5*). Тогда $KL = KN = KT$ и при этом $KL \perp AB$, $KN \perp BC$ и $KT \perp AC$. Следовательно, $K \equiv I$, то есть $KL = KN = KT = r = 4$.

Значит, $\boxed{KE = KF = KG = 8}$.

рис.5



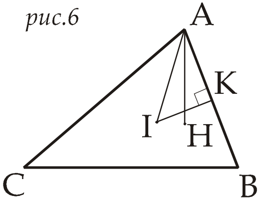
Задача 6. *Найдите расстояние от вершины A:*

a) до ортоцентра H;

b) до инцентра I.

<u>*Решение*</u>. Для нахождения AH (*рис.6*) воспользуемся формулой:

рис.6



$AH = 2R\cdot|\cos A|$. Поскольку $\cos A = \dfrac{33}{65}$ (*Задача 1*) и $R = \dfrac{65}{8}$ (*Задача 4*), то $AH = 2\cdot\dfrac{65}{8}\cdot\dfrac{33}{65} = \boxed{\dfrac{33}{4}}$.

Длину отрезка AI найдем, рассмотрев ΔAIK: $IK = r = 4$; $AK = p - a = 21 - 14 = 7$. Тогда $AI = \sqrt{AK^2 + IK^2} = \boxed{\sqrt{65}}$.

Задача 7. *Докажите, что отрезок MI, соединяющий центроид M с инцентром I, параллелен стороне BC.*

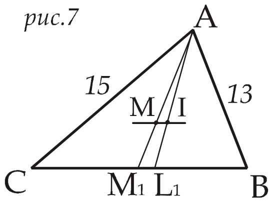


рис.7

Решение. Пусть AL_1 и AM_1 – соответственно биссектриса и медиана в ΔABC, I – инцентр и M – центроид (*рис.7*). Известно, что $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a}$ (*докажите!*).

В Героновом треугольнике $\frac{AI}{IL_1} = \frac{15+13}{14} = 2.$

Но и $\frac{AM}{MM_1} = 2$ (центроид делит каждую из медиан в отношении $2:1$, считая от вершины). Тогда, в соответствии с теоремой Фалеса, $MI \parallel BC$.

Задача 8. *В Героновом треугольнике проведены высоты AH_1 и BH_2 (рис.8). Найдите площадь треугольника CH_1H_2.*

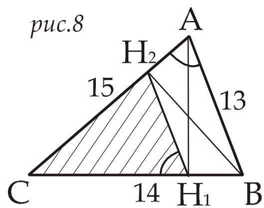


рис.8

Решение. Нетрудно показать, что $\Delta H_1H_2C \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $k = \cos C$ (*покажите!*).

Тогда $\frac{S_{H_1H_2C}}{S_{ABC}} = \cos^2 C$. Но $S_{ABC} = 84$ и $\cos C = \frac{3}{5}$.

Следовательно, $S_{H_1H_2C} = 84 \cdot \frac{9}{25} = \boxed{\frac{756}{25}}$.

Задача 9. *Параллельно биссектрисе AL_1 проведена прямая KT, делящая треугольник ABC на две равновеликие части. Найдите длину отрезка CT.*

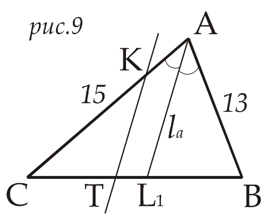


рис.9

Решение. Очевидно, что $S_{CKT} = \frac{1}{2} S = 42$ (*рис.9*). По свойству биссектрисы $\frac{CL_1}{L_1B} = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{13}$, откуда

$CL_1 = \frac{15}{2}$. Тогда $S_{ACL_1} = \frac{1}{2} AC \cdot CL_1 \cdot \sin C$, $\cos C = \frac{3}{5}$ и

$\sin C = \frac{4}{5}$, $AC = b = 15$; $S_{ACL_1} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{4}{5} = 45.$

$\Delta KCT \sim \Delta ACL_1$, а площади подобных фигур относятся как квадраты соответствующих линейных размеров. То есть, $\frac{42}{45}=\frac{CT^2}{CL_1^2}$, или $\frac{14}{15}=\frac{CT^2}{\frac{225}{4}}$,

откуда $CT^2=\frac{210}{4}$ и $\boxed{CT=\frac{1}{2}\sqrt{210}}$.

Задача 10. *В Геронов треугольник ABC вписан прямоугольник KNTQ, диагональ KT которого параллельна AB, а KN||BC (рис.10). Найдите отношение сторон прямоугольника.*

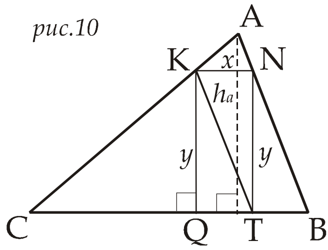


рис.10

Решение. Пусть $KN=x$, $KQ=y$. Из подобия треугольников *CKT* и *CAB* получим:

$\frac{KT}{AB}=\frac{KQ}{h_a}$, или $\frac{KT}{13}=\frac{y}{12}$, откуда $y=\frac{12}{13}KT$.

Тогда $x=\sqrt{KT^2-y^2}=\frac{5}{13}KT$.

Следовательно, $\boxed{x:y=5:12}$.

Задача 11. *В угол ABC Геронова треугольника вписана окружность единичного радиуса (r_1=1). AK – касательная к этой окружности (K – точка касания). Найти AK (рис.11).*

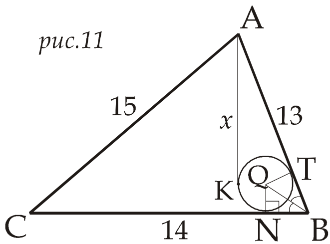


рис.11

Решение. Пусть $AK=AT=x$. Тогда $BT=13-x=BN$. Пусть также Q – центр окружности, вписанной в угол *ABC*. То есть $QN=QT=r_1=1$. Для ΔQNB: $\frac{BN}{NQ}=ctg\frac{B}{2}$,

или $\frac{13-x}{1}=ctg\frac{B}{2}$. Поскольку $1+ctg^2\frac{B}{2}=\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}$, то найдем $\sin^2\frac{B}{2}$. Согласно формулам понижения степени $\sin^2\frac{B}{2}=\frac{1-\cos B}{2}=\frac{1-\frac{5}{13}}{2}=\frac{4}{13}$. Тогда

$1+ctg^2\frac{B}{2}=\frac{13}{4}$ и $ctg^2\frac{B}{2}=\frac{9}{4}$, откуда $ctg\frac{B}{2}=\frac{3}{2}$.

Таким образом, $\frac{13-x}{1}=\frac{3}{2}$; $26-2x=3$, или $x=\frac{23}{2}$. Значит, $\boxed{AK=\frac{23}{2}}$.

Перед тем, как перейти к задачам для самостоятельного решения, сделаем несколько замечаний в отношении Геронова треугольника.

Замечание 1. *Геронов треугольник интересен тем, что его стороны – последовательные целые чиса, и, кроме того, его площадь – число целое. Помимо Геронова треугольника, таким свойством обладает так называемый «египетский треугольник» (стороны: 3, 4, 5; площадь – 6). А уже следующий треугольник такого вида (51;52;53) в школьной геометрии практически не встречается.*

Замечание 2. *Геронов треугольник относится к семейству так называемых разностных треугольников (их стороны составляют арифметическую прогрессию). Поэтому, все свойства разностных треугольников применимы и для Геронова треугольника.*

Замечание 3. *В зависимости от поставленной цели, от уровня учащихся можно составить множество задач на Геронов треугольник.*

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 12. Найдите радиус окружности, проходящей через середины сторон Геронова треугольника.

Ответ: $\frac{65}{16}$.

Задача 13. Найдите площади треугольников, на которые Геронов треугольник разбивается медианами.

Ответ: *14.*

Задача 14. Продолжение биссектрисы l_a пересекает описанную около Геронова треугольника окружность в точке W. Найдите IW. (I – инцентр).

Ответ: $\sqrt{65}$.

Задача 15. Покажите, что Геронову треугольнику присущи следующие свойства *(свойства разностного треугольника)*:

а) $AI = IW$; б) $r = \frac{h_a}{3}$; в) $AI \perp OI$; г) точки $A; M_2; I; M_3$ лежат на одной окружности (M_2 – середина АС, M_3 – середина АВ).

Задача 16. Найдите расстояние между центром О описанной окружности и ортоцентром Н.

Указание. Воспользуйтесь формулой $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

Ответ: $\frac{\sqrt{265}}{8}$.

Задача 17. Отрезок $EF \perp BC$ делит Геронов треугольник на две равновеликие части. Найти длину $EF\,(E \in AC; F \in BC)$.

Ответ: $4\sqrt{7}$.

Задача 18. Из инцентра I Геронова треугольника проведена окружность радиуса 5. Найти длины хорд, отсекаемых окружностью на сторонах треугольника.
Ответ: 6.

Задача 19. Периметр трапеции $BDEC\,(D \in AB; E \in AC)$ равен 31,5. Найти ее площадь.

Ответ: $\frac{117}{2}$.

Глава 14
Выручает (порой неожиданно) теорема Птолемея

Клавдий Птолемей (II век н.э.) – автор солидного труда «Великое математическое построение астрономии в XIII книгах» («Альмагест»).

Что касается *теоремы о произведении диагоналей вписанного в круг четырехугольника*, то она понадобилась Птолемею для астрономических вычислений. При изучении звездного неба возникла потребность в определении хорд различных дуг величиной до 1° и даже меньше. Именно в этот момент и выручила Птолемея доказанная им теорема!..

Птолемей ошибся в своих астрономических постулатах: Земля на самом деле не является центром Вселенной, а система мироздания не является геоцентрической. Но зато его астрономические вычисления, в которых применялась *теорема Птолемея*, были наиболее точными. *Теорема Птолемея* до сих пор служит нам при решении задач на вписанный четырехугольник.

Задачи данной главы показывают, сколь действенна *теорема Птолемея*. Как она неожиданно выручает при решении сложных геометрических задач.

Теорема Птолемея.

Произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон, или

$$\boxed{ef = ac + bd} \qquad (\textit{рис.1})$$

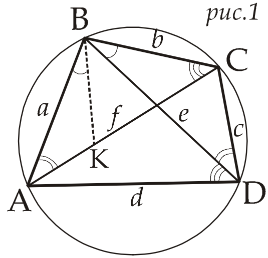


рис.1

<u>*Идея доказательства*</u>.

Отложим $BK(K \in AC)$ – так, чтобы $\angle ABK = \angle CBD$.

После чего рассмотрим два подобия:

1) $\Delta ABK \sim \Delta DBC$ и
2) $\Delta CBK \sim \Delta DBA$.

Итак, теорема Птолемея решает задачи.

Задача 1. *Найти диагональ равнобокой трапеции с основаниями a и b и боковой стороной c.*

<u>*Решение*</u>. Боковые стороны и диагонали равнобокой трапеции равны. Кроме того, около равнобокой трапеции можно описать окружность *(покажите!)*. Тогда, согласно *рис.2*, имеем: $d \cdot d = a \cdot b + c \cdot c$, откуда $d = \sqrt{ab + c^2}$.

рис.2

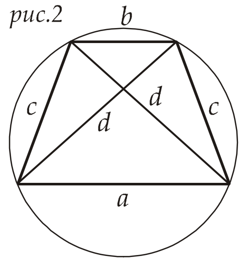
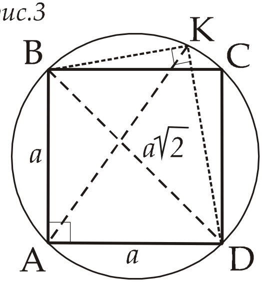


рис.3



Задача 2. *Вокруг квадрата ABCD описана окружность. На дуге BC произвольно взята точка K. Известно, что KB+KD=n. Найдите KA.*

<u>*Решение*</u>. Пусть $AB = a$ – сторона квадрата *(рис.3)*. Четырехугольник $ABKD$ вписан в окружность, и для него справедлива теорема Птолемея: $KA \cdot a\sqrt{2} = KB \cdot a + KD \cdot A$, или $KA \cdot a\sqrt{2} = a(KB + KD)$. Поскольку $KB + KD = n$ (по условию), то $KA = \dfrac{n}{\sqrt{2}}$.

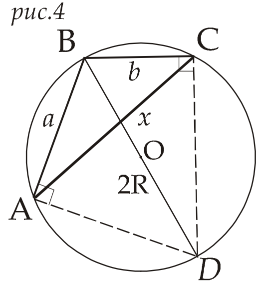
Задача 3. *По двум данным хордам a и b круга диаметром 2R найдите длину хорды, которая стягивает их суммарную дугу.*

<u>*Решение*</u>. Пусть $AB = a$, $BC = b$ и $AC = x$. Проведем диаметр BD *(рис.4)*. Тогда $\angle BAD = \angle BCD = 90°$ (вписанные, опираются на диаметр). Значит, $AD = \sqrt{4R^2 - a^2}$ и $CD = \sqrt{4R^2 - b^2}$. *Согласно теореме Птолемея* для вписанного четырехугольника $ABCD$:

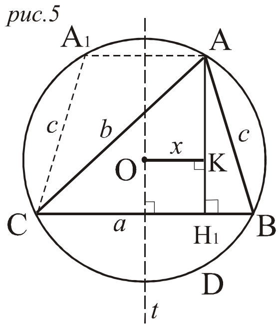
$$x \cdot 2R = a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2},$$ откуда

$$x = \frac{1}{2R}\left(a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2}\right).$$

рис.4



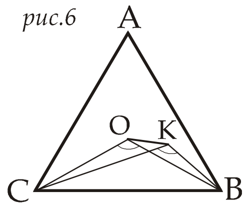
Задача 4. *Дан треугольник ABC со сторонами a, b, c. Найдите расстояние от центра O описанной около него окружности до высоты AH_1 (рис.5).*



Решение. Пусть $b > c$. Пусть также $OK = x$ – искомое расстояние. Выполним зеркальное отображение ΔABC относительно t – серединного перпендикуляра к BC. Получим равнобокую трапецию $ABCA_1$, в которой $AA_1 = 2OK = 2x$. По теореме Птолемея для этой трапеции имеем:

$b \cdot b = 2x \cdot a + c \cdot c,$ откуда $x = \dfrac{b^2 - c^2}{2a}.$

Задача 5. *Дан равносторонний треугольник ABC с центром O. Точка K внутри него такова, что $\angle BKC=120^o$. Известно, что CK – BK = n. Найдите KO.*



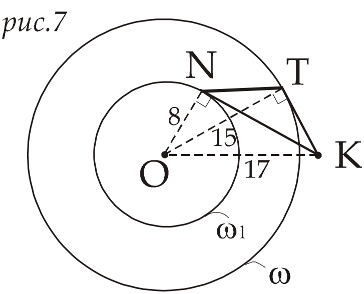
Решение. Поскольку $\angle BKC = \angle BOC = 120°,$ то точки $B - K - O - C$ лежат на одной окружности (*рис.6*).

Пусть $AB = BC = AC = a.$ Тогда $BO = CO = R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

(*покажите!*). *По теореме Птолемея* для вписанного четырехугольника $BKOC$: $CK \cdot R = OK \cdot a + BK \cdot R,$

откуда $OK \cdot a = R \cdot (CK - BK);$ $OK \cdot a = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \cdot n$ и $OK = \dfrac{n}{\sqrt{3}}.$

Задача 6. *Радиусы двух концентрических окружностей ω и ω_1 соответственно равны 15 и 8. Точка K находится на расстоянии 17 от их центра O (рис.7). Найдите расстояние TN между ближайшими точками касания, лежащими на ω и ω_1 (KT и KN – касательные к окружностям ω и ω_1).*



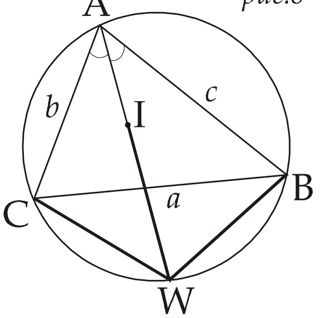
Решение. Очевидно, что около четырехугольника $KTNO$ можно описать окружность ($\angle OTK = \angle ONK = 90°$). При этом

$TK = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ и $NK = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15.$

Тогда, воспользовавшись *теоремой Птолемея* для четырехугольника $KTNO,$ получим: $15 \cdot 15 = TN \cdot 17 + 8 \cdot 8,$ откуда $TN = \dfrac{225 - 64}{17};$ $TN = 9\frac{8}{17}.$

Задача 7. *I – центр вписанной окружности треугольника ABC со сторонами a, b, c. Прямая AI пересекает описанную около треугольника окружность в точке W. Чему равно отношение* $\dfrac{AW}{IW}$?

рис.8



Решение. Запишем *теорему Птолемея* для четырехугольника $ABWC$ (*рис.8*):

$AW \cdot a = BW \cdot b + CW \cdot c.$

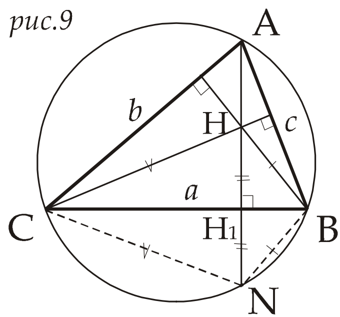
Согласно «*теореме трилистника*»

$BW = CW = IW$ (*докажите!*). Тогда

$AW \cdot a = IW \cdot (b+c)$, или $\dfrac{AW}{IW} = \dfrac{b+c}{a}$.

Задача 8. *Докажите, что в остроугольном треугольнике ABC справедливо равенство: a·AH + b·BH + c·CH = 4S (H – ортоцентр, S – площадь треугольника).*

рис.9



Доказательство. Точки, симметричные ортоцентру ΔABC относительно его сторон, лежат на описанной около ΔABC окружности (*докажите!*). То есть $HH_1 = H_1N$. При этом $BN = BH$; $CN = CH$ (*рис.9*). *По теореме Птолемея* для четырехугольника $ABNC$:

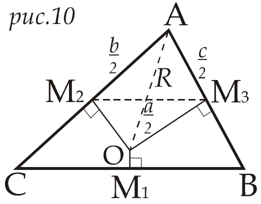
$a \cdot AN = b \cdot BN + c \cdot CN$. Поскольку $HH_1 = H_1N$ и $AH_1 = h_a$, то можно записать, что $AN = 2h_a - AH$. С учетом того, что $BN = BH$ и $CN = CH$, имеем:

$a \cdot (2h_a - AH) = b \cdot BH + c \cdot CH,$

или $2ah_a = a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH,$

или $4S = a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH.$

Задача 9. *В треугольнике ABC площади S точки M_1; M_2; M_3 – соответственно середины сторон BC, AC и AB. Известно, что в этом треугольнике $\frac{R}{r}=k$. Найдите значение суммы $a(OM_2+OM_3)+b(OM_1+OM_3)+c(OM_1+OM_2)$.*



Решение. Очевидно, что

$M_2M_3=\frac{a}{2}$; $AM_2=\frac{b}{2}$; $AM_3=\frac{c}{2}$ и $AO=R$ *(рис.10)*. Около четырехугольника AM_2OM_3 можно описать окружность (два противоположных угла равны по 90^o). Воспользуемся *теоремой Птолемея:*

$$\frac{a}{2}\cdot R=\frac{b}{2}\cdot OM_3+\frac{c}{2}\cdot OM_2.$$

Умножив на 2, получим: $\boxed{aR=b\cdot OM_3+c\cdot OM_2}$ (1)

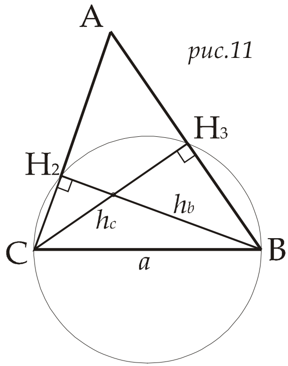
Аналогично для четырехугольника BM_3OM_1 применим *теорему Птолемея* и, умножив на 2, получим: $\boxed{bR=a\cdot OM_3+c\cdot OM_1}$ (2). А для четырехугольника CM_1OM_2: $\boxed{cR=a\cdot OM_2+b\cdot OM_1}$ (3).

Остается сложить левые и правые части равенств (1); (2); (3):

$$R(a+b+c)=a(OM_2+OM_3)+b(OM_1+OM_3)+c(OM_1+OM_2)$$

Итак, $a(OM_2+OM_3)+b(OM_1+OM_3)+c(OM_1+OM_2)=2p\cdot R=2pr\cdot\frac{R}{r}=\boxed{2S\cdot k}$

Задача 10. *Докажите формулу для произведения высот треугольника ABC:*
$h_a\cdot h_b\cdot h_c=2S\cdot a\cdot(\cos A+\cos B\cdot\cos C)$.



Решение. Проведем в ΔABC высоты $BH_2=h_b$ и $CH_3=h_c$ *(рис.11)*. Около четырехугольника BH_3H_2C можно описать окружность с диаметром BC. Тогда *по теореме Птолемея*: $h_b\cdot h_c=a\cdot H_2H_3+BH_3\cdot CH_2$. Но $H_2H_3=a\cos A$ *(докажите!)*; $BH_3=a\cos B$ *(из ΔCH_3B)*; $CH_2=a\cos C$ (из ΔBH_2C).

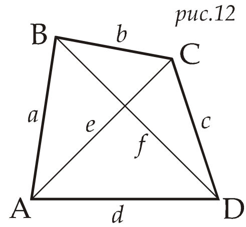
Имеем: $h_b\cdot h_c=a\cdot a\cdot\cos A+a\cdot\cos B\cdot a\cdot\cos C$ или

$h_bh_c=a^2(\cos A+\cos B\cdot\cos C)$.

Домножим обе части последнего равенства на h_a, где $h_a = \dfrac{2S}{a}$.

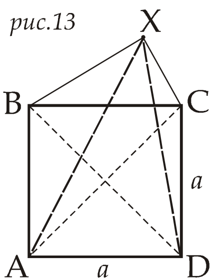
Получаем: $h_a \cdot h_b \cdot h_c = \dfrac{2S}{a} \cdot a^2(\cos A + \cos B \cos C)$,

или $h_a \cdot h_b \cdot h_c = 2S \cdot a(\cos A + \cos B \cos C)$.



При решении задач повышенной трудности (часто – олимпиадных задач) широко используется следствие из теоремы Птолемея – *неравенство Птолемея:* для произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ выполняется неравенство: $ef \le ac + bd$ *(рис.12).*

Знак равенства имеет место в случае вписанного четырехугольника. Докажите *неравенство Птолемея* самостоятельно.



***Задача 11.** Сумма расстояний от точки X, взятой вне квадрата, до двух его соседних вершин, равна n. Каково наибольшее значение суммы расстояний от точки X до двух других вершин квадрата?*

<u>*Решение*</u>. Пусть $XB + XC = n$. Требуется найти $(XA + XD)_{\max}$. – *рис.13*. Обозначив сторону квадрата через a, запишем *неравенство Птолемея* для четырехугольника $ABXC$:

$$XA \cdot a \le XB \cdot a\sqrt{2} + XC \cdot a,$$

или

$$XA \le XB\sqrt{2} + XC \quad (1).$$

По *неравенству Птолемея* для четырехугольника $BXCD$ имеем:

$$XD \cdot a \le XB \cdot a + XC \cdot a\sqrt{2},$$

или

$$XD \le XB + XC\sqrt{2} \qquad (2)$$

Сложив левые и правые части неравенств (1) и (2), получим:

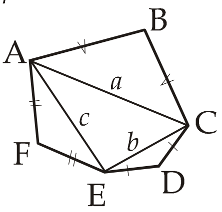
$$XA + XD \le n(\sqrt{2} + 1).$$

Очевидно, что равенство достигается, когда точка X лежит на описанной около квадрата $ABCD$ окружности. Таким образом,

$$(XA + XD)_{\max} = n(\sqrt{2} + 1).$$

Задача 12. *В выпуклом шестиугольнике ABCDEF AB = BC; CD = DE; EF = FA (рис.14). Докажите, что* $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{3}{2}$.

рис.14



<u>*Доказательство*</u>. Пусть $AC=a$, $CE=b$, $EA=c$. Запишем *неравенство Птолемея* для четырехугольника $ABCE$: $BE\cdot a\le AB\cdot b+BC\cdot c$. Но по условию $AB=BC$. Тогда $BE\cdot a\le BC(b+c)$, откуда

$$\frac{BC}{BE}\ge\frac{a}{b+c}\qquad(1).$$

Применив *неравенство Птолемея* для четырехугольника $ACDE$, получим:

$$\frac{DE}{DA}\ge\frac{b}{a+c}\qquad(2).$$

Неравенство $\frac{FA}{FC}\ge\frac{c}{a+b}$ (3) следует из *неравенства Птолемея* для четырехугольника $ACEF$. Сложив левые и правые части неравенств (1); (2); (3), получим

$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{AC}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}.$$

В свою очередь, $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$ – известное алгебраическое неравенство для положительных чисел $a;b;c$. Следовательно, тем более $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{AC}\ge\frac{3}{2}$.

Несколько задач на теорему Птолемея (большинство из них хорошо известны) предлагаются для самостоятельного решения.

Задача 13. Дан равносторонний треугольник ABC. На дуге AB описанной около него окружности произвольно выбрана точка K. Докажите, что $KA+KB=KC$.

Задача 14. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром O. Найдите CO, если $CA+CB=n$.

Задача 15. Дан ромб $ABCD$ со стороной a. Серединные перпендикуляры к AB и AD пересекаются в точке T, причем $AT = n$. Найдите диагональ ромба BD.

Задача 16. Внутри квадрата $ABCD$ брошена точка K такая, что $\angle AKD = 90°$. При этом $AK - DK = n$. Найдите KO, где O – центр квадрата.

Задача 17. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную вокруг него окружность в точке W. Докажите, что $b + c \le 2AW$.

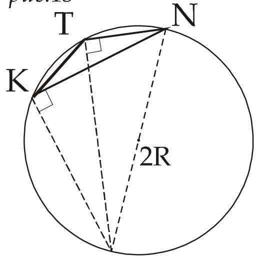
Задача 18. В условии *Задачи 6* найдите расстояние между дальними точками касания, лежащими на окружностях ω и ω_1.

Задача 19. $ABCD$ – вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Докажите формулу для вычисления его площади: $S = \frac{1}{2}(ac + bd)$.

Задача 20. Докажите формулу Карно для остроугольного треугольника ABC: $\boxed{OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r}$ ($M_1; M_2; M_3$ – соответственно середины сторон BC, AC *и* AB; O – центр описанной окружности треугольника ABC) Какой вид будет иметь формула Карно в случае тупоугольного треугольника?

Задача 21. Пусть KN – сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R. NT – сторона правильного десятиугольника, вписанного в эту окружность (*рис.15*). Покажите, что TK – сторона правильного пятнадцатиугольника, вписанного в эту же окружность. Докажите, что $TK = \frac{1}{4}R(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15})$.

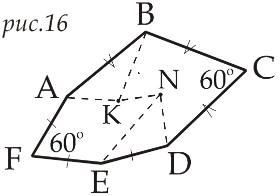
рис.15



Задача 22. Стороны вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ равны a, b, c, d. Найдите его диагонали.

Задача 23. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ $AB = BC = CD$ и $DE = EF = FA$ (*рис.16*). Кроме того, $\angle BCD = \angle EFA = 60°$. K и N – две точки внутри $ABCDEF$. Докажите, что $KA + KB + KN + ND + NE \ge CF$. *(Международные олимпиады).*

рис.16

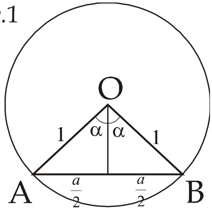


Глава 15
Теорема Птолемея и тригонометрия

Легче, кажется, двигать самые
планеты, чем постичь их движение.
Клавдий Птолемей

С именем Птолемея (II в. н.э.) связаны наибольшие достижения греческой тригонометрии. И хотя Птолемей не знал синусов, косинусов, тангенсов, он, опираясь на труды Гиппарха (~190–125 гг. до н.э.) составил знаменитые *таблицы хорд* дуг окружностей. Заметим, что работать с хордами или с синусами – это фактически одно и то же, поскольку синус равен половине такой хорды (*рис.*1)

*рис.*1



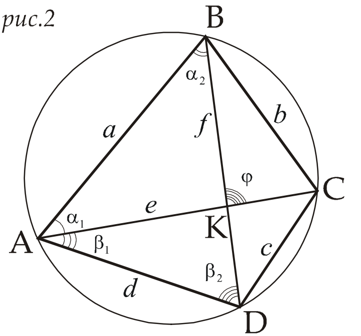
$$\sin a = \frac{\frac{a}{2}}{1} \qquad \text{и} \qquad a = AB = 2\sin a$$

Таблица хорд Птолемея, сохранившаяся до наших дней, соответствует таблице синусов от $0°$ до $90°$ (через $0{,}25°$) – с пятью верными знаками после запятой!!!

Понятно, что эта *таблица* была, в первую очередь, вызвана к жизни потребностями астрономии. Она появилась в главной работе Птолемея «Альмагест». Наряду с тригонометрией на плоскости, в ней содержались элементы сферической тригонометрии и прилагался каталог из 1028 звёзд. «Альмагест» для того времени давал наиболее полную картину мироздания. Не забудем, что по геоцентрической системе Птолемея мир прожил почти 13 столетий – вплоть до эпохи Коперника.

Нас же интересует <u>*теорема Птолемея*</u>, которая в древности звучала так: ***прямоугольник, построенный на диагоналях вписанного в круг четырехугольника, равен сумме прямоугольников, построенных на противоположных сторонах.***

рис.2



Предложим оригинальное, редко встречающееся в литературе доказательство теоремы Птолемея.

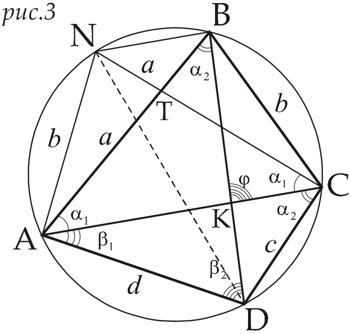
Итак, докажем, что *произведение диагоналей вписанного в круг 4-угольника равно сумме произведений его противоположных сторон*, или, согласно *рис.*2,

$$\boxed{ef = ac + bd}$$

Заметим, что $j = a_1 + a_2$ (внешний угол для ΔABK) и $j = 180° - (b_1 + b_2)$ – из ΔAKD. Тогда $\sin j = \sin(a_1 + a_2) = \sin(b_1 + b_2)$ – это нам понадобится.

Очевидно, что $\boxed{S_{ABCD} = \frac{1}{2} ef \sin j}$ (1)

рис.3



Проведем $BN \parallel AC$ (*рис.*3). Очевидно, что $ANBC$ – равнобокая трапеция, и $AN = BC = b$; $NC = AB = a$; $\angle NCA = \angle BAC = a_1$.

$S_{ANCD} = S_{ABCD}$ (так как в трапеции $ANBC$ треугольники ANT и CTB равновелики). 4-угольник $ANCD$ состоит из двух треугольников: NCD и NAD, а его площадь есть сумма площадей этих треугольников.

$S_{NCD} = \frac{1}{2} ac \sin \angle NCD$.

Поскольку $\angle ACD = \angle ABD = a_2$ (вписанные, опираются на одну дугу), то

$S_{NCD} = \frac{1}{2} ac \sin(a_1 + a_2) = \frac{1}{2} ac \sin j$

$S_{NAD} = \frac{1}{2} bd \sin \angle NAD$. Поскольку $\angle NAC = b_2$ (стягивает такую же дугу, что и $\angle ADB = b_2$), то $S_{NAD} = \frac{1}{2} bd \sin(b_1 + b_2) = \frac{1}{2} bd \sin j$ (учитывая сказанное в начале).

Итак, $S_{ANCD} = \frac{1}{2} ac \sin j + \frac{1}{2} bd \sin j = S_{ABCD}$, или $\boxed{S_{ABCD} = \frac{1}{2}(ac + bd)\sin j}$ (2)

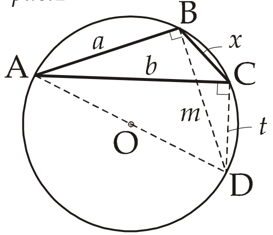
Сравнив (1) и (2), получим: $ef = ac + bd$.

Теорема Птолемея доказана! Однако остается вопрос: как Птолемей, составляя *таблицы хорд*, пользовался своей знаменитой теоремой?

А вот как!

Пусть в круге радиуса R известны хорды $AB = a$, $AC = b$. Требуется найти хорду $BC = x$, соответствующую разности дуг AC и AB (рис.4).

рис.4



<u>*Решение*</u>. Проведем диаметр AD и найдем длины отрезков BD и CD:

$BD = m = \sqrt{4R^2 - a^2}$ – из прямоугольного ΔABD.

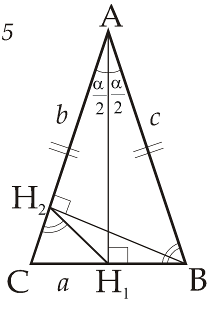
$CD = t = \sqrt{4R^2 - b^2}$ – из прямоугольного ΔACD.

Применим теорему Птолемея для 4$^{\text{х}}$угольника $ABCD$: $b \cdot m = a \cdot t + 2R \cdot x$, откуда $x = \dfrac{bm - at}{2R}$.

Зная теперь хорду дуги BC, Птолемей находил хорду половины дуги BC. При этом он пользовался формулой, аналогичной современной формуле: $\boxed{2\sin^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a}$.

Приведем современное геометрическое доказательство этой формулы.

рис.5



Пусть в равнобедренном ΔABC ($b = c$, $\angle BAC = a$) проведены высоты AH_1 и BH_2 (*рис*.5). нетрудно показать, что треугольники H_1H_2C и ABC подобны.

Тогда $\dfrac{CH_1}{b} = \dfrac{CH_2}{a}$, или $\boxed{CH_1 \cdot a = CH_2 \cdot b}$ (1)

Но $CH_1 = b \cdot \sin \dfrac{a}{2}$ (из ΔACH_1) и $a = 2CH_1 = 2b \sin \dfrac{a}{2}$.

$CH_2 = b - AH_2$, где $AH_2 = c \cdot \cos a = b \cdot \cos a$ (из ΔABH_2). Тогда $CH_2 = b - b\cos a = b(1 - \cos a)$.

Подставим полученное значение в равенство (1):

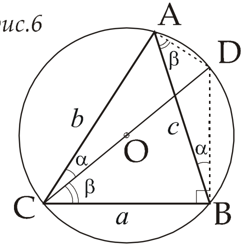
$b \cdot \sin \dfrac{a}{2} \cdot 2b \cdot \sin \dfrac{a}{2} = b(1 - \cos a) \cdot b$, откуда получим: $2\sin^2 \dfrac{a}{2} = 1 - \cos a$.

Заметим, что эта формула позволяла Птолемею, вычислив, например, хорду дуги $12°$, находить хорды дуг $6°$; $3°$; $1{,}5°$; $0{,}75°$.

Следует отметить, что способ вычисления хорд соответствующих дуг с помощью теоремы Птолемея также совпадает с известными нам формулами тригонометрии: $\boxed{\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b}$

И вот почему.

рис.6



Пусть ΔABC вписан в окружность радиуса R (*рис.*6). Проведем диаметр CD. При этом пусть $\angle ACD = \angle ABD = a$ и $\angle DCB = \angle DAB = b$.

По теореме Птолемея для 4-угольника $ADBC$ имеем: $c \cdot CD = a \cdot AD + b \cdot BD$.

Но $c = 2R\sin(a + b)$ – теорема синусов для ΔABC.

$a = 2R\cos b$ – из прямоугольного ΔCBD ($\angle CBD = 90°$ как вписанный, опирающийся на диаметр).

$AD = 2R\sin a$ и $BD = 2R\sin b$ – теорема синусов для ΔABD

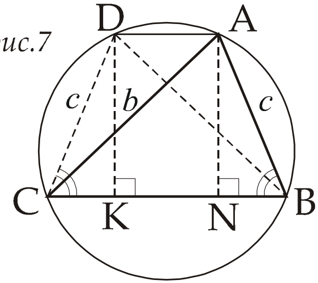
$b = 2R\cos a$ – из прямоугольного ΔCAD

Итак, $2R \cdot \sin(a + b) \cdot 2R = 2R\cos b \cdot 2R \cdot \sin a + 2R\cos a \cdot 2R \cdot \sin b$.

После сокращения на $4R^2$ получим: $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$.

В заключение приведем весьма изящное доказательство теоремы косинусов с помощью теоремы Птолемея.

рис.7



Опишем окружность около ΔABC и проведем $AD \parallel BC$ (*рис.*7). Очевидно, что $ABCD$ – равнобокая трапеция, и $BD = AC = b$; $CD = AB = c$; $\angle DCB = \angle ABC = B$.

Проведем в трапеции высоты AN и DK. Тогда $CK = BN = c\cos B$. После чего найдем, что $KN = a - 2c\cos B = AD$.

Применив теорему Птолемея к трапеции $ABCD$, получим: $c^2 + a \cdot (a - 2c \cdot \cos B) = b^2$, или $\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B}$.

Мы убедились: истоки теоремы Птолемея – в тригонометрии!

Авторская школьная геометрия

Часть 2

Поздняя Древняя Греция.
Древняя Индия.
Страны арабского халифата

Глава 1
Менелай «обыкновенный»

Древнегреческий математик и астроном *Менелай* (~70–130 гг. н.э.) стоит у истоков так называемой *сферической геометрии*. В арабском переводе Сабита ибн Корры до нас дошло его сочинение «Сферика» (“Sphaerica”). В этом труде Менелай дает определение сферическому треугольнику, отделяет тригонометрический материал от геометрического. А главное, в «Сферике» впервые встречается знаменитая ныне *теорема о трансверсалях*, названная арабскими математиками «правилом шести величин». Сегодня весь мир знает ее как *теорему Менелая*. Эта теорема помогает решить много важных, полезных, часто довольно трудных задач. Она, несомненно, является одной из «жемчужин» древнегреческой математики!

Прежде, чем приступить к обстоятельному разговору о применении *теоремы Менелая*, сформулируем и докажем ее.

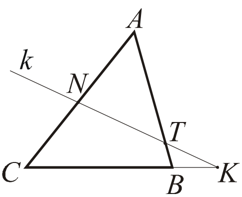


рис.1

Теорема Менелая. *Если секущая k пересекает прямые, содержащие стороны BC, AC и AB треугольника ABC соответственно в точках K, N, T (рис.1), то справедливо следующее соотношение:* $\dfrac{AT}{TB}\cdot\dfrac{BK}{KC}\cdot\dfrac{CN}{NA}=1$.

<u>*Доказательство*</u>.

<u>*I способ*</u>. Из вершин A, B, C проведем соответственно перпендикуляры h_1; h_2; h_3 к прямой k (*рис.2*).

$\dfrac{AT}{TB}=\dfrac{h_1}{h_2}$, поскольку $\Delta ADT \sim \Delta BET$.

$\dfrac{BK}{KC}=\dfrac{h_2}{h_3}$ ($\Delta BEK \sim \Delta CFK$) и $\dfrac{CN}{NA}=\dfrac{h_3}{h_1}$ ($\Delta CFN \sim \Delta ADN$). Таким образом,

$$\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CN}{NA}=\frac{h_1}{h_2}\cdot\frac{h_2}{h_3}\cdot\frac{h_3}{h_1}=1.$$

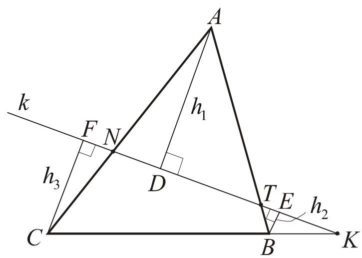


рис.2

<u>Замечание</u>. Для запоминания удобно брать всякий раз: *в числителе* – отрезок от вершины треугольника до точки на секущей. А *в знаменателе* – от точки на секущей до следующей вершины.

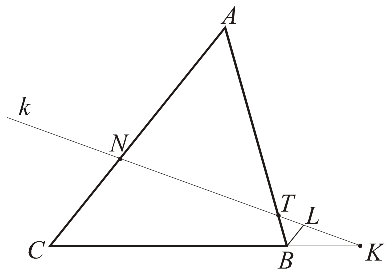


рис.3

<u>*II способ*</u>. Проведем $BL \parallel AC$ (*рис.3*).

Тогда $\dfrac{AT}{TB} = \dfrac{AN}{BL}$ ($\Delta ANT \sim \Delta BLT$) и

$\dfrac{BK}{KC} = \dfrac{BL}{CN}$ ($\Delta BLK \sim \Delta CNK$).

Таким образом,

$$\frac{AT}{TB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{AN}{BL} \cdot \frac{BL}{CN} \cdot \frac{CN}{NA} = 1.$$

<u>*III способ*</u>. Проведем $BQ \parallel k$ (*рис.4*) и обозначим:

$CQ = x$; $QN = y$; $NA = z$.

По *теореме Фалеса*

$$\frac{AT}{TB} = \frac{z}{y}; \quad \frac{BK}{KC} = \frac{y}{x+y} \quad \text{и} \quad \frac{CN}{NA} = \frac{x+y}{z}.$$

Нетрудно заметить, что опять-таки

$$\frac{AT}{TB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1.$$

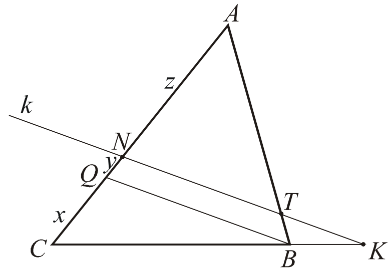


рис.4

Заметим , что верна и *обратная теорема Менелая*: *если для треугольника ABC и трех точек K, N, T на его сторонах (или их продолжениях) выполняется равенство* $\dfrac{AT}{TB} \cdot \dfrac{BK}{KC} \cdot \dfrac{CN}{NA} = 1$, *то точки* K; N; T *лежат на одной прямой* (*рис.1*).

Доказательство приводится *методом от противного* с применением *прямой теоремы Менелая* (выполните его самостоятельно).

Теперь – самое время предложить вниманию читателей серию задач, где применение *теоремы Менелая* представляется красивым, эффективным, мощным.

Задача 1. *Докажите, что медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины.*

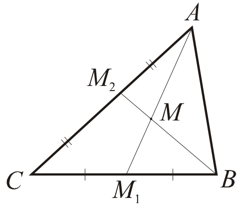


рис.5

Доказательство. Пусть медианы AM_1 и BM_2 пересекаются в точке *M (рис.5)*. Применим *теорему Менелая* для ΔAM_1C и секущей BM_2:

$\dfrac{AM}{MM_1}\cdot\dfrac{M_1B}{BC}\cdot\dfrac{CM_2}{M_2A}=1$. Поскольку $\dfrac{M_1B}{BC}=\dfrac{1}{2}$ и

$CM_2=M_2A$, то $AM:MM_1=2:1$.

Задача 2. *На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B взята такая точка D, что* $BD=\dfrac{1}{3}AB$ *(рис.6).* $AK:KC=2:1$, *где K – точка на стороне AC. Отрезок KD и сторона BC пересекаются в точке Q. Докажите, что* $DQ=QK$.

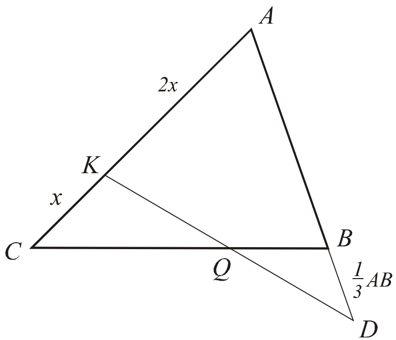


рис.6

Доказательство. По *теореме Менелая* для ΔAKD и секущей $C-Q-B$ имеем:

$$\frac{AB}{BD}\cdot\frac{DQ}{QK}\cdot\frac{KC}{CA}=1, \text{ или}$$

$$\frac{AB}{\frac{1}{3}AB}\cdot\frac{DQ}{QK}\cdot\frac{x}{3x}=1,$$

откуда получаем: $DQ=QK$.

Задача 3. *В треугольнике ABC сторона BC = a. Точки N и T соответственно на сторонах AC и AB таковы, что* $\dfrac{CN}{NA}=\dfrac{4}{1}$ *и* $\dfrac{AT}{TB}=\dfrac{3}{2}$. *Прямые NT и CB пересекаются в точке D (рис.7). Найдите CD.*

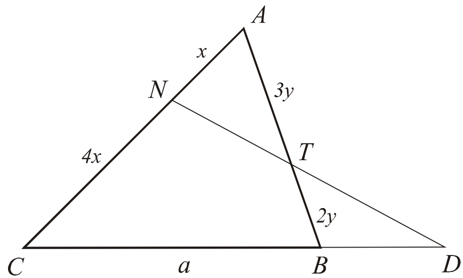


рис.7

Решение. *По теореме Менелая* для ΔABC и секущей $N-T-D$:

$$\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CN}{NA}=1, \text{ или}$$

$\frac{3y}{2y}\cdot\frac{BD}{a+BD}\cdot\frac{4x}{x}=1$, откуда $\frac{BD}{a+BD}=\frac{1}{6}$ и $BD=\frac{a}{5}$. Тогда $CD=\frac{6a}{5}$.

Задача 4. Медиана BM_2 и биссектриса CL_3 в треугольнике ABC пересекаются в точке Q. Найдите отношение $\frac{CQ}{QL_3}$, если $A=30°,\ \ B=45°$.

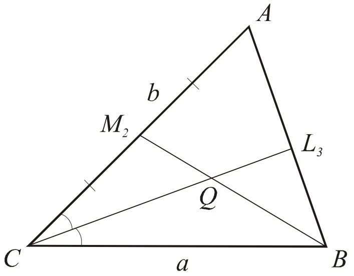


рис.8

<u>*Доказательство*</u>. Пусть $BC=a,\ \ AC=b$ *(рис.8)*. По *теореме Менелая* для ΔACL_3 и секущей M_2-Q-B имеем: $\frac{CQ}{QL_3}\cdot\frac{L_3B}{BA}\cdot\frac{AM_2}{M_2C}=1$.

Поскольку $AM_2=M_2C$, то $\frac{CQ}{QL_3}=\frac{BA}{L_3B}=\frac{BL_3+AL_3}{BL_3}=1+\frac{AL_3}{BL_3}$, где $\frac{AL_3}{BL_3}=\frac{b}{a}$ (по свойству биссектрисы).

Тогда

$$\frac{CQ}{QL_3}=1+\frac{b}{a}=1+\frac{2R\cdot\sin B}{2R\cdot\sin A}=1+\frac{\sin 45°}{\sin 30°}=1+\sqrt{2}\ .$$

Задача 5. *Биссектрисы AL_1 и BL_2 треугольника ABC пересекаются в точке I (рис.9). Докажите справедливость формулы $\frac{AI}{IL_1}=\frac{b+c}{a}$.*

<u>*Доказательство*</u>. По *теореме Менелая* для ΔAL_1C и секущей BL_2 имеем: $\frac{AI}{IL_1}\cdot\frac{L_1B}{BC}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}=1$.

Однако $\frac{CL_2}{L_2A}=\frac{a}{c}$ (свойство биссектрисы) и, поскольку $\frac{CL_1}{L_1B}=\frac{b}{c}$, то добавив по 1 и перевернув, получим: $\frac{L_1B}{BC}=\frac{c}{b+c}$. Таким образом,

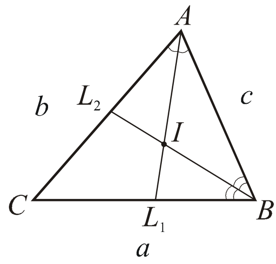


рис.9

$$\frac{AI}{IL_1}\cdot\frac{c}{b+c}\cdot\frac{a}{c}=1\text{, откуда }\frac{AI}{IL_1}=\frac{b+c}{a}.$$

Задача 6. *В треугольнике ABC ортоцентр H делит высоту AH_1 пополам. Докажите, что $\cos A=\cos B\cdot\cos C$.*

<u>*Доказательство*</u>. Применим теорему Менелая для ΔAH_1C и секущей BH_2 (*рис.10*):

$$\frac{AH}{HH_1}\cdot\frac{H_1B}{BC}\cdot\frac{CH_2}{H_2A}=1 \qquad (1)$$

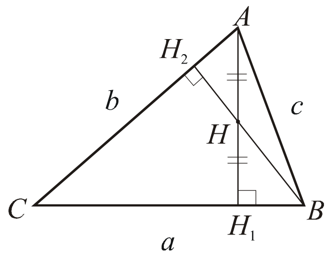


рис.10

Но $\frac{AH}{HH_1}=1$ (по условию); $H_1B=c\cdot\cos B$ (из ΔABH_1); $BC=a$; $CH_2=a\cdot\cos C$ (из ΔCH_2B) и $H_2A=c\cdot\cos A$ (з ΔAH_2B).

Следовательно, согласно (1) получим:

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{c\cdot\cos B}{a}\cdot\frac{a\cdot\cos C}{c\cdot\cos A}=1\text{, откуда }\cos A=\cos B\cdot\cos C.$$

Задача 7. *Через центроид M треугольника ABC проведена секущая k. Докажите, что в обозначениях рис.11 выполняется равенство:*

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{t}=1.$$

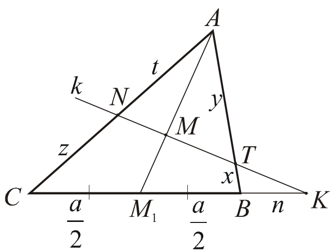


рис.11

<u>*Доказательство*</u>. Проведем медиану AM_1 и по *теореме Менелая* для ΔABM_1 и секущей k запишем: $\frac{y}{x}\cdot\frac{n}{\frac{a}{2}+n}\cdot\frac{1}{2}=1$ (поскольку $\frac{M_1M}{MA}=\frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ $\frac{x}{y}=\frac{n}{a+2n}$ (1)

Теорема Менелая для ACM_1 и секущей k дает такое равенство:

$$\frac{z}{t}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{\frac{a}{2}+n}{a+n}=1.$$

Тогда $\frac{z}{t}=\frac{a+n}{a+2n}$ (2)

Сложив левые и правые части равенств (1) и (2), получим: $\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{t}=\dfrac{n+a+n}{a+2n}=1$

.

Задача 8. *BL_2 и CL_3 – биссектрисы в треугольнике ABC. Прямые L_2L_3 и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что Q совпадает с основанием внешней биссектрисы угла A.*

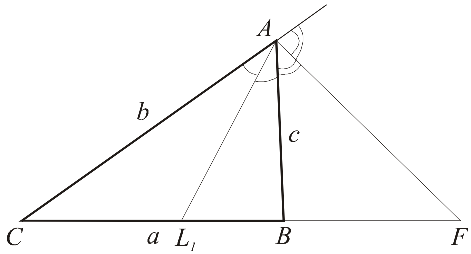


рис.12

<u>*Доказательство*</u>. Известно, что для точки F – основания внешней биссектрисы угла A – выполняется равенство: $\dfrac{FC}{FB}=\dfrac{b}{c}$ (*рис.12*). Докажите этот факт самостоятельно.

Чтобы $Q\equiv F$, необходимо доказать: $\dfrac{QC}{QB}=\dfrac{b}{c}$ (*рис.13*). По теореме Менелая для ΔABC и секущей L_2-L_3-Q:

$\dfrac{AL_3}{L_3B}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CL_2}{L_2A}=1$, или

$\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{a}{c}=1$, откуда $\dfrac{QC}{QB}=\dfrac{b}{c}$.

Следовательно, Q – основание внешней биссектрисы угла A.

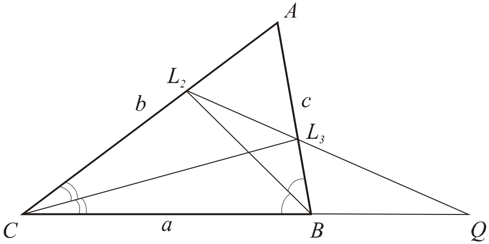
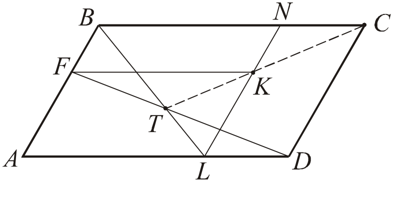


рис.13

Задача 9. *ABCD* и *AFKL* – параллелограммы. *FD* и *BL* пересекаются в точке *T (рис.14)*. Докажите, что точки $C-K-T$ принадлежат одной прямой.

<u>*Доказательство*</u>. Применим теорему Менелая для ΔABL и секущей $F-T-D$.



$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BT}{TL}\cdot\frac{LD}{DA}=1 \qquad (1)$$

Продолжим LK до пересечения с BC в точке N. Если для ΔBLN и трех точек C; K; T выполняется *обратная теорема Менелая*, то эти 3 точки принадлежат одной прямой.

Итак, проверим, равно ли 1 выражение $\frac{LK}{KN}\cdot\frac{NC}{CB}\cdot\frac{BT}{TL}$ (2)

Нетрудно заметить, что $\frac{LK}{KN}=\frac{AF}{FB}$ и $\frac{NC}{CB}=\frac{LD}{DA}$. Подставим в (2) и получим формулу (1): $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{LD}{DA}\cdot\frac{BT}{TL}=1$. Следовательно, $C-K-T$ – одна прямая.

Задача 10. *Серединный перпендикуляр к биссектрисе AL_1 треугольника ABC пересекает прямую CB в точке E. Докажите, что $\frac{CE}{BE}=\frac{b^2}{c^2}$.*

Доказательство. Пусть проведенный серединный перпендикуляр пересекает AC; AL_1 и AB соответственно в точках K, T, N *(рис.15)*. Нетрудно показать, что AKL_1N – ромб (*покажите!*) По теореме Менелая для ΔABC и секущей $K-N-E$: $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CK}{KA}=1$.

Поскольку $\frac{AN}{NB}=\frac{CL_1}{L_1B}=\frac{b}{c}$ и $\frac{CK}{KA}=\frac{CL_1}{L_1B}=\frac{b}{c}$, то $\frac{CE}{BE}=\frac{b^2}{c^2}$.

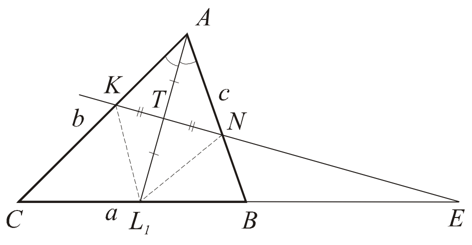


рис.15

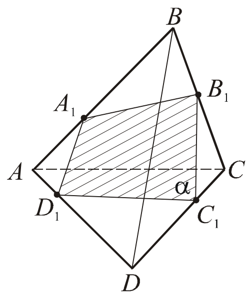


рис.16

И перед тем, как перейти к задачам для самостоятельного решения, обратим внимание на стереометрическое обобщение теоремы Менелая.

Если плоскость α пересекает ребра AB, BC, CD и DA тетраэдра BACD соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1, то

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1$$ *(рис.16).*

<u>*Доказательство*</u>. Пусть h_1; h_2; h_3; h_4 – это расстояния соответственно от точек A; B; C; D до плоскости a (на *рис.16* эти расстояния не указаны, однако их легко представить).

Тогда очевидно, что $\frac{AA_1}{A_1B}=\frac{h_1}{h_2}$; $\frac{BB_1}{B_1C}=\frac{h_2}{h_3}$; $\frac{CC_1}{C_1D}=\frac{h_3}{h_4}$ и $\frac{DD_1}{D_1A}=\frac{h_4}{h_1}$.

Остается лишь перемножить полученные соотношения.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 11. В треугольнике *ABC* биссектриса AL_1 делит сторону *BC* в отношении $2:1$ ($CL_1:BL_1=2:1$). В каком отношении медиана CM_3 делит эту биссектрису?

Задача 12. Через точку M_1 – середину стороны *BC* треугольника *ABC* – проведена прямая. Она пересекает *AC* в точке *K* и продолжение *AB* (за вершину *B*) – в точке *N*, причем $AK=AN$. Докажите, что $BN=CK$.

Задача 13. На медиане CM_3 треугольника *ABC* взята точка *K* – такая, что $CK:KM_3=3:1$. Прямые *AK* и *BC* пересекаются в точке *D*. Найдите отношение площадей треугольников *ACD* и *ABD*.

Задача 14. AH_1 – высота в треугольнике *ABC*, *H* – его ортоцентр. Докажите, что $\frac{AH}{HH_1}=\frac{\cos B\cdot\cos C}{\cos A}$.

Задача 15. С помощью теоремы Менелая докажите *теорему Чевы*: если AA_1; BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке – точке *K (рис.17)*, то справедливо такое правило шести величин: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

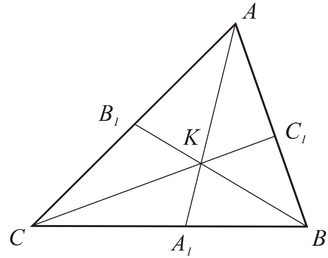


рис.17

Задача 16. С помощью теоремы Менелая докажите так называемую *лемму о трапеции*: середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Задача 17. *Q* и *T* – соответственно середины *BC* и *AD* – оснований трапеции *ABCD* (*рис.18*). *K* – точка на продолжении диагонали *AC*. Прямые *KQ* и *AB* пересекаются в точке *E*, а *KT* и *CD* – в точке *F*. Докажите, что $EF \parallel AD$.

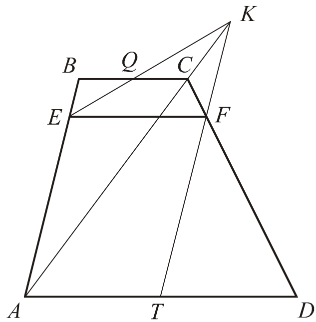


рис.18

Задача 18. Докажите, что точки пересечения серединных перпендикуляров к биссектрисам треугольника *ABC* с продолжениями соответствующих сторон треугольника лежат на одной прямой.

Задача 19 (*обратная стереометрическая теорема Менелая*). Если для четырех точек A_1; B_1; C_1; D_1, лежащих соответственно на ребрах *AB, BC, CD* и *DA* тетраэдра, выполняется равенство

$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1B}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1$, то четыре указанные точки лежат в одной плоскости.

Глава 2
Менелай «со звездочкой»

В этой главе мы поведем разговор о задачах повышенной трудности, в которых успешно применяется *теорема Менелая*. Более того, без теоремы Менелая некоторые из этих задач становятся просто «неприступной крепостью». Вместе с тем они известны, важны и популярны. Поэтому представляется необходимым уделить пристальное внимание такого рода задачам.

Задача 1. *Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC и продолжений AB и AC в точках T, N, K соответственно. Q – точка пересечения BK и CN (рис.1). Докажите, что точки A, T, Q принадлежат одной прямой.*

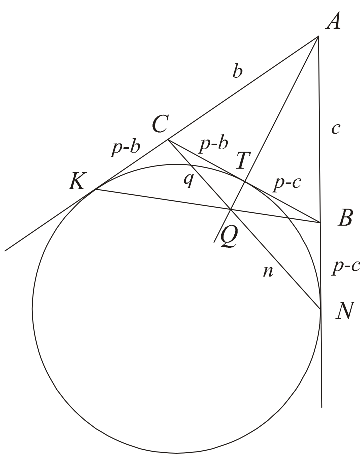


рис.1

Решение. Известно, что $CT = CK = p-b$, а $BT = BN = p-c$ (*покажите!*). Пусть $CQ = q$ и $QN = n$. *По теореме Менелая* для ΔACN и секущей $K-Q-B$:

$$\frac{c}{p-c}\cdot\frac{n}{q}\cdot\frac{p-b}{p}=1 \qquad (1)$$

Если для ΔBCN и трех точек $A,\ T,\ Q$ будет выполнено равенство $\frac{CT}{TB}\cdot\frac{BA}{AN}\cdot\frac{NQ}{QC}=1$, то по обратной теореме Менелая это и будет означать, что точки $A,\ T,\ Q$ лежат на одной прямой. Итак,

$$\frac{CT}{TB}\cdot\frac{BA}{AN}\cdot\frac{NQ}{QC}=\frac{p-b}{p-c}\cdot\frac{c}{p}\cdot\frac{n}{q} \qquad (2)$$

Но правая часть равенства *(2)* в точности равна левой части равенства *(1).* Значит, $\frac{CT}{TB}\cdot\frac{BA}{AN}\cdot\frac{NQ}{QC}=1$. Таким образом, точки $A,\ T,\ Q$ принадлежат одной прямой.

Задача 2. *X – произвольная точка описанной окружности треугольника ABC. XK, XN и XT – перпендикуляры, проведенные из X к прямым BC, AC и AB соответственно (рис.2). Докажите, что точки K, N, T лежат на одной прямой (прямой Симпсона).*

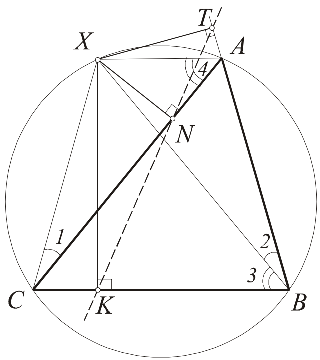


рис.2

<u>*Доказательство*</u>. Если мы докажем, что для ΔABC и точек $T-N-K$ будет выполняться равенство $\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BK}{KC}=1$, то, согласно *обратной теореме Менелая*, точки ***T, N, K*** лежат на одной прямой.

Пусть $\angle 1=\angle 2=a$ (вписанные, опираются на одну дугу). Аналогично $\angle 3=\angle 4=b$.

Пусть также $\angle XCB=f$, тогда $\angle XAB=180^\circ-f$. А смежный с ним $\angle XAT=f$

Имеем: $CN=CX\cdot\cos a$; $NA=AX\cdot\cos b$; $AT=AX\cdot\cos f$; $TB=BX\cdot\cos a$; $BK=BX\cdot\cos b$ и $CK=CX\cdot\cos f$.

Тогда $\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BK}{KC}=\frac{CX\cdot\cos a}{AX\cdot\cos b}\cdot\frac{AX\cdot\cos f}{BX\cdot\cos a}\cdot\frac{BX\cdot\cos b}{CX\cdot\cos f}=1$.

Следовательно, $T-N-K$ – одна прямая.

Задача 3. *Отрезок EF, соединяющий середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника ABCD, делится его диагоналями на три равные части. Докажите, что ABCD – трапеция. Найдите отношение ее оснований.*

<u>*Решение*</u>. Пусть, согласно условию, $EK=KN=NF$ (*рис.3*). Пусть также диагонали AC и BD пересекаются в точке O.

По теореме Менелая для ΔNBE и секущей $O-K-A$ имеем:

$$\frac{BO}{ON}\cdot\frac{NK}{KE}\cdot\frac{EA}{AB}=1,$$

откуда $\frac{BO}{ON}=\frac{2}{1}$ *(1)*

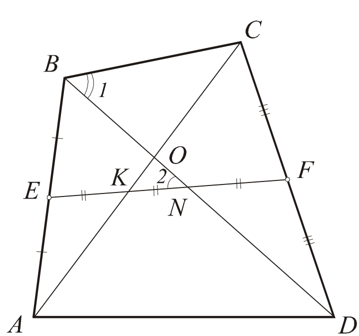


рис.3

По теореме Менелая для ΔKCF и секущей $O-N-D$:

$$\frac{CO}{OK}\cdot\frac{KN}{NF}\cdot\frac{FD}{DC}=1, \text{ или } \frac{CO}{OK}=\frac{2}{1} \qquad (2)$$

Из *(1)* и *(2)* следует: $\frac{BO}{ON}=\frac{CO}{OK}$. Поскольку к тому же $\angle BOC=\angle NOK$ – вертикальные, то $\Delta BOC\sim\Delta NOK$. Тогда $\angle 1=\angle 2$. Но они являются внутренними накрест лежащими при прямых *BC, EF* и секущей *BN*. Следовательно, $EF \parallel BC$.

Становится очевидным, что *EK* – средняя линия в ΔABC, то есть $EK \parallel BC$, а *KF* – средняя линия в ΔACD, или $KF \parallel AD$. Значит, $BC \parallel AD$ и *ABCD* – трапеция.

Пусть $EK=KN=NF=t$. Тогда $BC=2EK=2t$, а $AD=2KF=4t$. Отношение оснований в трапеции *ABCD* равно $2t:4t=1:2$.

Задача 4. *Точки T, N, D соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC таковы, что* $\frac{AD}{DB}=\frac{BT}{TC}=\frac{CN}{NA}=k \qquad (k<1)$. *Прямые AT, BN и CD в пересечении дают* ΔQEF *(рис.4). Найдите отношение площади* ΔQEF *к площади* ΔABC.

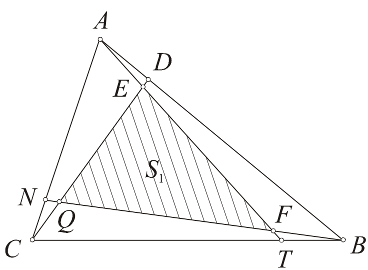


рис.4

<u>*Решение*</u>. Пусть $S_{ABC}=S$. Тогда

$\frac{S_{BNC}}{S}=\frac{CN}{CA}=\frac{k}{k+1}$ (треугольники *BNC* и *ABC* имеют общую высоту, проведенную из вершины *B*). Аналогично

$\frac{S_{ACD}}{S}=\frac{S_{ABT}}{S}=\frac{k}{k+1}$. *По теореме Менелая* для ΔABN и секущей $C-Q-D$

имеем: $\frac{NQ}{QB}\cdot\frac{BD}{DA}\cdot\frac{AC}{CN}=1$, или

$\frac{NQ}{QB}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}=1$, откуда $\frac{NQ}{QB}=\frac{k^2}{k+1}$.

Тогда $\frac{NQ}{NB}=\frac{k^2}{k^2+k+1} \qquad (1)$

Следовательно, $\dfrac{S_{CNQ}}{S_{CNB}}=\dfrac{NQ}{NB}=\dfrac{k^2}{k^2+k+1}$ (у треугольников CNQ и CNB – общая высота, проведенная из вершины C).

Значит, $S_{CNQ}=S_{CNB}\cdot\dfrac{k^2}{k^2+k+1}=S\cdot\dfrac{k}{k+1}\cdot\dfrac{k^2}{k^2+k+1}=S\cdot\dfrac{k^3}{(k+1)(k^2+k+1)}$.

Поскольку $S_{CNQ}=S_{AED}=S_{BFT}$, то $S_{QEF}=S-3S_{CNB}+3S_{CNQ}$, или

$$S_{QEF}=S-3S\cdot\frac{k}{k+1}+3S\cdot\frac{k^3}{(k+1)(k^2+k+1)};$$

$$\frac{S_{QEF}}{S}=1-\frac{3k}{k+1}+\frac{3k^3}{(k+1)(k^2+k+1)}=\frac{k^3-k^2-k+1}{(k+1)(k^2+k+1)}=\frac{(k-1)^2(k+1)}{(k+1)(k^2+k+1)}=$$

$$=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}=\frac{(k-1)^3}{k^3-1}$$

Задача 5. *Три окружности с центрами O_1; O_2; O_3 не имеют общих точек. Их попарные внешние касательные пересекаются в точках K, N, T (рис.5). Докажите, что точки K, N, T принадлежат одной прямой.*

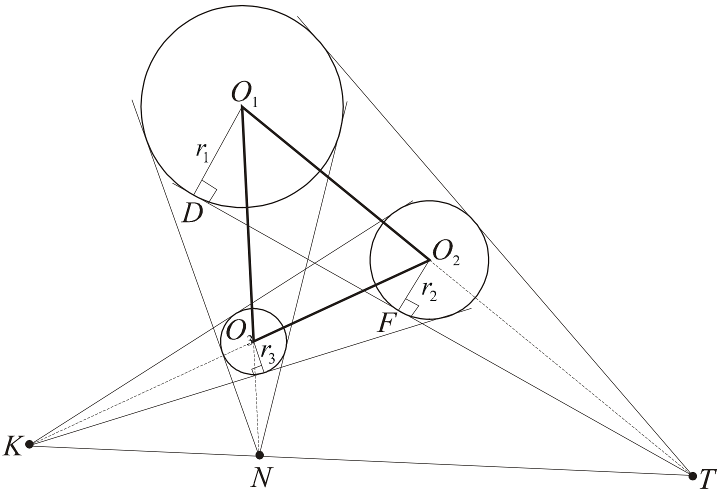


рис.5

Доказательство. Если для $\Delta O_1O_2O_3$ и точек *K, N, T* лежащих на продолжениях его сторон, выполняется соотношение: $\frac{O_1T}{TO_2}\cdot\frac{O_2K}{KO_3}\cdot\frac{O_3N}{NO_1}=1$, то *по обратной теореме Менелая* $K-N-T$ – это одна прямая. Обозначим радиусы окружностей O_1; O_2; O_3 через r_1; r_2; r_3 соответственно. Нетрудно заметить, что $\frac{O_1T}{TO_2}=\frac{r_1}{r_2}$ (из подобия треугольников O_1TD и O_2TF). Аналогично $\frac{O_2K}{KO_3}=\frac{r_2}{r_3}$ и $\frac{O_3N}{NO_1}=\frac{r_3}{r_1}$. Перемножив и сократив, получим в ответе 1. Задача решена!

Задача 6. *Окружность w описана около треугольника ABC. Касательные к w в вершинах треугольника пересекает прямые, содержащие его стороны, в точках K, N, T (рис.6). Докажите, что K – N – T – одна прямая.*

Доказательство. Если для ΔABC и секущей $N-K-T$ будет выполняться равенство $\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AT}{TB}=1$, то *по обратной теореме Менелая* точки $N-K-T$ лежат на одной прямой. Покажем, что указанное равенство будет выполнено. $KC\cdot BK=KA^2$ (по теореме о квадрате касательной).

$\frac{BK}{\sin C}=\frac{KA}{\sin(180^\circ-B)}$ – по теореме синусов для ΔABK. Отсюда

$$KA=BK\cdot\frac{\sin B}{\sin C} \text{ и } KA^2=BK^2\cdot\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}.$$

Следовательно,

$$KC\cdot BK=BK^2\cdot\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}, \text{ или } \frac{BK}{KC}=\frac{\sin^2 C}{\sin^2 B}.$$

Аналогично $\frac{CN}{NA}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}$ и $\frac{AT}{TB}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 A}$.

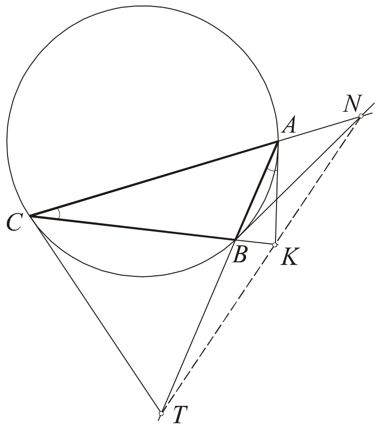


рис.6

Перемножив левые и правые части последних трех равенств, получим 1, что равносильно решению задачи.

Задача 7. Окружность, вписанная в треугольник *ABC,* касается его сторон *BC, AC* и *AB* в точках K_1; K_2; K_3 соответственно. Прямые K_2K_3 и *CB* пересекаются в точке *N (рис.7)*.
F – середина отрезка NK_1*. Докажите, что касательные из точки F к вписанной и описанной окружностям треугольника ABC равны.*

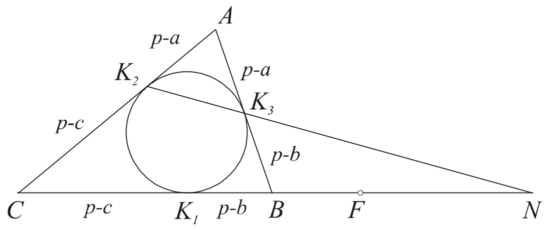


рис.7

<u>*Доказательство*</u>. Касательную t из точки F к описанной окружности находим по формуле:
$t^2 = FC \cdot FB$ (по теореме о квадрате касательной). Тогда, чтобы решить задачу, достаточно показать, что $FK_1^2 = FC \cdot FB$. Применим *теорему Менелая к* ΔABC и секущей $K_2 - K_3 - N$: $\frac{AK_3}{K_3B}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CK_2}{K_2A}=1$,

или $\frac{p-a}{p-b}\cdot\frac{BN}{a+BN}\cdot\frac{p-c}{p-a}=1$, откуда $BN = \frac{a(p-b)}{b-c}$.

Тогда $NK_1 = BN + BK_1 = \frac{a(p-b)}{b-c} + (p-b)$, или $NK_1 = \frac{2(p-b)(p-c)}{b-c}$.

Поскольку $FK_1 = \frac{1}{2}NK_1$, то $FK_1 = \frac{(p-b)(p-c)}{b-c}$ *(1)*

$$FB = FK_1 - BK_1 = \frac{(p-b)(p-c)}{b-c} - (p-b) = \frac{(p-b)^2}{b-c}$$

$$FC = FK_1 + K_1C = \frac{(p-b)(p-c)}{b-c} + (p-c) = \frac{(p-c)^2}{b-c}$$

Следовательно, $FB \cdot FC = \frac{(p-b)^2\cdot(p-c)^2}{(b-c)^2} = FK_1^2$ согласно равенству *(1).*

Таким образом, касательные из точки *F* к вписанной окружности треугольника *ABC* равны.

Задача 8. *Через M_1 (середину стороны BC треугольника ABC) и его инцентр I проведена прямая, пересекающая высоту AH_1 в точке K (рис.8). Докажите, что AK = r, где r – радиус вписанной в треугольник ABC окружности.*

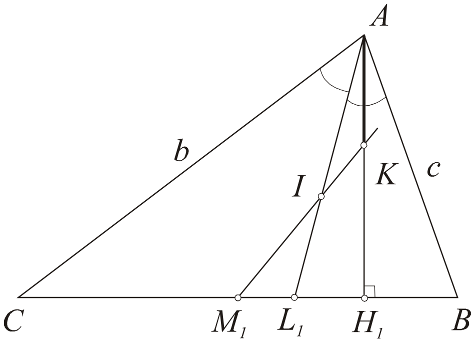


рис.8

Доказательство. Пусть в ΔABC $b > c$. Пусть также AL_1 и AM_1 – соответственно биссектриса и медиана треугольника. Применим *теорему Менелая* для

ΔAH_1L_1 и секущей $M_1 - I - K$: $\dfrac{AI}{IL_1} \cdot \dfrac{L_1M_1}{M_1H_1} \cdot \dfrac{H_1K}{KA} = 1$

При этом, $\dfrac{AI}{IL_1} = \dfrac{b+c}{a}$ – известный факт геометрии треугольника.

$$L_1M_1 = CL_1 - CM_1 = \frac{ab}{b+c} - \frac{a}{2} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

$$M_1H_1 = BM_1 - BH_1 = \frac{a}{2} - c \cdot \cos B = \frac{a}{2} - c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{b^2 - c^2}{2a}.$$

Имеем: $\dfrac{b+c}{a} \cdot \dfrac{a(b-c) \cdot 2a}{2(b+c)(b-c)(b+c)} \cdot \dfrac{H_1K}{KA} = 1$,

откуда $\dfrac{H_1K}{KA} = \dfrac{b+c}{a}$, или $\dfrac{H_1K}{KA} + 1 = \dfrac{b+c}{a} + 1$, или $\dfrac{h_a}{KA} = \dfrac{2p}{a}$.

Тогда $KA = \dfrac{ah_a}{2p} = \dfrac{2S}{2p} = r$, что и требовалось доказать.

Еще ряд задач «со звездочкой» на теорему Менелая предложим для самостоятельного решения.

Задача 9. Окружности w_1 и w_2 имеют внешнее касание. *K* – точка пересечения их общих внешних касательных. Окружность w_3 касается первых двух окружностей в точках *E* и *F*. Докажите, что точки *F, E, K* принадлежат одной прямой.

Задача 10. Прямая *t* пересекает стороны *BC, AC* и *AB* треугольника *ABC* (или их продолжения) соответственно в точках A_1; B_1; C_1. Докажите, что три точки, симметричные вершинам *A, B* и *C* относительно середин отрезков B_1C_1; A_1C_1 и A_1B_1, лежат на одной прямой.

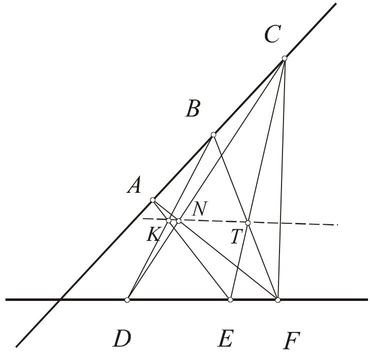


рис.9

Задача 11. Середины диагоналей выпуклого четырехугольника и середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений его противоположных сторон, лежат на одной прямой – *прямой Гаусса*. Докажите!

Задача 12. *(Теорема Паппа)* На одной из двух пересекающихся прямых взяты точки *A, B, C*. На другой – точки *D, E, F (рис.9).* $K = AE \cap BD$; $N = AF \cap CD$ и $T = BF \cap CE$. Докажите, что точки *K, N, T* лежат на одной прямой.

Задача 13 *(теорема Паскаля).* Пусть шестиугольник *ABCDEF* вписан в окружность. Докажите, что точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой.

Задача 14. *(теорема Дезарга)* Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены на плоскости так, что прямые A_1A_2; B_1B_2 и C_1C_2 имеют общую точку Q *(рис.10)*. Пусть $K = A_1B_1 \cap A_2B_2$; $N = B_1C_1 \cap B_2C_2$ и $T = A_1C_1 \cap A_2C_2$. Докажите, что точки ***K, N, T*** лежат на одной прямой.

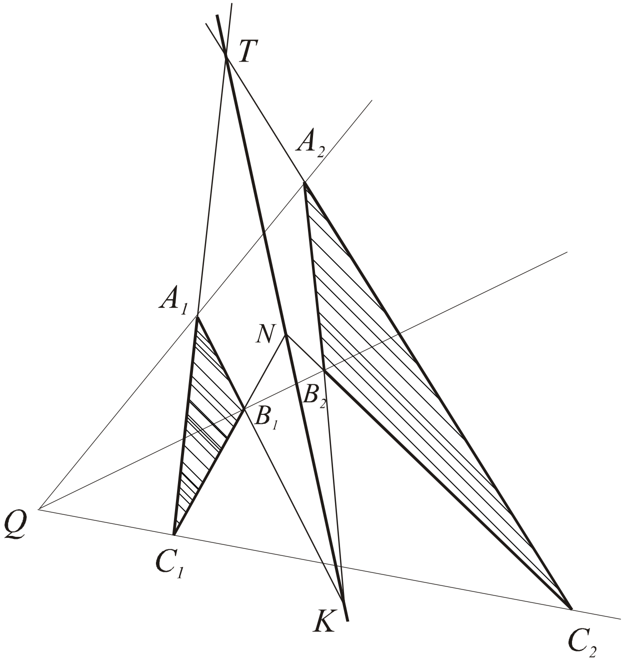


рис.10

Задача 15. Если все стороны пространственного четырехугольника касаются некоторой сферы, то четыре точки касания лежат в одной плоскости. Докажите!

Глава 3
Последний геометр Эллады

Так сложилось, что *Папп Александрийский* (вторая половина III ст. н.э.) стал последним великим геометром Древней Греции. После него выдающихся геометрических исследований уже не было.

Главная работа Паппа – «Математические коллекции», которая состоит из 8 книг ($1^{я}$ книга и значительная часть $2^{й}$ не сохранились). В «Математических коллекциях» Папп собрал вместе все, что он считал важным в работах своих предшественников. От него мы узнали о некоторых произведения Евклида и Аполлония, которые не сохранились. О работах Менелая, Архимеда, Герона, Зенодора и других (всего свыше 30 авторов). Вдобавок, в отдельных случаях Папп Александрийский дополнил и распространил произведения выдающихся геометров в виде собственных лемм и теорем. $3^{я}$ книга «Математических коллекций» посвящена задачам об *удвоении куба и трисекции угла*. В ней также дается новое построение *5 правильных многогранников*, вписанных в данный шар.

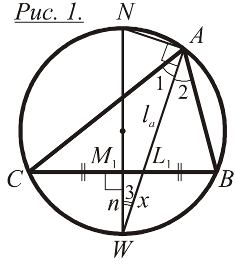
В $4^{й}$ книге Папп предлагает *обобщенную теорему Пифагора*, решает ряд задач на *«арбелос» Архимеда*. $5^{я}$ книга знакомит нас с изопериметрическими фигурами («…из всех фигур на плоскости, которые имеют одинаковые периметры, наибольшую площадь имеет круг»).

В $6^{й}$ книге речь идет об астрономических проблемах. Также рассматривается такая важная геометрическая фигура как эллипс. Собственная теорема об объемах тел вращения (намного позднее она получит название *теоремы Паппа-Гульдена*) размещенная в $7^{й}$ книге. И наконец, в $8^{й}$ книге мы находим *теорему о центре масс*, рассмотрение важных вопросов из механики. Вот, коротко, даже и все...

Но именно сейчас наступает время подробно рассказать о наиболее важном и полезном, что сделал Папп Александрийский в геометрии. А также о применении его задач, лемм, теорем. Итак, начнем.

1. Задача Паппа. *Дана точка на биссектрисе угла. Провести через эту точку прямую таким образом, чтобы ее отрезок внутри угла оказался заданной длины.*

Рис. 1.



В современных обозначениях *задача Паппа* выглядит таким образом: построить ΔABC по углу A, биссектрисе этого угла и стороне BC, которая равняется a. Или совсем коротко: построить ΔABC по a, A, l_a.

Решение. Анализ показывает: если продолжить биссектрису $AL_1 = l_a$ до пересечения с описанной окружностью ΔABC в точке W (рис. 1), то $\cup BW = \cup CW$ (поскольку $\angle 1 = \angle 2 = \frac{A}{2}$). Тогда и срединный перпендикуляр к BC пройдет через W, т.е. WN – диаметр описанного круга ΔABC. Итак, $WN = 2R$ и $M_1W = n$ – известный отрезок (если к BC провести срединный перпендикуляр до пересечения с дугой BC, которая не содержит вершину A). Обозначим L_1W через x. Из подобия треугольников WAN и WM_1L_1 (они оба прямоугольные и имеют общий $\angle 3$) получим: $\frac{l_a + x}{2R} = \frac{n}{x}$, или $x^2 + l_a x - 2Rn = 0$.

$x_1 = \frac{-l_a - \sqrt{l_a^2 + 8Rn}}{2}$ – посторонний корень. $x_2 = x = \frac{-l_a + \sqrt{l_a^2 + 8Rn}}{2}$.

Тогда $l_a + x = AW = \frac{l_a + \sqrt{l_a^2 + 8Rn}}{2}$ (1)

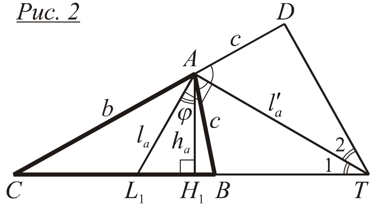
Очевидно, отрезок AW нетрудно построить.

Отсюда построение: на отрезке $BC = a$ строим сегмент, который содержит угол A. Из точки M_1 – середины BC – проводим перпендикуляр к BC, который пересечет нижнюю часть круга в точке W. Дальше строим отрезок AW по формуле (1). После чего из точки W раствором циркуля AW делаем засечку на сегменте. Получим вершину A.

Заметим, что задача может иметь: 2 решения, одно решение, ни одного решения.

2. Применение задачи Паппа. *Построить ΔABC по h_a; l_a; $b + c$.*

Рис. 2



Решение. ΔAH_1L_1, где $AH_1 = h_a$; $AL_1 = l_a$, нетрудно построить по катету и гипотенузе (рис. 2). Пусть $\angle L_1AH_1 = j$. Строим l'_a – внешнюю биссектрису угла A (она перпендикулярна к l_a), которая пересечет продолжение BC в точке T, т.е. $AT = l'_a$. Продолжим CA на отрезок $AD = c$. Тогда $\Delta DAT = \Delta BAT$ – по 2 сторонам и углу между ними. Итак, $\angle 1 = \angle 2$. Но $\angle 1 = j$ (поскольку $\angle H_1AT = 90° - j$). Таким образом, ΔTDC можно построить по задаче Паппа: a, A, l_a (в наших обозначениях: $b + c$; $2j$; l'_a). Дальнейшее очевидно.

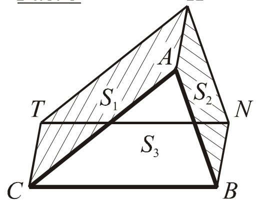


Рис. 3

3. Теорема Паппа (обобщенная теорема Пифагора). *На сторонах ΔABC построены параллелограммы, как показано на рис. 3. Причем, $S_{AKTC} = S_1$; $S_{AKNB} = S_2$; $S_{BNTC} = S_3$. Докажите, что $S_1 + S_2 = S_3$.*

Решение. $S_{KNBCTK} = S_{KNT} + S_3$. С другой стороны, $S_{KNBCTK} = S_{ABC} + S_1 + S_2$. Поскольку $\Delta ABC = \Delta KNT$ (по трем сторонам), то $S_1 + S_2 = S_3$.

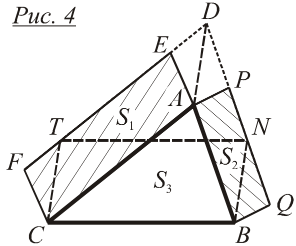


Рис. 4

Заметим следующее: параллелограммы могут быть расположены иным образом (рис. 4). Главное – чтобы стороны параллелограмма $BNTC$ были параллельны и равны отрезкам BC и AD. Пусть $S_{AEFC} = S_1$; $S_{APQB} = S_2$ и $S_{BNTC} = S_3$. В этом случае равенство $\boxed{S_1 + S_2 = S_3}$ сохраняется (докажите самостоятельно).

Если взять угол A прямым и построить не параллелограммы, а квадраты, то получим именно *теорему Пифагора*.

4. Применение обобщенной теоремы Пифагора для доказательства неравенства Эрдеша-Морделла.

Известное неравенство Эрдеша-Морделла выглядит таким образом: пусть расстояния от некоторой точки K внутри ΔABC к его вершинам A, B, C равняются соответственно R_a, R_b, R_c (рис. 5). А расстояния от K к сторонам a, b, c – соответственно d_a, d_b, d_c. Тогда справедливо неравенство:

$$R_a + R_b + R_c \geq 2\left(d_a + d_b + d_c\right)$$ *. Доказать!*

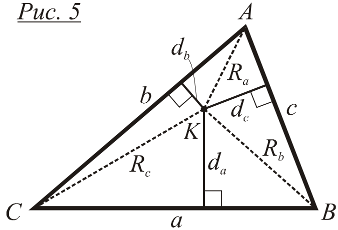
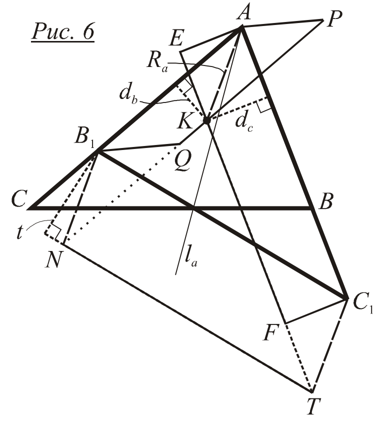


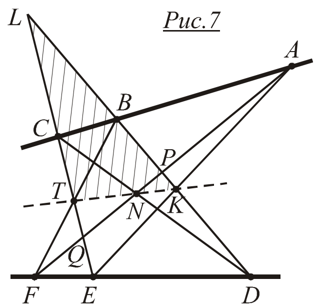
Рис. 5



Доказательство. Создадим ΔAB_1C_1, где B_1 и C_1 – точки, соответственно симметричные вершинам B и C относительно биссектрисы l_a (рис. 6). Построим параллелограммы $AEFC_1$ и $APQB_1$, чтобы они проходили через данную точку K. Применим *теорему Паппа* (*обобщенную теорему Пифагора*) для ΔAB_1C_1, в котором $AB_1 = c$; $AC_1 = b$; $B_1C_1 = a$. Тогда $S_1 = S_{AEFC_1} = b \cdot d_c$; $S_2 = S_{APQB_1} = c \cdot d_b$ и $S_3 = S_{B_1NTC_1} = a \cdot t \le a \cdot B_1N = a \cdot R_a$. Поскольку $S_3 = S_1 + S_2$, то $at = bd_c + cd_b$, или $aR_a \ge bd_c + cd_b$, или $R_a \ge \dfrac{b}{a}d_c + \dfrac{c}{a}d_b$. Аналогично нетрудно получить, что $R_b \ge \dfrac{a}{b}d_c + \dfrac{c}{b}d_a$ и $R_c \ge \dfrac{a}{c}d_b + \dfrac{b}{c}d_a$. Сложив три последних неравенства, получим: $R_a + R_b + R_c \ge \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)d_c + \left(\dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b}\right)d_a + \left(\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a}\right)d_b$. Поскольку сумма двух взаимно-обратных положительных чисел не меньше, чем 2, *неравенство Эрдеша-Морделла* доказано: $\boxed{R_a + R_b + R_c \ge 2(d_a + d_b + d_c)}$.

5. Теорема Паппа (из проективной геометрии). *Пусть A, B, C – три точки на одной, а точки D, E, F – три точки на другой прямой (рис.7). Вдобавок, $K = AE \cap BD$; $N = AF \cap DC$ и $T = BF \cap CE$. Докажите, что точки K, N, T лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть прямые DB и EC пересекаются в точке L. Также $P = AF \cap BD$ и $Q = AF \cap EC$. Применим *теорему Менелая* несколько раз для ΔLPQ и разных секущих:



а) ΔLPQ и секущая $D - N - C$:

$$\frac{QN}{NP} \cdot \frac{PD}{DL} \cdot \frac{LC}{CQ} = 1 \quad (1);$$

б) ΔLPQ и секущая $A - K - E$:

$$\frac{QA}{AP}\cdot\frac{PK}{KL}\cdot\frac{LE}{EQ}=1 \ (2);$$

в) ΔLPQ и секущая $F-T-B$: $\frac{QF}{FP}\cdot\frac{PB}{BL}\cdot\frac{LT}{TQ}=1$ (3);

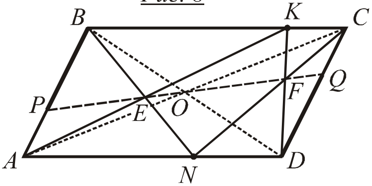
г) ΔLPQ и секущая $A-B-C$: $\frac{QA}{AP}\cdot\frac{PB}{BL}\cdot\frac{LC}{CQ}=1$ (4);

д) ΔLPQ и секущая $D-E-F$: $\frac{QF}{FP}\cdot\frac{PD}{DL}\cdot\frac{LE}{EQ}=1$ (5);

Перемножим (1), (2) и (3) и поделим на (4) и на (5). После сокращения получим: $\frac{QN}{NP}\cdot\frac{PK}{KL}\cdot\frac{LT}{TQ}=1$. По обратной теореме Менелая точки K, N, T лежат на одной прямой, что и нужно было доказать.

6. Применение теоремы Паппа из проективной геометрии.

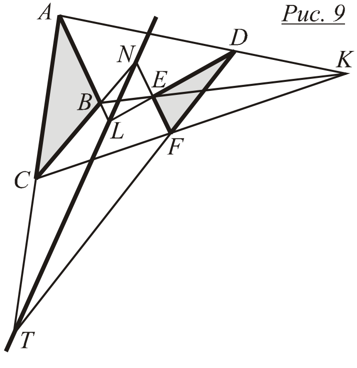
Рис. 8



Задача. *K и N – произвольные точки соответственно на сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ (рис. 8). AK и BN пересекаются в точке E, а CN и DK – в точке F. Прямая EF пересекает стороны AB и CD соответственно в точках P и Q. Докажите, что $BP = DQ$.*

Решение. По *теореме Паппа* точки E, F и точка пересечения BD и AC лежат на одной прямой. Но точка пересечения BD и AC – это точка O – центр симметрии параллелограмма. Поскольку прямая EF проходит через центр O симметрии параллелограмма (точку пересечения его диагоналей), то, очевидно, что $BP = DQ$.

Рис. 9

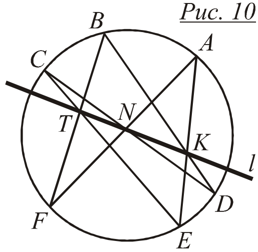


Сделаем несколько важных замечаний относительно последней теоремы Паппа. В XVII веке благодаря работам французских математиков *Жерара Дезарга* (1593–1662) и *Блеза Паскаля* (1623–1662) начала быстро и энергично развиваться проективная геометрия. И тогда просто невозможно было не упомянуть о *Паппе Александрийском*. Действительно, давайте рассмотрим содержание *теоремы Дезарга*: если треугольники ABC и DEF расположены на одной плоскости таким образом, что прямые AD, BE и CF проходят через одну точку K (рис. 9), то точки L, N, T пересечения соответствующих сторон треугольников (AB и DE; CB и FE; AC и DF) лежат на одной прямой. Разве эта теорема (иногда ее называют *конфигурацией Дезарга*) не напоминает *теорему Паппа*?

Теорема Паскаля утверждает: *точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, который вписано в коническое сечение, лежат на одной прямой.*

Т.е., если на коническом сечении взять шесть точек: C, B, A, D, E, F, то $K = AE \cap BD$; $N = AF \cap CD$ и $T = BF \cap CE$ принадлежат одной прямой l (рис. 10). В случае, когда коническое сечение вырождается в пару прямых, мы приходим к *теореме Паппа*.

Рис. 10



Таким образом, *теорема Паскаля* является обобщением *теоремы Паппа*. А *рис. 7 теоремы Паппа* иногда называют *конфигурацией Паппа-Паскаля*.

Удивительно: приблизительно 1300 лет понадобилось человечеству, чтобы воспользоваться идеями Паппа Александрийского!..

Сегодня его считают отцом проективной геометрии!..

7. Две теоремы Паппа: о площадях поверхностей и объемах тел вращения (теоремы Паппа-Гульдина).

Интересно, что ни Папп, ни швейцарский математик Поль Гульдин (1577–1643), который, скорее всего, воспользовался работами Паппа, не предоставляют четкого доказательства этих теорем. Их первое доказательство появляется у итальянского геометра Бонавентура Кавальере (доказательство осуществляется, говоря сегодняшними терминами, с помощью интегралов).

Но сами теоремы достаточно важные. Вот они.

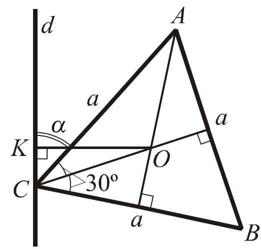
$1^{я}$ теорема Паппа-Гульдина. *Если линия длиной l лежит в одной плоскости с осью d и по одну сторону от нее, то площадь поверхности, которая образуется при вращении этой линии вокруг d, исчисляется по формуле:* $\boxed{S_{пов} = 2pRl}$, *где R – расстояние от центра массы линии к оси d.*

$2^{я}$ теорема Паппа-Гульдина. *Объем тела, образованного вращением плоской фигуры с площадью S вокруг оси d (d лежит в плоскости* *фигуры и не пересекает ее) находится по формуле:* $\boxed{V = 2pRS}$, *где опять-таки* R *– расстояние от центра массы фигуры к оси* d *.*

8. Применение теорем Паппа-Гульдина.

Задача а). *Правильный треугольник со стороной* a *вращается вокруг оси, проходящей вне его плоскости через его вершину под углом* a *к прилежащей стороне. Определить площадь поверхности тела вращения.*

Рис. 11



Решение. Очевидно, что длина линии вращения $l = 3a$, а центр равностороннего треугольника является центром масс вращающейся линии. Из ΔCOK найдем $OK = R$ (рис. 11). $OK = CO \cdot \sin(30° + a)$.

По *1ой теореме Паппа-Гульдина:*

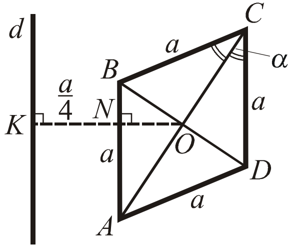
$$S_{\text{пов}} = 2pRL = 2p \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \sin(30° + a) \cdot 3a \text{, или}$$

$$S_{\text{пов}} = 2\sqrt{3}pa^2 \sin(30° + a).$$

Задача б). *Ромб со стороной а и острым углом α вращается вокруг оси, проходящей вне ромба параллельно к стороне на расстоянии* $\frac{a}{4}$ *от нее. Вычислить объем тела вращения.*

Решение. Площадь ромба $S = a^2 \sin a$. Точка O пересечения его диагоналей AC и BD (рис. 12) является центром масс ромба. Для того, чтобы воспользоваться *2ой теоремой Паппа-Гульдина*, необходимо найти $OK = R$.

Рис. 12



$OK = ON + NK$ где $NK = \frac{a}{4}$ – по условию.

$\frac{1}{2} AB \cdot ON = S_{AOB} = \frac{S}{4} = \frac{a^2 \cdot \sin a}{4}$. Итак,

$\frac{1}{2} a \cdot ON = \frac{a^2 \sin a}{4}$, откуда $ON = \frac{a \sin a}{2}$. Тогда

$OK = R = \frac{a}{4} + \frac{a \sin a}{2} = \frac{a}{4}(1 + 2\sin a)$. Имеем:

$$V = 2pR \cdot S = 2p \cdot \frac{a}{4}(1 + 2\sin a) \cdot a^2 \sin a \ . \ \boxed{V = \frac{pa^3}{2} \sin a\,(1 + 2\sin a)}.$$

Заметим, что обычным способом обе задачи решаются довольно громоздко.

9. Теорема Паппа о центре масс. *На сторонах BC, AC, AB треугольника ABC взяты соответственно точки D, E ,F – такие, что* $\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}$ *(рис.13). Докажите, что центры масс (точки пересечения медиан) треугольников ABC и DEF совпадают.*

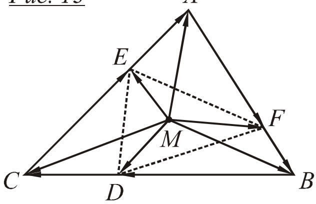


Рис. 13

Решение. Отметим, что Папп доказывает эту теорему с помощью *теоремы Менелая*. Мы же сделаем это с помощью современного языка векторов, который кажется более эффективным и уместным.

Пусть M – точка пересечения медиан в треугольнике ABC, или его центр масс. Известно, что для центра масс выполняется векторное равенство: $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{0}$. Если мы докажем равенство $\overline{MD}+\overline{ME}+\overline{MF}=\overline{0}$, то это будет означать, что точка M является центром масс и в треугольнике DEF. Поскольку по условию $\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}$, то нетрудно показать, что и $\frac{BD}{BC}=\frac{CE}{CA}=\frac{AF}{AB}$. Пусть эти отношения равняются некоторому числу k. Тогда, учитывая сонаправленность соответствующих векторов, имеем: $\frac{\overline{BD}}{\overline{\overline{BC}}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{\overline{CA}}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{\overline{AB}}}=k\ \left(0<k<1\right)$. По правилу сложения векторов соответственно для треугольников MBD, MCE и MAF получим:

$$\overline{MD}=\overline{MB}+\overline{BD}=\overline{MB}+k\cdot\overline{BC} \qquad (1);$$

$$\overline{ME}=\overline{MC}+\overline{CE}=\overline{MC}+k\cdot\overline{CA} \qquad (2);$$

$$\overline{MF}=\overline{MA}+\overline{AF}=\overline{MA}+k\cdot\overline{AB} \qquad (3).$$

Или, после сложения левых и правых частей равенств (1), (2), (3):
$\overline{MD}+\overline{ME}+\overline{MF}=\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}+k\left(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}\right)$. Но $\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}=\overline{0}$ (замкнутый контур). Таким образом, $\overline{MD}+\overline{ME}+\overline{MF}=\overline{0}$ и точка M также является центром масс в треугольнике DEF.

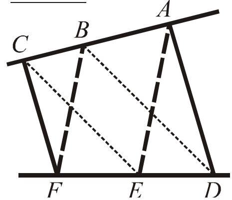
Кажется, в нашем разговоре довольно убедительно было показано, какой выдающийся вклад в развитие геометрии сделал *Папп Александрийский*. Если это так, то цель достигнута!

Остается предложить несколько задач для самостоятельного решения.

Задача 1. Построить ΔABC по $b+c$; l_a; $B-C$.

Задача 2. Построить ΔABC по A, l_a, m_a (m_a – медиана к стороне a).

Рис. 14

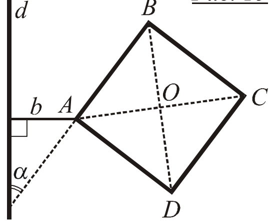


Задача 3. Точки A, B, C расположены на одной прямой, точки D, E, F – на другой, причем $AD \parallel CF$ и $AE \parallel BF$ (рис. 14). Докажите, что $BD \parallel CE$.

Задача 4. Квадрат $ABCD$ со стороной a вращается вокруг оси d, проходящей вне его на расстоянии b от вершины A и составляет угол a со стороной AB (рис. 15). Определить объем и площадь поверхности тела вращения.

Ответ. $S_{\text{пов}} = 4pa\left(a\sqrt{2}\sin(45^\circ + a) + 2b\right)$;
$V = pa^2\left(a\sqrt{2}\sin(45^\circ + a) + 2b\right)$.

Рис. 15



Задача 5. Прямоугольник вращается вокруг оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали. Определить объем и поверхность тела вращения, если диагональ прямоугольника равняется k, а угол между диагоналями равен j.

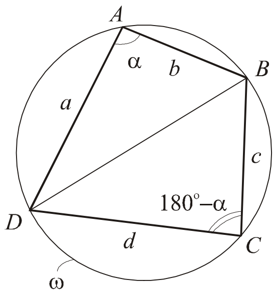
Ответ. $S_{\text{пов}} = 2pk^2\sqrt{2}\sin j \sin\left(45^\circ + \frac{j}{2}\right)$; $V = \frac{1}{2}pk^3\sin^2 j$.

Глава 4
Вписанный четырехугольник Брахмагупты

Хотя геометрические знания индийских математиков уступают алгебраическим, они достаточно важны и существенны. В VII веке н.э. в Индии появился важный астрономический трактат «Усовершенствованное учение Брахмы». Его автор – Брахмагупта (598–660 гг. н.э.) – наряду с обширным материалом по астрономии, арифметике, алгебре уделяет внимание вопросам геометрии. В частности, вслед за Птолемеем, он решает задачи, связанные с вписанным четырехугольником.

Задача 1. *(Брахмагупта) Площадь вписанного четырехугольника вычисляется по формуле:* $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ *, где a, b, c, d – его стороны, p – полупериметр. Докажите!*

рис.1



<u>Доказателство</u>. Пусть вписанный четырехугольник *ABCD* со сторонами *a, b, c, d* вписан в окружность ω *(рис.1)*.

Пусть также $A=a$ и $C=180°-a$. По теореме косинусов для треугольников ABD и BCD имеем:

$BD^2=a^2+b^2-2ab\cos a \quad (\Delta ABD)$

$BD^2=c^2+d^2+2cd\cos a \quad (\Delta BCD)$

Приравняв правые части, получим:

$$2\cos a\,(ab+cd)=a^2+b^2-c^2-d^2 \qquad (1)$$

Найдем площадь четырехугольника *ABCD*:

$$S=S_{ABD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}ab\sin a+\frac{1}{2}cd\sin(180°-a),$$

откуда $2(ab+cd)\sin a=4S$ *(2)*

Возведем обе части равенств *(1)* и *(2)* в квадрат и сложим:

$4(ab+cd)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+16S^2$,

или $16S^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$.

Дважды воспользовавшись формулой разности квадратов, получим необходимое:

$16S^2=(c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$;

$16S^2=2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-d)$,

или $S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$.

Задача 2. *Докажите справедливость формулы Герона в случае вырождения вписанного четырехугольника в треугольник.*

Доказательство. Пусть $d = 0$. Имеем треугольник *a, b, c,* около которого всегда можно описать окружность. Для него формула *задачи 1* приобретает вид: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Задача 3. *Найти отношение диагоналей четырехугольника, вписанного в окружность.*

Решение. Воспользуемся еще одной *формулой Брахмагупты* для ΔABC:

$bc = h_a \cdot 2R$

Ее справедливость следует из подобия треугольников AH_1B и ACD (*рис.2*).

рис.2

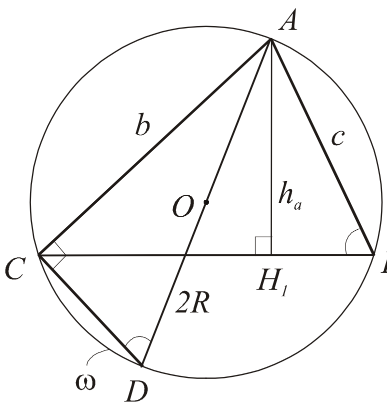
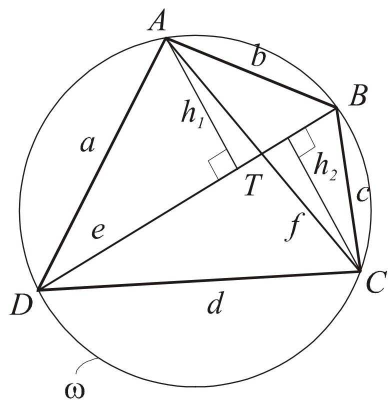


рис.3



Тогда по этой формуле (*рис.3*) имеем: $ab = h_1 \cdot 2R$. Домножим обе части последнего равенства на $BD = e$: $e \cdot ab = e \cdot h_1 \cdot 2R$, или $e \cdot ab = 4R \cdot S_{ABD}$ *(3)*

Аналогично для ΔBCD: $cd = h_2 \cdot 2R$; $e \cdot cd = e \cdot h_2 \cdot 2R$,

или $e \cdot cd = 4R \cdot S_{BCD}$ *(4)*

Сложив равенства *(3)* и *(4)*, получим:

$e(ab + cd) = 4RS$ *(5)*,

где $S = S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$.

Проделав такие же операции с треугольниками *ABC, ADC* и диагональю $AC = f$, получим: $f(bc + ad) = 4RS$ *(6)*

Остается разделить *(5)* на *(6)*: $\dfrac{e}{f} = \dfrac{bc + ad}{ab + cd}$

Задача 4. *(Брахмагупта) Стороны вписанного четырехугольника равны a, b, c, d. Найти его диагонали e и f.*

Решение. Согласно равенствам *(5)* и *(6)* *задачи 3*

$$e(ab+cd) = f(bc+ad)$$

Домножим обе части записанного равенства на e:

$$e^2(ab+cd) = ef(bc+ad).$$

Поскольку $ef = ac+bd$ *(теорема Птолемея)*, то

$$e^2 = \frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}$$

Аналогично получаем выражение для второй диагонали:

$$f^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+ad}.$$

Задача 5. *Постройте вписанный четырехугольник ABCD по его сторонам a, b, c, d.*

Решение. Для построения достаточно знать одну из диагоналей четырехугольника $ABCD$, например, $BD = e$ *(рис.3)*. Тогда треугольники ABD и BCD легко строятся по трем сторонам. По *задаче 4*

$$e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}}.$$

Остается показать, как построить отрезок e.

$$e = \sqrt{\frac{c+\frac{bd}{a}}{b+\frac{cd}{a}}\cdot b\left(c+\frac{ad}{b}\right)}.$$

Строим отрезки $\frac{bd}{a}$; $\frac{cd}{a}$; $\frac{ad}{b}$, воспользовавшись теоремой Фалеса.

Пусть также

$$c+\frac{bd}{a} = m;\ b+\frac{cd}{a} = n;\ c+\frac{ad}{b} = k.$$

Следовательно, нам необходимо построить отрезок $l = \sqrt{\frac{bm}{n}\cdot k}$

Затем строим отрезок $t = \frac{bm}{n}$.

После чего – уже сам отрезок $e=\sqrt{kt}$, построение которого также является тривиальной операцией.

Задача 6. Докажите справедливость формулы для площади произвольного выпуклого четырехугольника ABCD:

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cdot\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

<u>*Доказательство*</u>. Оно совершенно аналогично доказательству *задачи 1* – с той лишь разницей, что в данной *задаче 6* $A+C\neq 180^\circ$. Очевидно, что в таком случае *задачу 1* можно рассматривать как частный случай *задачи 6*.

Задача 7. *Докажите, что площадь описанного четырехугольника ABCD со сторонами a, b, c, d находится по формуле:*

$$S^2=abcd\cdot\sin^2\frac{A+C}{2}.$$

<u>*Доказательство*</u>. Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны:

$$a+c=b+d=p.$$

Тогда

$$p-a=c;\ \ p-b=d;\ \ p-c=a;\ \ p-d=b.$$

Формула *задачи 6* принимает вид

$$S^2=abcd-abcd\cdot\cos^2\frac{A+C}{2}=abcd\left(1-\cos^2\frac{A+C}{2}\right)$$

или

$$S^2=abcd\cdot\sin^2\frac{A+C}{2}.$$

Задача 8. *Если четырехугольник ABCD одновременно является вписанным и описанным,* $S=\sqrt{abcd}$ *. Докажите!*

<u>*Доказательство*</u>. Воспользуемся формулой *задачи 7* с учетом того, что в *задаче 8* $\frac{A+C}{2}=90^\circ$.

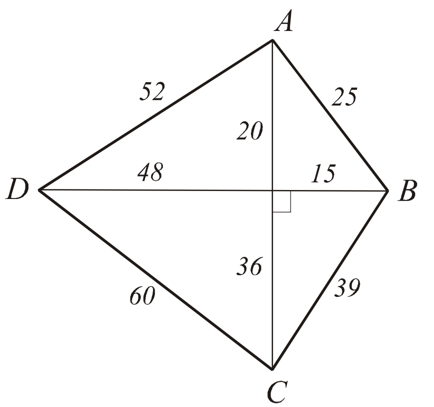
В поле пристального внимания Брахмагупты были и *вписанные четырехугольники с перпендикулярными диагоналями*. Он предложил правило для получения прямоугольных треугольников с целыми сторонами:

$$m\cdot n;\ \ \frac{m^2-n^2}{2};\ \ \frac{m^2+n^2}{2}$$

Например, при $m=3;\ \ n=1$ получаем знаменитый «египетский» треугольник.

Составляя треугольники такого вида, он получает вписанные четырехугольники с перпендикулярными диагоналями. Один из возможных вариантов показан на *рис.4*.

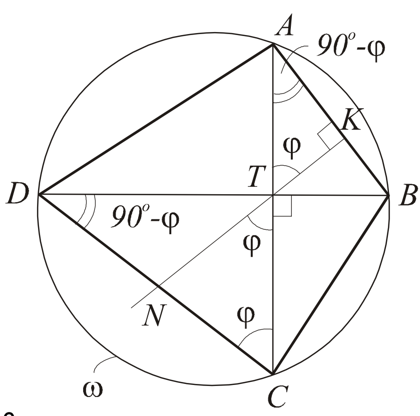
рис.4



Предложим несколько задач на *вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями*.

Задача 9. *(Брахмагупта) В окружность ω вписан четырехугольник ABCD с перпендикулярными диагоналями, которые пересекаются в точке T. Докажите, что прямая из T, проведенная перпендикулярно к любой из сторон, делит противоположную сторону пополам.*

рис.5



Доказательство. Пусть $TK \perp AB$ и прямая KT пересекает CD в точке N (*рис.5*).

Покажем, что $DN = NC$.

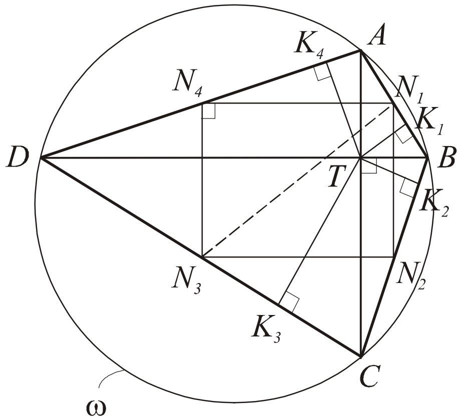
Пусть $\angle ATK = \angle CTN = f$.

Тогда $\angle TAK = 90° - f$ из ΔDTC.

$\angle BDC = \angle BAC = 90° - f$ (вписанные, опираются на одну дугу в окружности ω). Нетрудно сосчитать, что $\angle DCT = f$. Таким образом, $TN = DN$ и $TN = CN$, то есть прямая KT делит сторону CD пополам.

Задача 10. *Точка T пересечения диагоналей вписанного четырехугольника с перпендикулярными диагоналями спроектирована на стороны. Получены точки K_1; K_2; K_3; K_4. При этом N_1; N_2; N_3; N_4 – середины соответствующих сторон этого четырехугольника (рис.6). Докажите, что 8 указанных точек принадлежат одной окружности.*

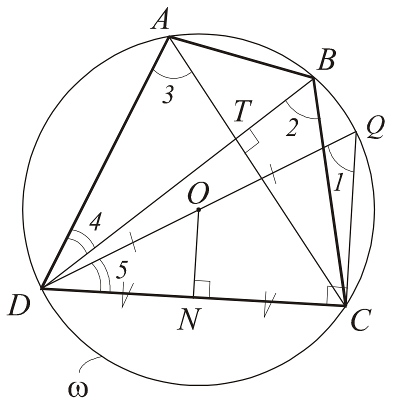
рис.6



<u>*Доказательство*</u>. Очевидно, $N_1N_2N_3N_4$ – прямоугольник ($N_1N_2 \parallel AC$ и $N_2N_3 \parallel BD$). Его диагонали N_1N_3 и N_2N_4 – диаметры описанной около него окружности. Точка K_1 принадлежит этой окружности, поскольку $K_1 - T - N_3$ – одна прямая *(Задача 9)* и $\angle N_1K_1N_3 = 90°$. Аналогично показывается, что точки K_2; K_3; K_4 также лежат на этой окружности.

Задача 11. *O – центр окружности ω, в которую вписан четырехугольник ABCD с перпендикулярными диагоналями.* $ON \perp CD$ *(рис.7). Докажите, что* $ON \perp \frac{1}{2}AB$.

рис.7



<u>*Доказательство*</u>. Проведем диаметр *DQ*. Очевидно, $ON = \frac{1}{2}QC$ – как средняя линия в ΔDQC. Пусть $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = b$ (вписанные, опираются на $\cup CD$ в окружности ω). Тогда $\angle 4 = \angle 5 = 90° - b$. Значит, $\cup QC = \cup AB$. Равны и стягивающие их хорды: $AB = QC$. Поскольку $ON = \frac{1}{2}QC$, то $ON = \frac{1}{2}AB$.

Прежде, чем перейти к задачам для самостоятельного решения, еще раз отметим: круг математических интересов Брахмагупты был необычайно широк. И геометрия в этом круге занимала пусть не слишком большое, но весьма достойное место.

Задача 12. Прямые, соединяющие середины дуг, стягиваемых противоположными сторонами вписанного четырехугольника, взаимно перпендикулярны. Докажите.

Задача 13. Докажите, что во вписанном четырехугольнике биссектриса внутреннего угла пересекается с внешней биссектрисой противоположного угла на окружности.

Задача 14. Докажите справедливость формулы для площади S четырехугольника со сторонами $a, b, c, d,$ вписанного в окружность радиуса R:

$$S = \frac{\sqrt{(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd)}}{4R}$$

Задача 15. *(Брахмагупта)* Зная высоту свечи и высоту вертикального шеста, а также расстояние между ними, найти длину тени шеста.

Задача 16. Четырехугольник вписан и описан. Докажите, что его площадь может быть найдена по формуле: $S = 4Rr^2(\frac{1}{e}+\frac{1}{f})$, где R, r соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей четырехугольника, e, f – его диагонали.

Задача 17. Если четырехугольник является вписанным и описанным, то прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, перпендикулярны. Докажите.

Задача 18. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника взаимно перпендикулярны. Расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей равно q. Найдите расстояние между серединами диагоналей.

Задача 19. $ABCD$ – четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, вписанный в окружность ω с центром O. Докажите, что ломаная $A-O-C$ делит площадь $ABCD$ пополам.

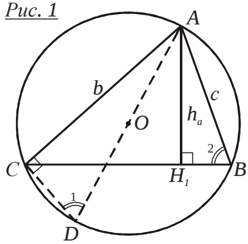
Задача 20. Из всех четырехугольников с фиксированными длинами сторон вписанный четырехугольник имеет наибольшую площадь. Докажите!

Глава 5
Помогает формула Брахмагупты

Выдающийся математик и астроном Индии Брахмагупта (~598–660 гг. н.э.) оставил человечеству трактат «Обзор системы Брамы», который состоит из 20 книг. Большая часть его произведения посвящена астрономии, но в 12-й книге рассматриваются арифметические задачи и некоторые вопросы геометрии. Одна из геометрических задач, несомненно, заслуживает отдельного и особого внимания. Вот она: ***«Произведение двух сторон треугольника, деленное на высоту, проведенную к третьей стороне, равняется диаметру описанной окружности»*** Докажите!

В обозначениях *рис.1* эта задача имеет вид формулы: $2R = \dfrac{bc}{h_a}$

Рис. 1



Доказательство. Проведем диаметр AD. Тогда $\angle ACD = 90^\circ$ (вписанный, опирается на диаметр). Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ (также вписанные, опираются на одну дугу), то $\Delta ACD \sim \Delta AH_1B$.

Отсюда $\dfrac{b}{2R} = \dfrac{h_a}{c}$, или $2R = \dfrac{bc}{h_a}$.

Такая несложная в доказательстве формула!.. Но настолько *широко* ее применение в геометрических задачах в виде $h_a = \dfrac{bc}{2R}$, что, наверное, уместно подвести ее к ряду **теорем**!

Итак, попробуем обосновать наше заявление.

Задача 1. *Докажите, что* $h_a + h_b + h_c = \dfrac{ab + bc + ac}{2R}$.

Доказательство. Это непосредственно вытекает из формул:

$$h_a = \frac{bc}{2R}; \quad h_b = \frac{ac}{2R}; \quad h_c = \frac{ab}{2R}.$$

Задача 2. *Докажите справедливость формулы для произвольного треугольника ABC:*

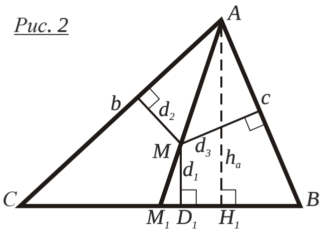
$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

Доказательство.

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{2R}{bc}+\frac{2R}{ac}+\frac{2R}{ab}=\frac{2R(a+b+c)}{abc}=\frac{4Rp}{abc}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}.$$

Задача 3. *Докажите, что сумма расстояний от точки пересечения медиан треугольника ABC к его сторонам равняется* $\frac{ab+bc+ac}{6R}$.

Рис. 2



Доказательство. Пусть d_1, d_2, d_3 – расстояния от центроида M к сторонам BC, AC и AB соответственно (рис. 2). Поскольку по свойству центроида $AM{:}MM_1$=2:1, то $d_1=\frac{1}{3}h_a$ ($\Delta MM_1D_1\sim\Delta AM_1H_1$), или $d_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{bc}{2R}=\frac{bc}{6R}$. Аналогично $d_2=\frac{ac}{6R}$ и $d_3=\frac{ab}{6R}$. Ведь $d_1+d_2+d_3=\frac{ab+bc+ac}{6R}$.

Задача 4. *Докажите формулу квадрата площади треугольника ABC:*

$$S^2=\frac{1}{2}Rh_ah_bh_c$$

Доказательство.

$$S^2=\left(\frac{abc}{4R}\right)^2=\frac{a^2b^2c^2}{16R^2}=\frac{1}{2}R\frac{ab}{2R}\cdot\frac{bc}{2R}\cdot\frac{ac}{2R}=\frac{1}{2}Rh_ah_bh_c.$$

Задача 5. *Если в ΔABC $a \ge b$, то и $a+h_a \ge b+h_b$. Докажите!*

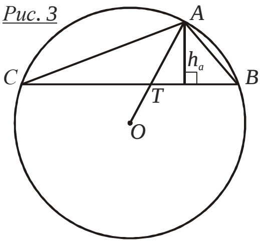
Доказательство. Покажем, что разность $(a+h_a)-(b+h_b)$ неотрицательна.

Действительно, $(a-b)+(h_a-h_b)=(a-b)+\left(\frac{bc}{2R}-\frac{ac}{2R}\right)=(a-b)+\frac{c}{2R}(b-a)=$

$=(a-b)\left(1-\frac{c}{2R}\right)=\frac{a-b}{2R}(2R-c)\ge 0$ (поскольку $\frac{a-b}{2R}\ge 0$ и $2R-c\ge 0$ – диаметр не меньше хорды).

Задача 6. *Докажите, что из отрезков $a+h_a$, $b+h_b$, $c+h_c$ всегда можно составить треугольник.*

Рис. 3

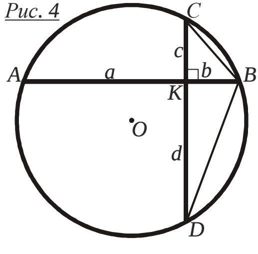


Доказательство. Пусть $a \ge b \ge c$. Тогда $h_a \le h_b \le h_c$ (большей стороне отвечает меньшая высота). По задаче 5 $a+h_a \ge b+h_b \ge c+h_c$. Остается доказать, что даже большая сторона будущего треугольника будет меньше суммы двух других, т.е. $a+h_a<(b+h_b)+(c+h_c)$. Но $a<b+c$ (неравенство треугольника для ΔABC), и $h_a<h_b+h_c$ (h_a – наименьшая из высот). Теперь становится очевидным, что $a+h_a<b+h_b+c+h_c$. Задача решена.

Задача 7. *В некотором треугольнике ABC выполняется равенство: $bc=2R^2$. Докажите, что в таком случае $A\le 90^\circ$.*

Доказательство. Согласно *формуле Брахмагупты* $bc=h_a\cdot 2R$. Тогда по условию $h_a\cdot 2R=2R^2$, или $h_a=R$. Покажем, что при $h_a=R$ угол A не превышает 90º. Пусть A>90º и центр O описанной окружности находится вне ΔABC (рис. 3). Если радиус AO пересекает BC в точке T, то $AT\ge h_a$ (гипотенуза не меньше катета). Поскольку $AO>AT$, то соответственно, и $AO=R>h_a$. А это противоречит условию $h_a=R$. Таким образом, $A\le 90^\circ$.

Рис. 4



Задача 8. *Хорды AB и CD окружности радиуса R перпендикулярны и делятся точкой пересечения K на отрезки a, b, c, d (рис. 4). Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2=4R^2$. (Архимед)*

Доказательство. Очевидно, что $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$ (из прямоугольного ΔBKC), а $BD = \sqrt{b^2 + d^2}$ – из прямоугольного ΔBKD. Поскольку отрезок $BK=b$ является высотой в треугольнике CBD, то по формуле *Брахмагупты* имеем:

$$BK = \frac{BC \cdot BD}{2R}, \text{ или } b = \frac{\sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2}}{2R},$$

откуда $b^2 \cdot 4R^2 = b^4 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2$, или $4R^2 = b^2 + c^2 + d^2 + \dfrac{c^2d^2}{b^2}$.

Но по теореме *о произведении отрезков хорд* $ab = cd$; $a = \dfrac{cd}{b}$ и $a^2 = \dfrac{c^2d^2}{b^2}$.

Итак, $4R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, что и надо было доказать.

Задача 9. *I – центр вписанной окружности треугольника ABC. I_a – центр вневписанной окружности, которая касается BC и продолжений сторон AC и AB. Докажите справедливость формулы:*

$$R = \frac{AI \cdot AI_a}{2h_a}$$

Доказательство. Поскольку $I_aK = I_aT = r_a$, то центр I_a принадлежит прямой, которая содержит внутреннюю биссектрису угла A (рис. 5). Поскольку $I_aK = I_aN$, то I_a принадлежит внешней биссектрисе угла C. Тогда $\angle ICI_a = 90°$ (угол между биссектрисами смежных углов). $\angle CII_a = j = \dfrac{A + C}{2}$ (внешний для ΔAIC). Итак, $\angle CI_aI = 90° - \dfrac{A + C}{2} = \dfrac{B}{2}$. Таким образом, треугольники AI_aC и ABI имеют по 2 равные угла $\left(\dfrac{A}{2} \text{ и } \dfrac{B}{2}\right)$, т.е. они подобны. Итак,

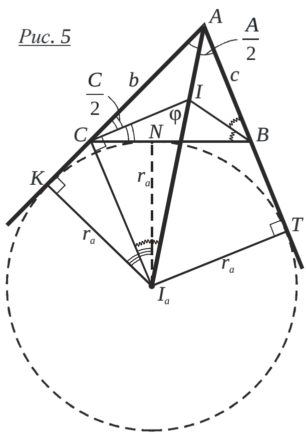


Рис. 5

$\dfrac{AI}{b} = \dfrac{c}{AI_a}$, или $AI \cdot AI_a = bc$. Воспользовавшись *формулой Брахмагупты*, получим: $2R = \dfrac{bc}{h_a} = \dfrac{AI \cdot AI_a}{h_a}$, или $R = \dfrac{AI \cdot AI_a}{2h_a}$.

Задача 10. *Что больше: p^2 или $h_a h_b + h_b h_c + h_a h_c$?*

<u>*Решение*</u>. $h_a h_b + h_b h_c + h_a h_c = \dfrac{abc(a+b+c)}{4R^2} = \dfrac{S(a+b+c)}{R} = \dfrac{2pS}{R} = \dfrac{2p^2 r}{R}$.

Теперь нетрудно сравнить p^2 и $\dfrac{2p^2 r}{R}$, или R и $2r$. Поскольку в любом треугольнике $R \geq 2r$ (известное неравенство, следствие из формулы Эйлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$), то и $p^2 \geq h_a h_b + h_b h_c + h_a h_c$.

Знак равенства имеет место в равностороннем треугольнике.

Задача 11. *Докажите, что $h_a + h_b + h_c \leq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$.*

<u>*Доказательство*</u>. По формуле *Брахмагупты* $h_a + h_b + h_c = \dfrac{ab + bc + ac}{2R}$.

Но $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$ (знаменитое неравенство «трех квадратов»).
Итак, необходимое неравенство доказано!

Задача 12. *Докажите неравенство: $h_a + h_b + h_c \geq 9r$.*

<u>*Доказательство*</u>. Поскольку $h_a + h_b + h_c = \dfrac{ab + bc + ac}{2R}$, то необходимо доказать, что $\dfrac{ab + bc + ac}{2R} \geq 9r$, или $ab + bc + ac \geq 18Rr$.

Но $18Rr = 18\dfrac{abc}{4S} \cdot \dfrac{S}{p} = \dfrac{9abc}{2p} = \dfrac{9abc}{a+b+c}$.

Остается доказать, что $ab + bc + ac \geq \dfrac{9abc}{a+b+c}$ или

$(a+b+c)(ab+bc+ac) \geq 9abc$, или $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$.

Последнее неравенство довольно известно! Оно доказывается раскрытием скобок – с учетом того факта, что сумма обратных положительных величин не меньше, чем 2.

Задача 13. *Докажите справедливость неравенства для площади треугольника:* $S > 2\sqrt{Rr^3}$.

Доказательство. Известно, что каждая из высот треугольника большае $2r$, т.е. $h_a > 2r$; $h_b > 2r$; $h_c > 2r$. Согласно *формуле Брахмагупты* $bc = h_a \cdot 2R > 4Rr$. Аналогично $ac > 4Rr$ и $ab > 4Rr$. Перемножив левые и правые части последних трех неравенств, получим: $a^2b^2c^2 > 64R^3r^3$, или $abc > 8R\sqrt{Rr^3}$. Поскольку $\frac{abc}{4R} = S$, то $S > 2\sqrt{Rr^3}$, что и необходимо было доказать.

Предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

Задача 14. Докажите, что в произвольном ΔABC

$$(a-h_b)(b-h_c)(c-h_a) = (a-h_c)(b-h_a)(c-h_b) .$$

Задача 15. С помощью *формулы Брахмагупты* постройте отрезок $x = \frac{bc}{a}$,

где b, c, a – данные отрезки.

Задача 16. Докажите справедливость формул для площади треугольника ABC:

а) $S = 2R^2 \frac{h_a h_b h_c}{abc}$;

б) $S = \frac{abc(h_a + h_b + h_c)}{2(ab+bc+ac)}$.

Задача 17. Докажите следующие неравенства:

а) $ab+bc+ac \geq 18Rr$;

б) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 36r^2$;

в) $h_a + h_b + h_c \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{R}$.

Глава 6
Геометрические задачи Бхаскары

Замечательный математик Индии Бхаскара (1114 – ~1178) оставил человечеству трактат «Венец науки», состоящий из четырех частей. В первой части – «Лилавати», посвященной своей дочери, – он рассматривает в основном задачи арифметики. Вместе с тем в этой части Бхаскара решает и ряд геометрических задач. Вторая часть – «Биджаганита» – посвящается алгебре, хотя и в ней некоторым вопросам геометрии уделено внимание. Третья и четвертая части трактата полностью связаны с астрономией.

Уровень математических знаний Бхаскары очень высок. Его тригонометрические таблицы синусов выполнены с точностью до семи знаков после запятой. Он решает задачи на бассейны (совместную работу) и смеси, извлекает квадратные и кубические корни. Пользуется формулой «сложного радикала»:

$$a+\sqrt{b}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Разрабатывает методы решения диофантовых уравнений (первой и второй степени) и даже рассматривает некоторые вопросы комбинаторики.
Нас же будет интересовать в первую очередь геометрический материал, изложенный в труде «Венец науки».
Итак, *геометрические задачи Бхаскары*.

***Задача 1.** AB и CD – две палки бамбука, вертикально воткнутые в землю, причем $AB=m$, $CD=n$ (рис.1). Найдите длину перпендикуляра, проведенного к земле, из точки K пересечения AD и BC.*

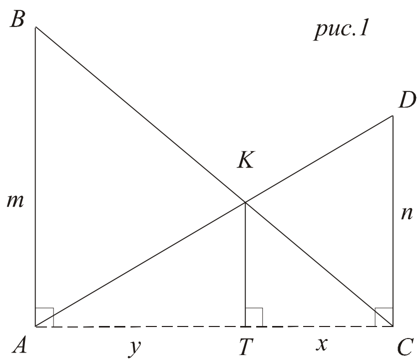


рис.1

<u>*Решение*</u>. Пусть KT – искомый перпендикуляр. Пусть также $TC=x$, $AT=y$. Из подобия треугольников TKC и ABC:

$$\frac{KT}{m}=\frac{x}{x+y} \qquad (1)$$

Из подобия треугольников AKT и ADC:

$$\frac{KT}{n}=\frac{y}{x+y} \qquad (2)$$

Сложив левые и правые части равенств *(1)* и *(2)*, получим: $\frac{KT}{m}+\frac{KT}{n}=1$,

откуда $KT=\frac{mn}{m+n}$.

(Заметим в скобках, что сегодня эта задача – одна из наиболее популярных задач на трапецию).

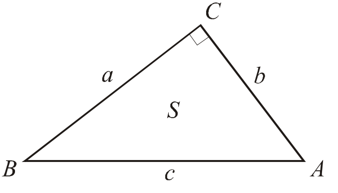
Задача 2. *Найдите стороны прямоугольного треугольника, в котором известны площадь S и периметр 2p.*

Решение. Пусть в ΔABC угол C – прямой, то есть a и b – катеты, c – гипотенуза *(рис.2)*.

Согласно условию

$$\begin{cases} a+b+c=2p, \\ ab=2S. \end{cases}$$

рис.2



Кроме того, в прямоугольном треугольнике выполняется равенство $a+b-c=2r$ (r – радиус вписанной окружности). А для любого треугольника $r=\frac{S}{p}$.

Тогда имеем:

$$\begin{cases} a+b+c=2p, & (3) \\ a+b-c=\frac{2S}{p}. & (4) \end{cases}$$

Вычтем равенство *(4)* из равенства *(3)*: $2c=2p-\frac{2S}{p}$, откуда $c=\frac{p^2-S}{p}$.

Сложив *(3)* и *(4)*, получим:

$2(a+b)=2p+\frac{2S}{p}$, или $a+b=\frac{p^2+S}{p}$.

Кроме того, $ab=2S$

Решая систему из последних двух уравнений, найдем катеты ΔABC:

$$a=\frac{p^2+S+\sqrt{p^4-6p^2S+S^2}}{2p};$$

$$b=\frac{p^2+S-\sqrt{p^4-6p^2S+S^2}}{2p}.$$

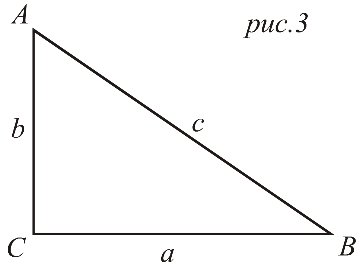


рис.3

Задача 3. *Найти все прямоугольные треугольники, в которых гипотенуза выражается тем же числом, что и площадь.*

Решение. Согласно *рис.3* по теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$.

Нетрудно заметить, что для положительных чисел *x, m, n* справедливо равенство *(m>n)*:

$$((m^2+n^2)x)^2 = ((m^2-n^2)x)^2 + (2mnx)^2 \qquad (1)$$

Тогда роли гипотенузы *c* и катетов *a* и *b* могут выполнять соответственно указанные в равенстве *(1)* величины:

$c = (m^2+n^2)x$; $a = (m^2-n^2)x$; $b = 2mnx$.

По условию $c = \frac{1}{2}ab$.

Следовательно, $(m^2+n^2)x = \frac{1}{2}(m^2-n^2)x \cdot 2mnx$, откуда $x = \dfrac{m^2+n^2}{mn(m^2-n^2)}$.

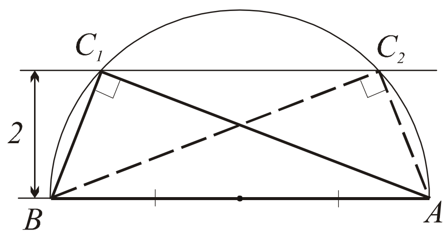
Таким образом,

$$c = (m^2+n^2)x = \frac{(m^2+n^2)^2}{mn(m^2-n^2)};$$

$$a = (m^2-n^2)x = \frac{m^2+n^2}{mn};$$

$$b = 2mnx = \frac{2(m^2+n^2)}{m^2-n^2}$$

рис.4



Например, при $m=2$; $n=1$ находим:

$a = \frac{5}{2}$; $b = \frac{10}{3}$; $c = \frac{25}{6}$.

При этом, $S = \frac{1}{2}ab = \frac{25}{6}$.

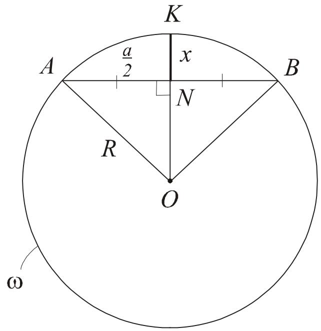
Замечание. Поскольку справедлива формула для прямоугольного треугольника: $ch = ab$, то, согласно условию, $c = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$ и $h = 2$.

Значит, прямоугольный треугольник с высотой $h = 2$, про[illegible]ной к гипотенузе, и гипотенузой $c \geq 4$ удовлетворяет указанным в зада[illegible]ребованиям. На *рис.4* показан пример построения такого прямоугольного треугольника.

Задача 4. Найти высоту сегмента, зная хорду и радиус круга.

<u>*Решение*</u>. Пусть дана окружность ω с центром *O* радиуса *R* и в ней хорда $AB = a$ *(рис.5)*. Необходимо найти $KN = x$ – высоту сегмента.

рис.5



Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. Поэтому

$$AN = NB = \frac{a}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника *AON* найдем *ON*.

$$ON = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Тогда

$$KN = x = R - ON = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$$

Задача 5. Найти отношение объема шара к площади его поверхности.

<u>*Решение*</u>. Будем рассматривать шар как совокупность иглоподобных пирамид, вершины которых находятся в центре шара, а основания – на его поверхности. Тогда, чтобы найти объем шара, следует 1/3 его поверхности умножить на радиус (т.к. радиус является высотой во всех иглоподобных пирамидах).

Следовательно, $V_ш = \frac{1}{3} S_п \cdot R$, откуда $\frac{V_ш}{S_п} = \frac{R}{3}$.

<u>*Замечание*</u>. По современным формулам $\frac{V_ш}{S_п} = \frac{\frac{4}{3} p R^3}{4p R^2} = \frac{R}{3}$. Что касается числа π, то Бхаскара рекомендовал брать $\frac{22}{7}$ (число Архимеда) или же более точное $\frac{3927}{1250}$. Последнее было получено последовательным вписыванием в круг правильных $6^и$, $12^и$, $24^х$, $48^и$, $96^и$, $192^х$, $384^х$ -угольников.

Труд Бхаскары «Венок науки» содержит также два доказательства теоремы Пифагора. Одно из них использует подобие и является достаточно традиционным. А вот второму доказательству, вернее его *педагогической идее*, будет посвящена вся следующая глава.

Глава 7
«Смотри!» – педагогическое открытие Бхаскары

В труде Бхаскары (1114 – ~1178) «Венец науки» среди геометрического материала встречаем два доказательства теоремы Пифагора. Одно из них – обычное, с помощью подобия. Зато второе – просто блестящее!..

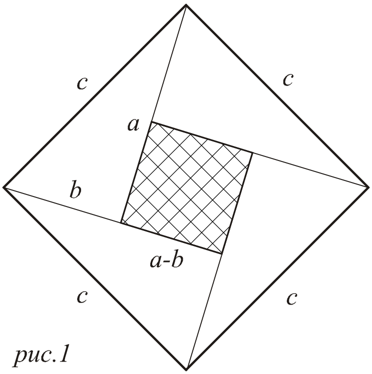


рис.1

Под рисунком *(рис.1)* Бхаскара делает одну-единственную подпись: «Смотри!» А мы сами должны сообразить, что большой квадрат площади c^2 состоит из маленького квадрата площади $(a-b)^2$ и четырех равных прямоугольных треугольников площади $\frac{1}{2}ab$ каждый. Откуда $c^2 = a^2 + b^2$. В таком подходе Бхаскары к задаче есть все, что любимо геометрией: лаконичность, наглядность, возможность домысливать, изобретать, испытывать Радость открытия!

Бхаскара блестяще вторит Архимеду, написавшему в письме другу, что он не считает нужным показывать решение задачи полностью – дабы не лишать его, друга, удовольствия самому прийти к этому решению.

А может быть, на эту мысль Бхаскару натолкнуло доказательство Евклидом в I книге «Начал» теоремы о сумме углов треугольника *(рис.2)*. Действительно, нужны ли какие-либо комментарии, кроме «Смотри!»?

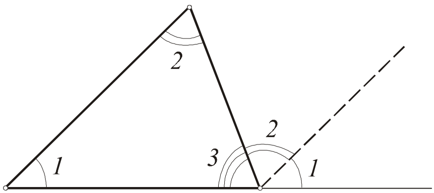


рис.2

Со времен Бхаскары многое изменилось, в том числе и в геометрии. В то же время педагогика слова «Смотри!» не только осталась, но и приобрела еще большую ценность, засияла новыми гранями. Предлагаемая серия задач призвана показать и доказать это.

Между рисунком *(а)* условия задачи и рисунком *(б)* с подписью «Смотрите!» может проходить от двух до пяти и более минут – в зависимости от возраста детей, подготовленности класса, целей урока. Решение задачи при рисунке *(а)* удается далеко не всем учащимся. В то же время рисунок *(б)* с подписью «Смотрите!», где проведена дополнительная линия, указаны равные отрезки и углы, – позволяет сделать задачу посильной для всех. А это ли не есть главная Педагогическая Задача урока?

Задача 1. *В треугольнике ABC высота AH_1 равна медиане BM_2 (рис.3а). Найдите величину угла CBM_2.*

Решение. Смотрите *рис.3б!* $x = 30°$.

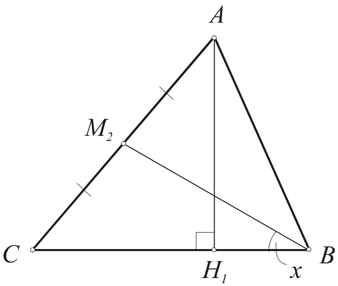


рис.3а

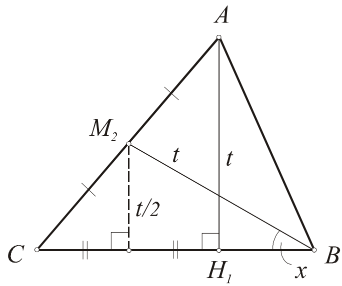


рис.3б

Задача 2. *AB, BC, CD – три неравные хорды окружности. K, N, T – соответственно их середины (рис.4а). Докажите равенство углов x и y.*

Решение. Смотрите *рис.4б!*

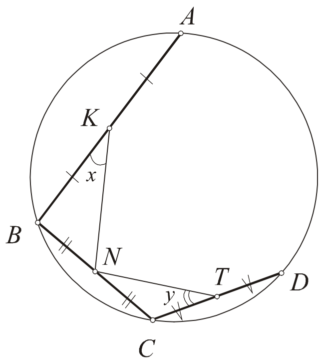


рис.4а

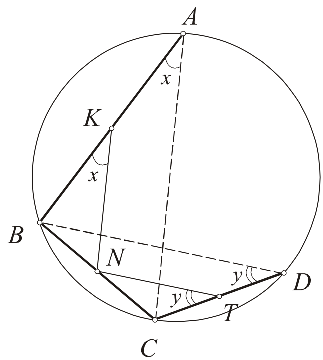


рис.4б

Задача 3. *В равнобедренном треугольнике ABC (AB = AC) проведена биссектриса BQ (рс.5а). Докажите, что* $BQ < 2CQ$ *.*

<u>*Решение*</u>. Смотрите *рис.5б!*

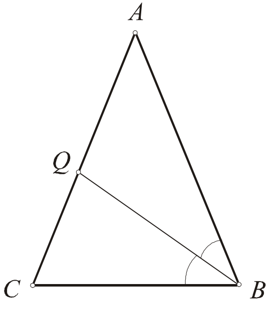


рис.5а

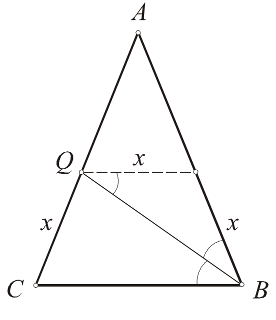


рис.5б

Задача 4. *L – основание биссектрисы угла A в треугольнике ABC. Луч LE проведен под углом к BC, равным A (рис.6а). Докажите, что* $LE = BL$ *.*

<u>*Решение*</u>. Смотрите *рис.6б!*

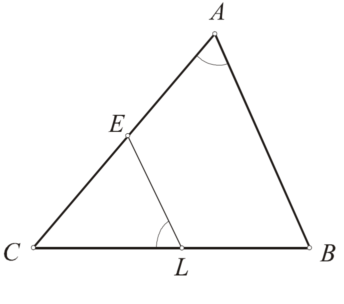


рис.6а

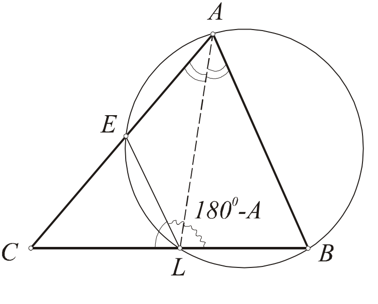


рис.6б

Следующие две задачи (*задачи 5* и *6*) можно найти в трудах более поздних (XVI столетие) комментаторов трактата Бхаскары.

Задача 5. *Выведите формулу для площади треугольника:* $S = \frac{1}{2} a h_a$ *(рис.7а).*

Решение. Смотрите *рис.7б!*

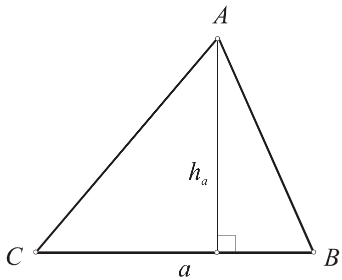


рис.7а

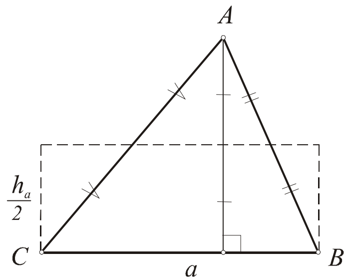


рис.7б

Задача 6. *Докажите, что площадь круга равна площади прямоугольника, одна сторона которого есть полуокружность, а другая – радиус.*

Решение. Смотрите *рис.8!*

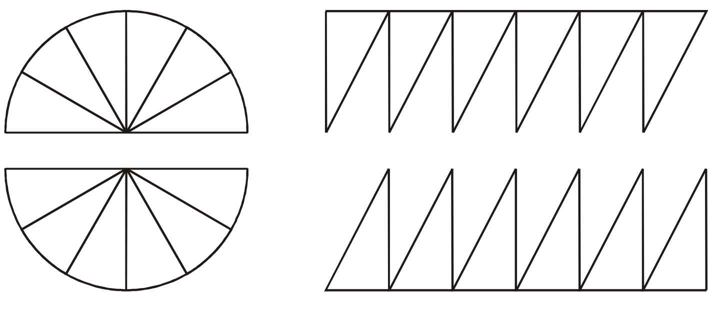


рис.8

Задача 7. *В треугольнике ABC угол A равен* 30° *. Докажите, что* $BC = R$ *(*R *– радиус описанной окружности треугольника ABC).*

<u>*Решение*</u>. Смотрите *рис.9!*

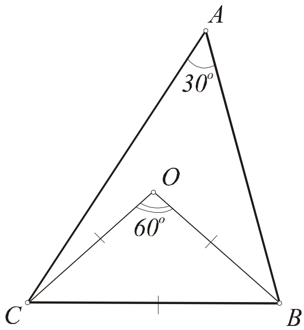


рис.9

Задача 8. *В треугольнике ABC через инцентр I проведен отрезок* $KN \parallel BC$ *(рис.10а). Докажите, что* $KN = BN + CK$ *.*

<u>*Решение*</u>. Смотрите *рис.10б!*

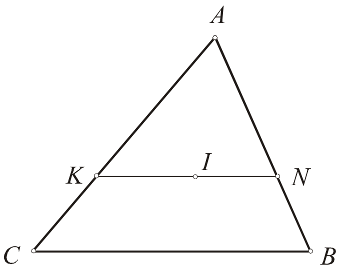


рис.10а

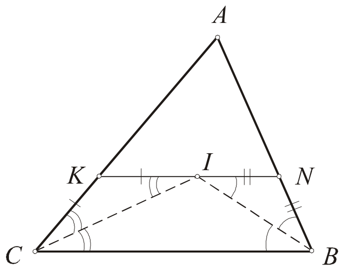


рис.10б

Задача 9. *Около треугольника ABC с указанным инцентром I описана окружность (рис.11а). Одной линейкой постройте центр окружности, описанной около ΔBIC.*

Решение. Смотрите *рис.11б!*

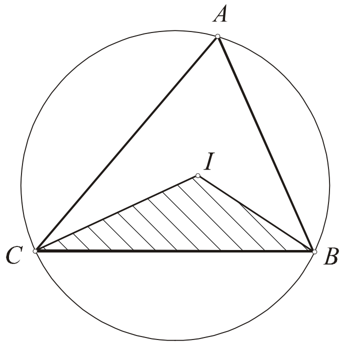


рис.11а

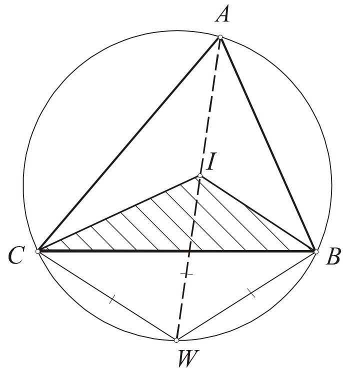


рис.11б

Задача 10. Окружности w и w_1 пересекаются в точках *A* и *B*. Через эти точки произвольно проведены секущие *EF* и *NT (рис.12а)*. Докажите, что $EN \parallel FT$.

Решение. Смотрите *рис.12б!*

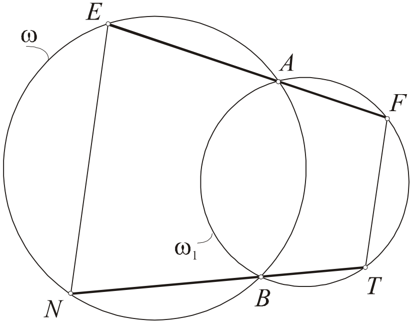


рис.12а

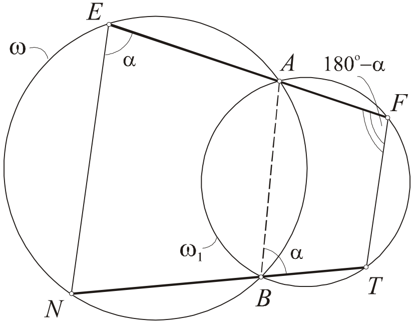


рис.12б

Задача 11. *M_1; M_2; M_3 – соответственно середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC (рис.13а). Докажите, что описанные окружности треугольников AM_2M_3; BM_1M_3; CM_1M_2 пересекаются в одной точке.*

Решение. Смотрите *рис.13б!*

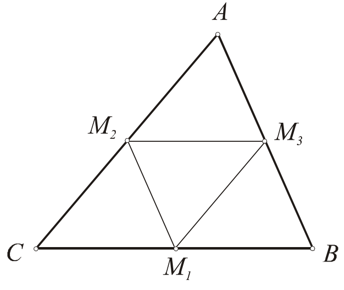


рис.13а

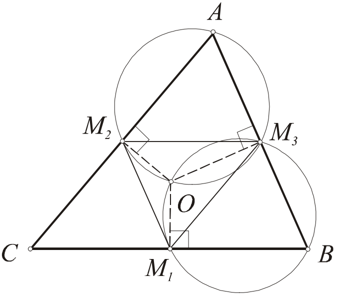


рис.13б

Задача 12. *Медианы BM_2 и CM_3 треугольника ABC пересекаются в точке M (рис.14а). Докажите, что $S_{BMC} = S_{AM_2MM_3}$.*

Решение. Смотрите *рис.14б!*

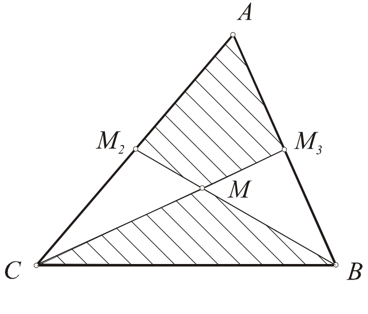


рис.14а

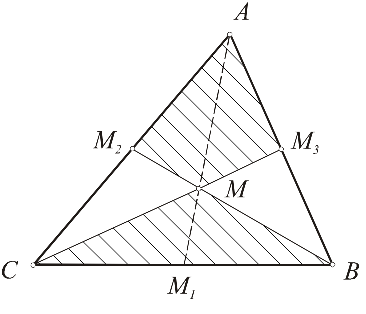


рис.14б

Задача 13. *Дан квадрат ABCD. KL и QT – препендикулярные отрезки с концами на противоположных сторонах квадрата (рис.15а). Докажите, что* $KL = QT$.

<u>*Решение*</u>**.** Смотрите *рис.15б!*

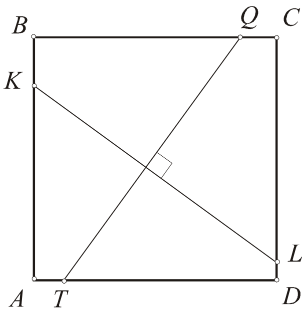


рис.15а

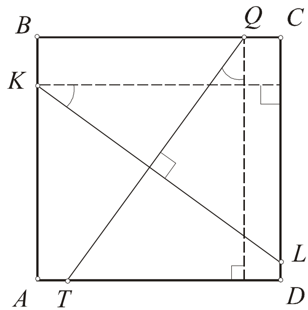


рис.15б

Задача 14. *Окружности* w *и* w_1 *пересекаются в точках A и B. KN – произвольная секущая (рис.16а). Докажите, что* $a + b = 180^\circ$.

<u>*Решение*</u>**.** Смотрите *рис.16б!*

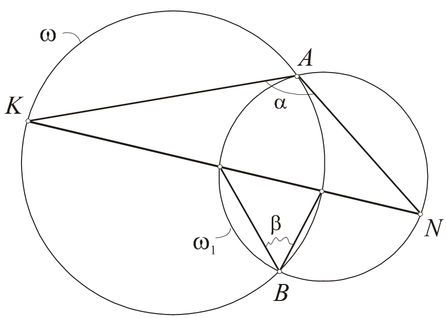


Рис.16а

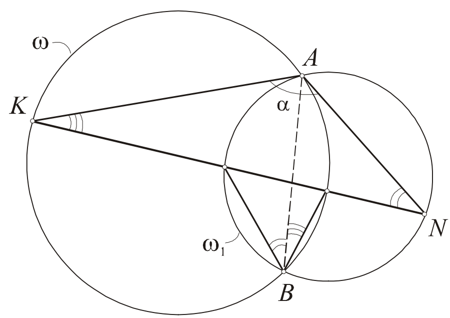


Рис.16б

Задача 15. *A – произвольная точка окружности ω с центром O. На AO как на диаметре построена окружность ω_1. Докажите, что ω_1 делит пополам любую хорду AB (рис.17а).*

Решение. Смотрите *рис.17б*!

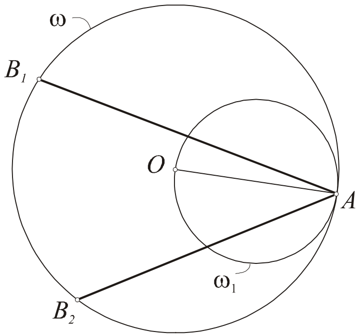


рис.17а

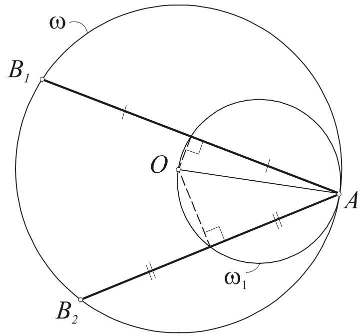


рис.17б

Задача 16. *Дан треугольник ABC периметра 2p. Из вершины A проведены перпендикуляры AN и AT на внешние биссектрисы углов B и C соответственно (рис.18а). Найдите длину отрезка NT.*

Решение. Смотрите *рис.18б*! $NT = p$.

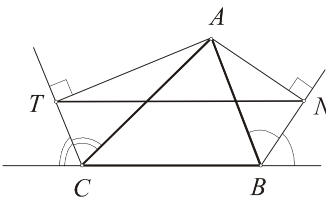


рис.18а

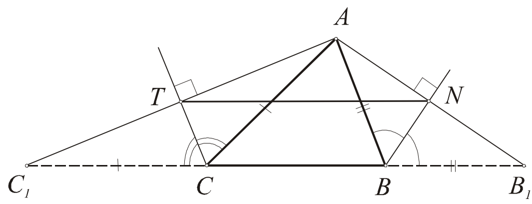


рис.18б

Задача 17. *В треугольнике ABC проведены внутренние биссектрисы AL_1 и BL_2. Оказалось, что L_1L_2 – биссектриса угла AL_1C (рис.19а). Найдите величину угла A.*

<u>*Решение*</u>. Смотрите *рис.19б!* $A = 120°$.

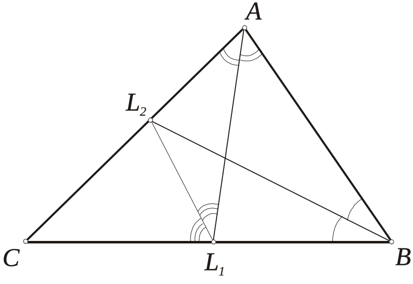


рис.19а

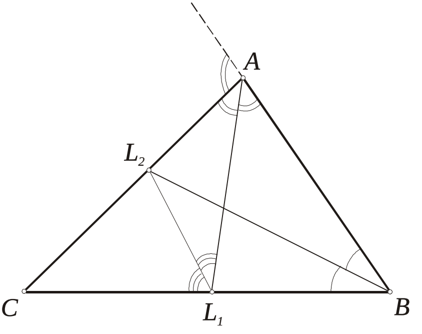


рис.19б

Задача 18. *В окружности радиуса R проведены два перпендикулярных диаметра AB и CD. Из произвольной точки K окружности к ним проведены перпендикуляры KN и KT (рис.20а). Найдите длину NT.*

<u>*Решение*</u>. Смотрите *рис.20б!* $NT = R$.

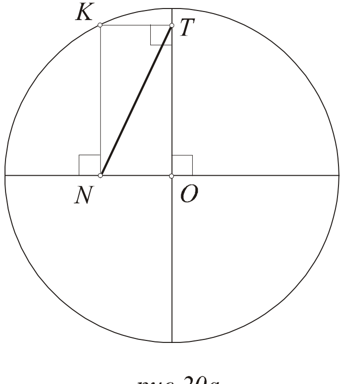


рис.20а

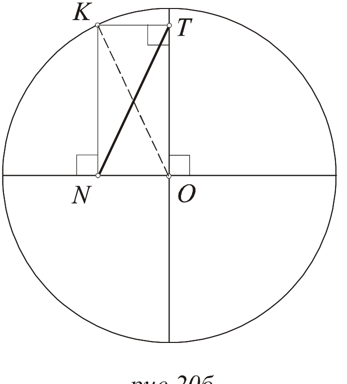


рис.20б

Задача 19. *(Брахмагупта) Докажите справедливость формулы для треугольника ABC:*
$bc = h_a \cdot 2R$ *(рис.21а).*

<u>*Решение*</u>. Смотрите *рис.21б!*

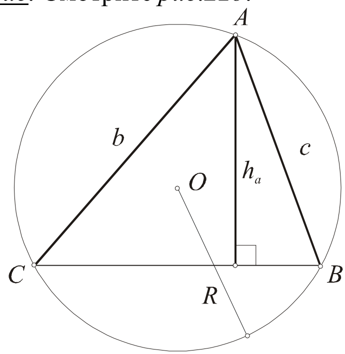


рис.21а

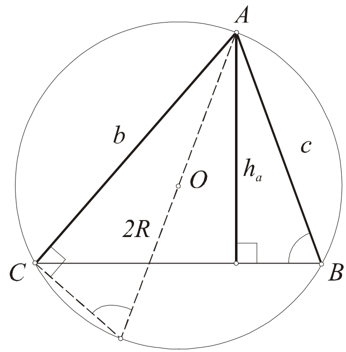


рис.21б

Задача 20. *Высота* AH_1 *и медиана* AM_1 *образуют равные углы со сторонами AB и AC соответственно (рис.22а). Определите вид треугольника ABC.*

<u>*Решение*</u>. Смотрите *рис.22б!*

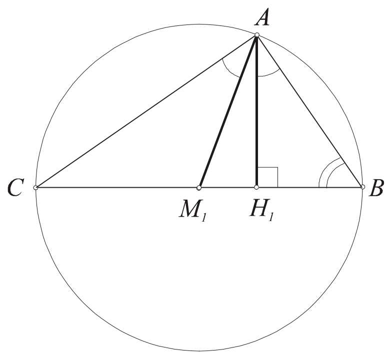


рис.22а

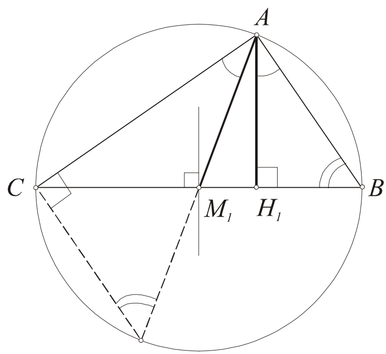


рис.22б

Прежде, чем перейти к задачам для самостоятельного решения, в которых может успешно применяться призыв «Смотри!», не забудем поблагодарить Бхаскару за этот мудрый педагогический девиз, приглашающий расти и развиваться.

Задача 21. I – точка пересечения биссектрис в треугольнике ABC со стороной $BC = a$. $IK \parallel AB$, $IN \parallel AC$ *(рис.23)*. Найдите периметр треугольника IKN.

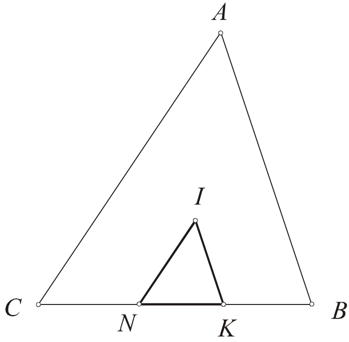


рис.23

Задача 22. На окружности w дана точка A, а внутри окружности – точка I. Постройте треугольник ABC, вписанный в w, для которого точка I была бы инцентром.

Задача 23. M_2 и M_3 – соответственно середины сторон AC и AB треугольника ABC. Известно, что точки B; M_3; M_2; C лежат на одной окружности. Определите вид треугольника ABC.

Задача 24. В треугольнике ABC со стороной $BC = a$ медианы m_b и m_c изаимно перпендикулярны. Найдите длину медианы m_a.

Задача 25. $ABCD$ – вписанный четырехугольник. Докажите, что внутренняя биссектриса угла A и внешняя биссектриса угла C пересекаются на окружности.

Задача 26. AB – хорда некоторой окружности с серединой в точке K. CD – диаметр этой окружности. Отрезок CK продолжен на столько же за точку K и получили точку N ($CK = KN$). Докажите, что $AB \perp DN$.

Задача 27. K – произвольная точка внутри треугольника ABC. G_1 и G_2 – точки пересечения медиан соответственно в треугольниках AKC AKB. Найдите G_1G_2, если известно, что $BC = a$.

Задача 28. CH – высота, проведенная к гипотенузе AB в прямоугольном треугольнике ABC. T – середина CH, Q – середина AH. Докажите, что $BT \perp CQ$

Задача 29. H_1 – основание высоты, проведенной из вершины A в треугольнике ABC. Восстановите треугольник ABC по длинам отрезков BH_1; CH_1, а также длине медианы m_b.

Задача 30. В равнобедренном треугольнике длины равных медиан равны m. Какой может быть наибольшая площадь такого треугольника?

<u>*Ответ*</u>: $\frac{2}{3}m^2$

Глава 8
Аль-Хорезми и геометрические решения алгебраических уравнений

Замечательный математик из Хорезма Аль-Хорезми (780–850 гг.) был первым, кто отделил алгебру от арифметики. Он жил и работал в Багдаде во времена, когда халиф Аль-Мамун собрал ученых в так называемом Доме Мудрости.

В Доме Мудрости имелись библиотека и обсерватория, здесь переводились и переписывались труды древнегреческих геометров, сочинялись новые научные трактаты.

Книга Аль-Хорезми «О восстановлении и противопоставлении» («Китаб *аль-джабр* аль-мукабала») была посвящена искусству решения уравнений. В эпоху Аль-Хорезми отрицательные числа считались фиктивными, даже абсурдными. Зато перенесение их в другую часть уравнения с положительным знаком *восстанавливает* их в своих правах, превращает в настоящие числа. Отсюда и *аль-джабр* (восстановление), давшее название алгебре. Книга написана как руководство юношам – для решения практических, житейских задач. Но в ней достаточное внимание уделено и геометрическим вопросам: теореме Пифагора, измерению площадей, вычислению объемов.

Труд Аль-Хорезми оказал огромное влияние на последующие поколения. Его переписывали, им пользовались в повседневной практике.

Мы же подробнее остановимся на том, как Аль-Хорезми *геометрически* решал квадратные уравнения (вот оно, блистательное содружество алгебры и геометрии!)

Для решения ставшего знаменитым квадратного уравнения $x^2+10x=39$ Аль-Хорезми предложил два геометрических способа.

I способ.
К каждой стороне квадрата *ABCD* со стороной *x* прикладываем по прямоугольнику со второй стороной, равной $\frac{5}{2}$ (*рис.1*).

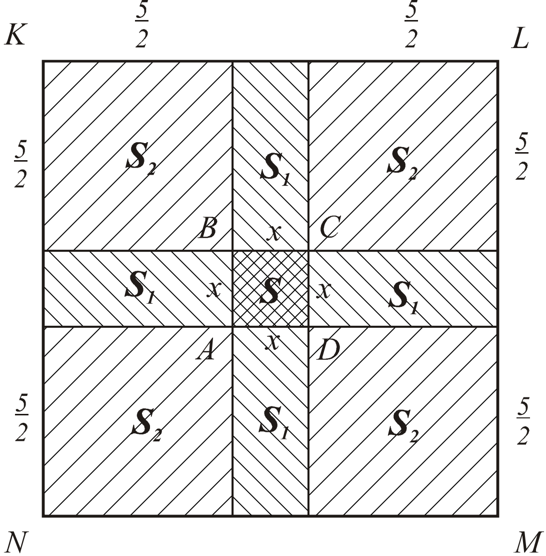


рис.1

Тогда площадь четырех прямоугольников вида S_1 равна $4 \cdot \frac{5}{2} \cdot x = 10x$.

А площадь четырех квадратов вида S_2 равна $4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25$.

Остается записать, чему равна площадь большого квадрата *KLMN*:

$S_{KLMN} = S + 4S_1 + 4S_2$, или

$S_{KLMN} = x^2 + 10x + 25$.

Поскольку по условию $x^2 + 10x = 39$, то $S_{KLMN} = 39 + 25 = 64$

Следовательно, $KL = 8 = \frac{5}{2} + x + \frac{5}{2}$, откуда $x = 3$.

Заметим, что уравнение $x^2 + 10x - 39 = 0$ имеет и отрицательный корень, равный *-13*, но, как мы уже говорили, во времена Аль-Хорезми такой корень не рассматривался.

II способ.
К данному квадрату *ABCD* со стороной, равной *x*, приставляем два прямоугольника, вторая сторона которого равна 5 *(рис.2)*. Такую фигуру, состоящую из квадрата *S* и двух прямоугольников вида S_3, древнегреческие математики называли *гномоном*.

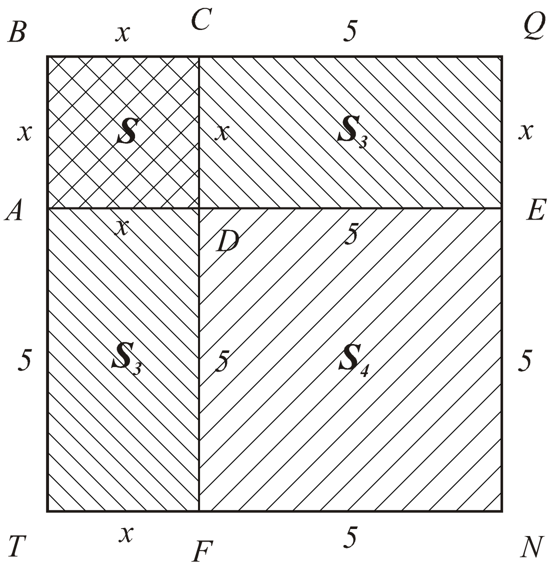


рис.2

Очевидно, что $2S_3 = 2 \cdot 5 \cdot x = 10x$.

Оставшаяся фигура – квадрат *DENF* со стороной 5, то есть $S_4 = 5^2 = 25$.

Тогда площадь большого квадрата *BQNT* равна:

$S_{BQNT} = S + 2S_3 + S_4 = x^2 + 10x + 25$.

Учитывая то, что $x^2 + 10x = 39$, получаем:

$S_{BQNT} = 64$ и $BQ = 8$.

Поскольку $BQ = x + 5$, то $x = 3$.

Как видим, не взирая на то, что имя Аль-Хорезми в нашем сознании прочно связано с алгеброй, этот выдающийся ученый блестяще связывал алгебраические и геометрические знания в единое звено!
И последнее. Имя Аль-Хорезми у нас то и дело на устах: часто употребляемое нами слово *«алгоритм»* как раз и есть фамилия Аль-Хорезми в переводе с арабского на латынь.

Глава 9

Сабит ибн Корра: второе рождение сочинений Архимеда, Аполлония и Менелая

Заслуги математика, механика, астронома *Сабита ибн Корры* (836–901 гг.) куда большие, чем создание авторской задачи или даже серии авторских задач. Он сберег, сохранил, перевел с греческого чудом сохранившиеся сочинения Архимеда, Аполлония и Менелая. После него многие арабские математики уточняли, дополняли эти сочинения, предлагали свои решения к задачам, но Сабит ибн Корра был первым! Во многом благодаря ему мы знаем «Книгу лемм Архимеда», книгу Архимеда «О построении круга, разделенного на 7 равных частей». Работу Архимеда «О касающихся кругах». Книги с 4^{й} по 7^{ю} главного труда Аполлония «О конических сечениях». «Сферику» Менелая, которая и поведала всему миру о теореме Менелая. Эти сочинения сохранились в виде перевода на арабский, выполненного Сабитом ибн Коррой.

При этом вот что пишет сам Сабит ибн Кора во время работы над одной из книг Архимеда: «Желая переписать эту книгу, я смог достать только дефектный материал, испорченный из-за невежества того, кто его переписывал, и недостаточного понимания им предмета. С большим трудом мне удалось исследовать и проанализировать задачи этой книги и привести предложения этой книги в порядок при помощи легких и близких по значению разъяснений».

Сабит ибн Корра родился в месопотамском городе Харране. Его предками были звездопоклонники – сабии (наверное, отсюда любовь к астрономии – на всю жизнь!) Он жил и работал в Багдаде, в Доме Мудрости, собравшем в своих стенах крупнейших ученых средневекового Востока. Сабит ибн Корра сделал комментарии к «Началам» Евклида, «Альмагесту» Птолемея. Написал два трактата о пятом постулате Евклида. Решил ряд задач по сферической тригонометрии. Рассмотрел вопросы, связанные с квадратурой параболы, и многое другое.

Все же главное, что сделал этот ученый, – познакомил арабских математиков, а затем и весь мир с рядом важнейших сочинений Архимеда, Аполлония и Менелая, о которых никто не знал. «Книга лемм» Архимеда в особых комментариях не нуждается. Это действительно одна из лучших книг по геометрии за всю историю математики – как в плане уровня помещенных в ней задач, так и в плане их важности и полезности. В сочинении Архимеда «О правильном семиугольнике» сторона этого семиугольника строится с помощью вставки, которая выполняется посредством конических сечений.

Для работы с книгами Аполлония «О конических сечениях» необходимо владеть основами аналитической геометрии. О теореме Менелая сказано много.

Мы же поведем дальнейший разговор о сочинении Архимеда – «Книге о касающихся кругах» в переводе Сабита ибн Корры. Эта книга представляется *блистательным гимном теме «Подобие треугольников»*. Предложенные ниже задачи будут располагаться в том же порядке, что и в «Книге» (что не всегда соответствует возрастанию уровня сложности). Формулировки задач – современные. Решения задач – в основном по «Книге», но иногда более поздние, экономные. Несколько задач из «Книги» не включены в подборку, поскольку представляются тривиальными.

«Книгу о касающихся кругах» Сабит ибн Корра начинает словами:

Архимед сказал:…

И далее идет

Задача 1. *Три круга с площадями S_1; S_2; S_3, центры которых лежат на прямой l, касаются внешним образом и имеют общую касательную k (рис.1). Докажите, что* $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_2}{S_3}$.

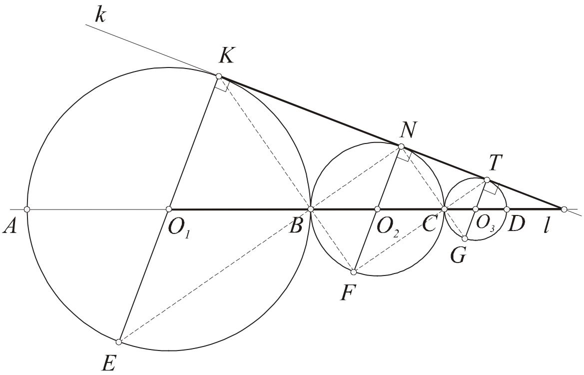


рис.1

<u>Решение</u>. Пусть $O_1;\ O_2;\ O_3$ – центры данных кругов и $R_1;\ R_2;\ R_3$ – соответственно их радиусы.

$KE=2R_1;\ NF=2R_2;\ TG=2R_3$,

где *K, N, T* – точки касания *k* с *1ым*, *2ым* и *3им* кругами соответственно. Из подобия треугольников *KEN NFT* (покажите, что $N-B-E$ – одна прямая и $T-C-F$ – тоже) следует:

$$\frac{2R_1}{2R_2}=\frac{KN}{NT} \qquad (1)$$

Подобие треугольников KFN и NGT дает следующую пропорцию:

$$\frac{2R_2}{2R_3} = \frac{KN}{NT} \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2}{R_3}, \text{ или } \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{R_2^2}{R_3^2}.$$

Поскольку площадь круга вычисляется по формуле $S = p\,R^2$, то имеем:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_2}{S_3}.$$

Что и требовалось доказать!

Задача 2. *В условиях задачи 1 к первому и второму кругам проведены касательные CM = m и DQ = q (рис.2). Докажите, что* $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m^2}{q^2}$.

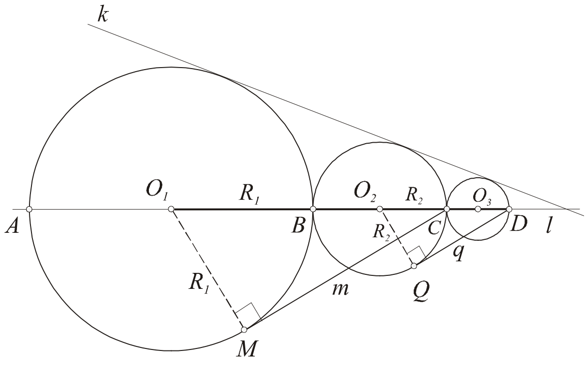


рис.2

<u>*Решение*</u>. В *задаче 1* получено: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2}{R_3}$, или $\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_2}$.

Тогда $1 + 2\frac{R_2}{R_1} = 1 + 2\frac{R_3}{R_2}$, или $\frac{R_1 + 2R_2}{R_1} = \frac{R_2 + 2R_3}{R_2}$.

Последнее равенство означает, что $\Delta O_1MC \sim \Delta O_2QD$. Следовательно,

$$\frac{O_1M}{O_2Q} = \frac{MC}{QD}, \text{ или } \frac{R_1}{R_2} = \frac{m}{q}, \text{ откуда } \frac{S_1}{S_2} = \frac{m^2}{q^2}.$$

Задача 3. *Два круга с площадями S_1 и S_2 имеют внешнее касание в точке B. AB = $2R_1$ и BC = $2R_2$ – соответственно их диаметры (рис.3). CT = t – касательная к первому кругу. AN = n – касательная ко второму кругу. Докажите, что* $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{n^4}{t^4}$.

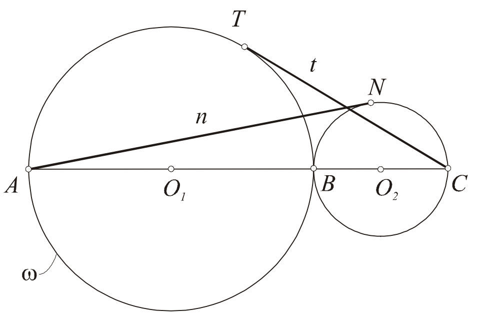


рис.3

Решение. По теореме о квадрате касательной для второго круга:

$$n^2 = 2(R_1 + R_2) \cdot 2R_1 .$$

По той же теореме для первого круга:

$$t^2 = 2(R_1 + R_2) \cdot 2R_2 .$$

Тогда $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{n^2}{t^2}$, а

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{n^4}{t^4} .$$

Задача 4. *QA – касательная к окружности ω. AB – диаметр ω. C – точка пересечения BQ и ω (рис.4). Докажите, что $AB^2 = BQ \cdot BC$.*

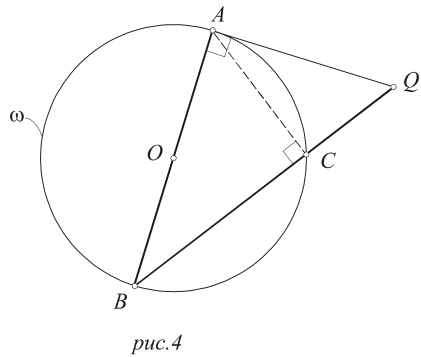


рис.4

Решение. Соединим A и C. $\angle ACB = 90^\circ$ (вписанный, опирается на диаметр). Тогда AC – высота, проведенная к гипотенузе BQ в прямоугольном ΔQAB. В таком случае, справедлива формула:

$$AB^2 = BQ \cdot BC .$$

Задача 5. *С – точка на продолжении диаметра АВ окружности ω (рис.5). СК – касательная к ω, которая при продолжении «встречает» перпендикуляр из А к АВ в точке D. Докажите, что DK·KC = AO·AC.*

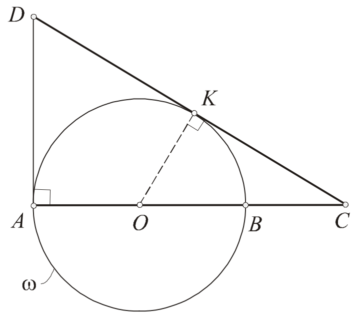


рис.5

Решение. Соединим K и O. Очевидно, что $\Delta CAD \sim \Delta CKO$. Тогда $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{OK}{KC}$, или $AD \cdot KC = OK \cdot AC$. Поскольку $AD = DK$ (касательные) и $OK = R = AO$, то получаем требуемое: $DK \cdot KC = AO \cdot AC$.

Задача 6. *На продолжении диаметра АВ окружности ω взята точка С (за точку В). СК – касательная к ω. Перпендикуляр к АВ в точке В «встречает» СК в точке D (рис.6). Докажите, что* $CK \cdot BD = OB \cdot BC$.

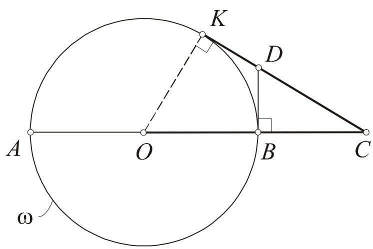


рис.6

Решение. Соединим K и O. $\Delta COK \sim \Delta CDB$, откуда $\dfrac{OK}{CK} = \dfrac{BD}{BC}$.

Так как $OK = R = OB$, то $CK \cdot BD = OB \cdot BC$.

Задача 7. *ω_1 и ω_2 – два непересекающихся круга с центрами O_1 и O_2. O_1K – касательная к ω_1 (рис.7). Эти касательные пересекаются в точке Т. Докажите, что $O_1T \cdot TK = O_2T \cdot TN$.*

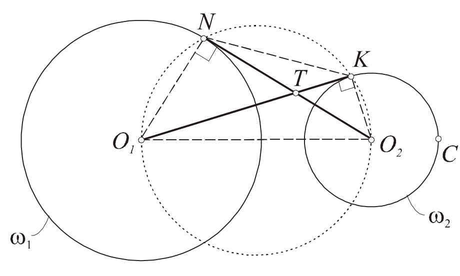


рис.7

Решение. Нетрудно заметить, что точки O_1; N; K; O_2 лежат на окружности с диаметром O_1O_2. Тогда для этой окружности по теореме о произведении отрезков хорд $O_1T \cdot TK = O_2T \cdot TN$.

Задача 8. *AK и AN – касательные к окружности ω. На продолжении AN взята точка B. BT – также касательная к ω (рис.8). Прямые BT и AK пересекаются в точке C, а прямые NT и AC – в точке D. Докажите, что* $\frac{DA}{DC}=\frac{AK}{KC}$.

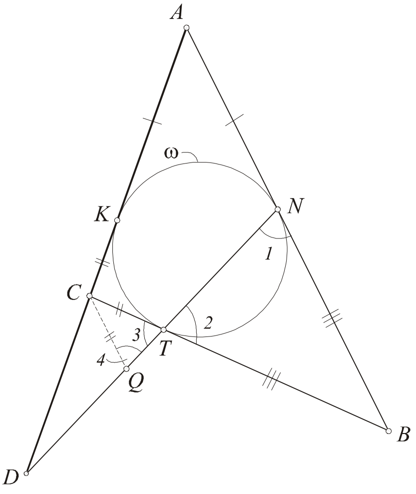


рис.8

Решение. Проведем $CQ \parallel AB$. Тогда $\angle 1=\angle 4$ – как внутренние накрест лежащие ($AB \parallel CQ$). Но $\angle 1=\angle 2$ ($BN=BT$) и $\angle 2=\angle 3$ – вертикальные. Следовательно, $CQ=CT=CK$. Из подобия ΔADN и ΔCDQ следует: $\frac{DA}{DC}=\frac{AN}{CQ}$. Поскольку $AN=AK$ и $CQ=CT=CK$, то имеем: $\frac{DA}{DC}=\frac{AK}{KC}$, что и требовалось доказать!

Задача 9. *В условиях задачи 5 пусть AN – перпендикуляр на CD (рис.9). Докажите, что* $\frac{DC}{CK}=\frac{DK}{KN}$.

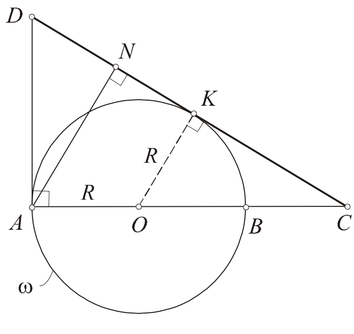


рис.9

Решение. $\Delta DAC \sim \Delta OKC$ и $\frac{CD}{DA}=\frac{CO}{OK}$ (1)

Кроме того, по теореме Фалеса ($OK \parallel AN$)

$\frac{CO}{OA}=\frac{CK}{KN}$ и, так как $OA=OK=R$, то

$\frac{CO}{OK}=\frac{CK}{KN}$ (2)

Из (1) и (2) получаем: $\frac{CD}{DA}=\frac{CK}{KN}$,

или $\frac{CD}{CK}=\frac{DA}{KN}$.

Но $DA=DK$ (касательные). Поэтому: $\frac{CD}{CK}=\frac{DK}{KN}$.

Задача 10. В условиях *задачи 5* докажите, что $\frac{DK}{KC} = \frac{OB}{BC}$ *(рис.10).*

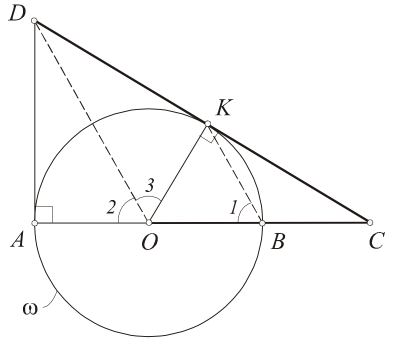


рис.10

Решение. Соединим D и O, K и B. Для решения задачи достаточно показать, что $DO \parallel KB$. Покажем это. $\angle 1$ в два раза меньше, чем $\angle AOK$ (вписанный и центральный). Но $\angle AOK$ состоит из двух равных углов ($\angle 2 = \angle 3$ – из равенства ΔAOD и ΔKOD). Следовательно, $\angle 2 = \angle 1$ и $DO \parallel KB$.

Тогда по теореме Фалеса $\frac{DK}{KC} = \frac{OB}{BC}$.

Задача 11 *В условиях задачи 5 проведен отрезок $BE \perp AB$ (E принадлежит DC). Докажите, что*

$\frac{DK}{DC} = \frac{KE}{EC}$ *(рис.11).*

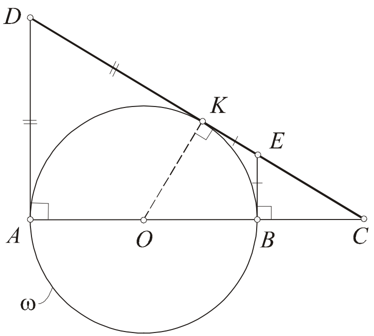


рис.11

Решение. $\Delta CAD \sim \Delta CBE$, откуда $\frac{DA}{DC} = \frac{BE}{EC}$. Заменив DA на DK, а BE на KE, получим требуемое.

Задача 12. *На продолжении диаметра AB окружности ω взята точка C, из которой проведена к ω касательная CK (рис.12). KT – перпендикуляр на AB. Докажите, что* $\frac{AC}{BC} = \frac{AT}{TB}$.

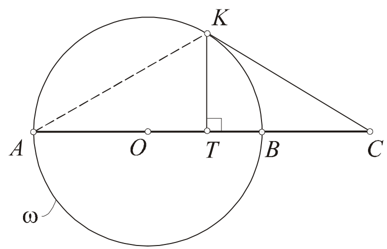


рис.12

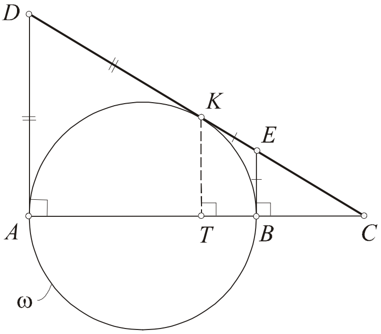


рис.13

<u>*Решение*</u>. Из A и B проведем перпендикуляры к AB до пересечения с прямой CK соответственно в точках D и E (*рис.13*).

Подобие треугольников ADC и BEC дает пропорцию: $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BE}$. Но $AD = DK$ и $BE = KE$. Тогда $\frac{AC}{BC} = \frac{DK}{KE}$. Поскольку $\frac{DK}{KE} = \frac{AT}{TB}$ (теорема Фалеса), получаем требуемое: $\frac{AC}{BC} = \frac{AT}{TB}$

Заметим, что каждая из предложенных двенадцати задач имеет и другие способы решения. Например, *задачу 12* можно также решить с помощью *теоремы о квадрате касательной* или же воспользовавшись *свойством внешней биссектрисы треугольника* (KA – внешняя биссектриса для треугольника CKT – *рис.12*). В целом же, повторим, задачи из «Книги о касающихся кругах» Архимеда можно рассматривать, как чрезвычайно полезную серию упражнений по теме «Подобие».

Но и это не все.

Поистине шедевром «Книги о касающихся кругах» является ее завершающая Задача – так называемая *теорема Архимеда*. Через полтораста лет Аль-Беруни предложит около двадцати способов ее доказательства, выведет ряд тригонометрических формул с помощью *теоремы Архимеда*… Но это будет позже… А пока *Сабит ибн Корра*, завершая «Книгу о касающихся кругах», приводит три способа доказательства этой теоремы.

Но *теорема Архимеда* – это тема уже другого разговора. Сейчас лишь сформулируем теорему в том виде, как это сделал Сабит ибн Кора, и предложим ее решить самостоятельно.

Теорема Архимеда.

«Если в сегменте круга прямая линия сломана на две части, стягивающие две неравные дуги, и из точки, делящей сегмент пополам, опущен перпендикуляр на большую из частей ломаной линии, то он разделит ломаную линию пополам».

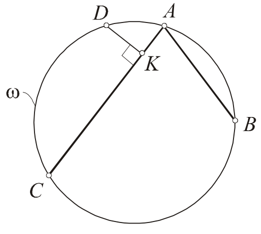


рис.14

C–A–B – вписанная в круг ω ломаная. D – середина дуги BAC. $DK \perp AC$ (рис.14). Докажите, что $CK = KA + AB$.

Глава 10
Абу-л-Вафа и циркуль постоянного раствора

Математик и астроном из Хорасана (Иран) Абу-л-Вафа (940–998 гг.) с 20 лет жил и работал в Багдаде – крупнейшем научном центре арабского халифата. Он написал руководство по практической арифметике, в котором показал, как работать с обыкновенными дробями, как их сокращать. Он первым в Багдаде стал использовать отрицательные числа. Абу-л-Вафа написал комментарии к Евклиду, Птолемею, Диофанту. В своем астрономическом трактате «Совершенная книга» он впервые пользуется секансом и косекансом, составляет более точные таблицы синусов, тангенсов и котангенсов, доказывает теорему синусов.

Что касается геометрии, то здесь Абу-л-Вафа пишет оригинальное сочинение: «Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений». В ней он приводит разнообразные построения, применявшиеся в архитектуре, технике, землемерии. Одна из глав книги посвящена решению задач на составление квадрата из нескольких квадратов. Вот пример такой задачи, носящей сегодня имя Абу-л-Вафы.

Задача Абу-л-Вафы. *Способом разрезания составьте квадрат из трех данных равных квадратов.*

Решение. Возьмем два данных квадрата, разрежем их по диагонали. Полученные части приложим диагоналями к сторонам тетьего квадрата *ABCD* (*рис.1а*). Поскольку $\Delta KTE = \Delta NTA$ – по стороне и двум углам (*рис.1б*), то треугольником ***KTE*** можно заполнить пустоту на месте треугольника *NTA*. Выполнив аналогичные операции еще три раза, получим квадрат *KLMN*.

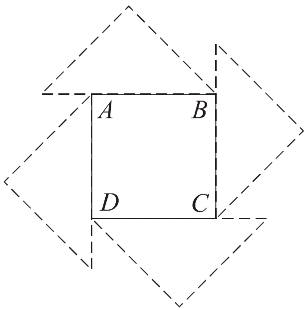


рис.1а

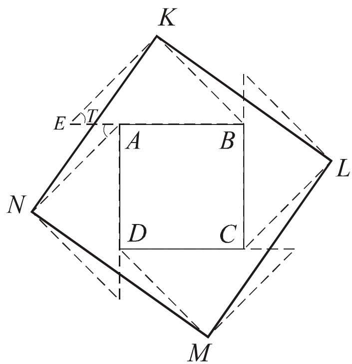


рис.1б

Однако наибольший интерес для нас в геометрии представляют задачи Абу-л-Вафы на построение, в которых помимо линейки используется *циркуль постоянного раствора* («заржавленный» циркуль, как позже скажет Леонардо да Винчи). Циркулем постоянного раствора пользовались и в Индии, и в Древней Греции. Это было обусловлено тем, что при измерениях на местности часто неудобно (или даже невозможно) проводить окружности разных радиусов.
Тем не менее, именно Абу-л-Вафа впервые систематизировал задачи с *циркулем постоянного раствора*, поместив в своей книге по практической геометрии порядка 15 таких задач. О некоторых из них мы и поведем дальнейший рассказ, где наряду с решениями Абу-л-Вафы будут представлены более поздние и даже современные решения некоторых задач. Итак,

Задачи, выполняемые с помощью линейки и циркуля постоянного раствора, равного R.

Задача 1. *Через данную точку K провести параллель к прямой l (рис.2).*
Решение. На прямой *l* дважды отложим отрезки, равные R ($AB = BC = R$). Порядок дальнейших операций укажем лишь цифрами. **KN** – искомая прямая.

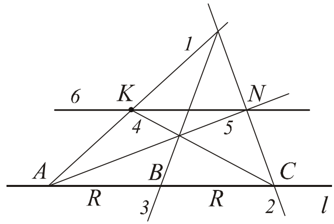


рис.2

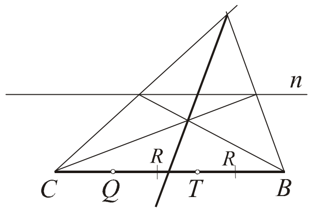


рис.3

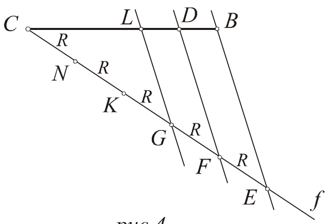


рис.4

Задача 2.
Разделите данный отрезок: а) пополам; б) на n равных частей; в) в отношении $m : n$
Решение.
а) Пусть дан отрезок *BC*. Отложив на прямой *BC* два отрезка, равные R ($BT = TQ = R$), проведем прямую $n \parallel BC$ *(Задача 1) – рис.3*. Затем, как и в *задаче 1*, воспользуемся *леммой о трапеции: середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.*
б) Пусть $n = 5$. Отложим на луче *f*, выходящем из точки *C*, пять отрезков, равных *R* (*рис.4*). Соединим последнюю точку деления *E* с *B*. Проведя через точки деления *F, G, K, N* параллели к *BE*, получим требуемое. Таким образом, построение совпадает с классическим.
в) Как в пункте *б)* откладываем на луче *f* отрезок *R m* раз. Например, на *рис.4* показано, как разделить *BC* в отношении $3:2$ и $4:1$.

Задача 3. Постройте биссектрису угла.

<u>*Решение*</u>. Смотрите *рис.5*.

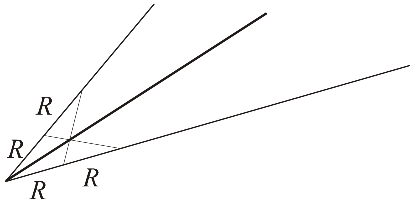


рис.5

Задача 4. Отложите угол, равный данному углу BAC.

<u>*Решение*</u>. Через произвольную точку K проводим $n \parallel AB$ и $l \parallel AC$ согласно *задачи 1 (рис.6)*. Очевидно, что $f = \angle BAC$.

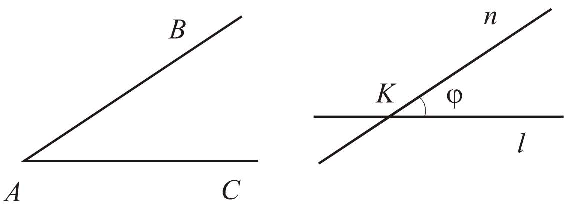


рис.6

Задача 5. *Из точки T вне прямой l проведите перпендикуляр к l, а из точки $K \in l$ восстановите перпендикуляр к прямой l.*

<u>*Решение*</u>. Строим на прямой l $AB = BC = CD = R$ *(рис.7)*. Окружности с центрами в B и C пересекаются в точках E и F. Нетрудно показать, что $EF \perp l$ *(покажите!)*. Тогда остается через точки T и K провести прямые параллельно EF *(Задача 1)*.

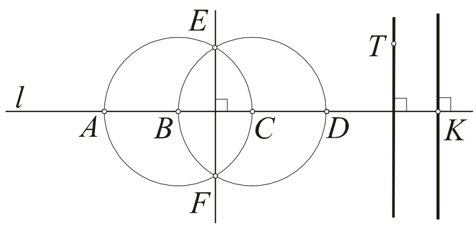


рис.7

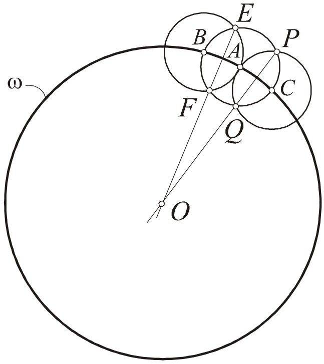


рис.8

Задача 6. Постройте центр данной окружности ω.

<u>*Решение*</u>. Из произвольной точки A на ω строим окружность радиуса R, которая пересекает ω в точках B и C *(рис.8)*. Из B и C как из центров строим такие же окружности.

Пусть равные окружности попарно пересекаются в точках E и F, P и Q. Остается доказать, что прямые EF и PQ пересекаются в центре O окружности ω *(докажите!)*

Задача 7. На данной прямой *l* отложите отрезок, равный данному отрезку *BC*.

<u>*Решение*</u>. Через C проводим произвольную прямую f. Пусть она пересекает l в точке D *(рис.9)*. Через D проводим параллель к BC, а через B – параллель к f *(Задача 1)*. При этом $DT = BC$ ($BCDT$ – параллелограмм). Далее строим биссектрису $\angle TDQ$ *(Задача 3)*. Из T проводим к ней перпендикуляр TN *(Задача 5)*, который при продолжении пересекает l в точке K. Очевидно, $DK = DT = BC$.

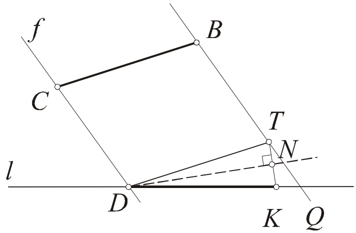


рис.9

Задача 8. *На данном отрезке BC постройте правильный треугольник ABC.*

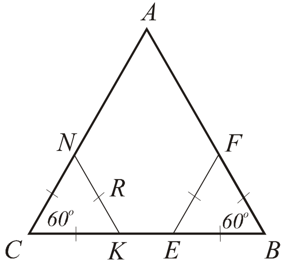


рис.10

<u>*Решение*</u>. Строим равносторонние треугольники BEF и CKN со стороной R *(рис.10)*. Прямые BF и CN пересекутся в искомой вершине A.

Задача 9. *В данный круг впишите а) квадрат, б) правильный шестиугольник.*
<u>*Решение*</u>. *а)* Находим центр O данного круга *(Задача 6)* и проводим произвольно диаметр AB *(рис.11)*. Через O проводим перпендикуляр к AB, который пересекает окружность в точках C и D. $ACBD$ – квадрат, вписанный в данную окружность.

б) От точки *O* откладываем угол $60°$ (к отрезку *AO*) – например, построив равносторонний ΔOEF со стороной *R* *(рис.11)*. Проведенный луч пересекает окружность в точке *N*. *AN* – сторона правильного шестиугольника. Дальнейшее очевидно!..

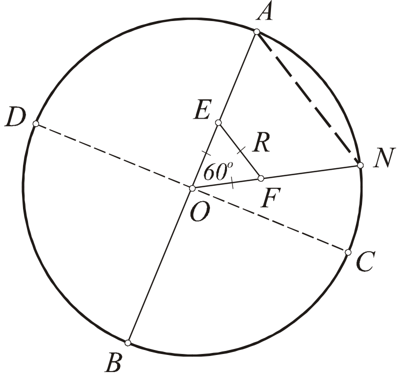


рис.11

Задача 10. *В данный квадрат ABCD впишите равносторонний треугольник BKN.*

Решение. На стороне *CD* квадрата строим равносторонний ΔCED *(Задача 8)*, а на стороне *AD* – равносторонний ΔAFD *(рис.12)*. Прямые *BE* и *BF* в пересечении с *AD* и *CD* соответственно дадут недостающие вершины *K* и *N* равностороннего ΔBKN (покажите, что $\angle ABK = \angle CBN = 15°$).

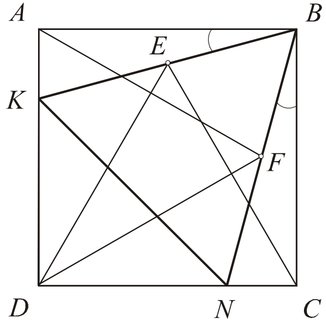


рис.12

Задача 11. *Из точки A вне окружности ω проведите касательную к ω.*

Решение. Находим центр *O* окружности ω *(Задача 6)*. Делим отрезок *OA* пополам *(Задача 2а)* – точка *Q* *(рис.13)*.

Из точки *Q* как из центра радиусом, равным *R*, строим окружность ω_1. Пусть ω_1 пересекает ω в точках *K* и K_1. Прямые *QK* и QK_1 пересекут окружность ω в искомых точках касания *T* и T_1 (покажите это при помощи гомотетии).

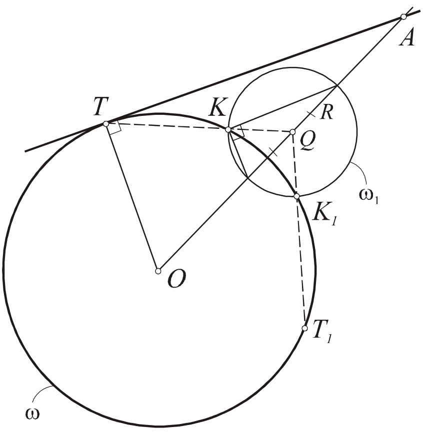


рис.13

Замечание. Предложите способ построения касательной в случае, когда окружность w_1 радиуса *R* с центром в *Q* не будет пересекать ω.

В заключение – несколько задач для самостоятельного решения, выполняемых линейкой и циркулем постоянного раствора.

Задача 12. Удвойте данный отрезок.

Задача 13. На данном отрезке постройте: *а)* квадрат; *б)* правильный шестиугольник.

Задача 14. В данную окружность впишите правильные n-угольники: *а)* $n = 3$; *б)* $n = 8$; *в)* $n = 10$.

Задача 15. В данный равносторонний треугольник впишите квадрат.

Глава 11
Аль-Беруни и теорема Архимеда

Круг интересов *Аль-Беруни* (973–1048) – замечательного ученого из Хорезма – был необычайно широк. Трактаты по математике, астрономии, физике, географии, фармакологии, медицине – всего около 150 научных работ! Не случайно его называют крупнейшим ученым-энциклопедистом. Что касается математики, то в трудах Аль-Беруни впервые встречаем доказательство теоремы синусов. Он формулирует в явном виде и решает кубические уравнения $x^3-3x-1=0$ и $x^3-3x+1=0$. Это он поведал нам историю, вернее, задачу-легенду о шахматах и зернах. «Отношение окружности к диаметру иррационально». – утверждает Аль-Беруни. Он показывает, как по высоте горы определить радиус Земли и приводит точнейшие расчеты. Он первым вводит единичный радиус тригонометрического круга и поясняет, почему так лучше, удобнее, проще. Аль-Беруни тщательно изучает трактаты древнегреческих математиков, математику Индии, работы своих предшественников из Дома Мудрости в Багдаде. При этом беседует, спорит, ведет дружескую переписку со своим выдающимся современником – врачом и философом *Ибн Синой (Авиценной)*.

Принимая своеобразную эстафету от *Сабита ибн Корры*, Аль-Беруни пишет «Трактат об определении хорд в круге при помощи вписанной в него ломаной линии». И если Сабит ибн Корра сохранил, сберег для нас *теорему Архимеда*, то Аль-Беруни поднял ее значимость на высочайший уровень, дал ей достойнейшее применение.

Теорема Архимеда.
Если вписанная в дугу круга прямая линия сломана на две неравные части, и я опущу на нее из середины этой дуги перпендикуляр, то она (ломаная) разделится им пополам.

Согласно *рис.1* на ломаную ABC из середины D дуги ABC опущен перпендикуляр DK. Необходимо доказать, что в таком случае ломаная разделится пополам, то есть $AK = KB + BC$.

В своем «трактате» Аль-Беруни приводит три доказательства этой теоремы, данные Архимедом. Два из них мы предложим вниманию читателей (третье в значительной степени похоже на второе).

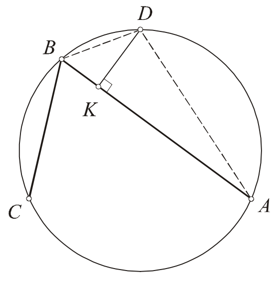


рис.1

Первое доказательство. (*Архимед*)

Отложим $\cup DN = \cup DB$ (*рис.2*), а также отрезок $KT = KB$. Соединим точку *D* с точками *A, N, T,* а также точки *A* и *N*. Очевидно, $DN = DB$ (равные дуги стягиваются равными хордами) и $DT = DB$ (*DK* – высота и медиана в ΔBDT). $\angle 1 = \angle 2$ – вписанные, опираются на равные дуги.

$\angle 1 + \angle 3 = \dfrac{1}{2} \cup DNA$. Но и

$\angle 4 = \dfrac{1}{2} \cup DNA$ (вписанный),

следовательно $\angle 4 = \angle 1 + \angle 3$.

$\angle 5 = \angle 2 + \angle 6$ – внешний для ΔADT

.

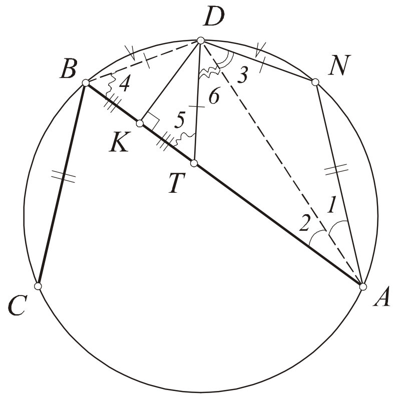


рис.2

Но $\angle 5 = \angle 4$, тогда $\angle 4 = \angle 2 + \angle 6 = \angle 1 + \angle 3$. Поскольку $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 3 = \angle 6$ и $\Delta ADN = \Delta ADT$ – по двум сторонам и углу между ними. Тогда $AN = AT$. Но $AN = BC$, т.к. $\cup AND = \cup DBC$ – по условию, а $\cup DN = \cup DB$ – по построению.

Получается, что $AT + TK = KB + BC$, или $AK = KB + BC$, что и требовалось доказать.

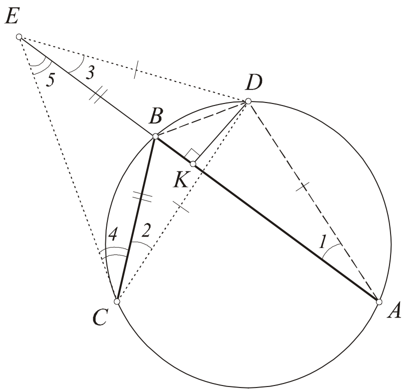


рис.3

Второе доказательство. (*Архимед*)

На продолжении *KB* за точку *B* отложим $KE = KA$ (*рис.3*). Тогда $DE = DA$ (*DK* – высота и медиана в ΔADE). Но и $DC = DA$ (*D* – середина дуги *ABC*).

$\angle 1 = \angle 2$ – вписанные, опираются на одну дугу. И $\angle 1 = \angle 3$ (ΔADE – равнобедренный), отсюда $\angle 3 = \angle 2$. Поскольку ΔDCE – равнобедренный ($DC = DE$) и $\angle 2 = \angle 3$, то и $\angle 4 = \angle 5$. Следовательно, и ΔBCE – равнобедренный и $BC = BE$. По построению $AK = KB + BE$. Так как $BE = BC$, получаем требуемое: $AK = KB + BC$.

Сам Аль-Беруни предлагает около 20 способов (!!!) доказательства *теоремы Архимеда*, демонстрируя разнообразие подходов к решению одной и той же задачи. Сегодня мы знаем, сколь велика педагогическая ценность решения одной задачи многими способами!
А потому – еще три способа доказательства теоремы Архимеда от автора «Трактата».

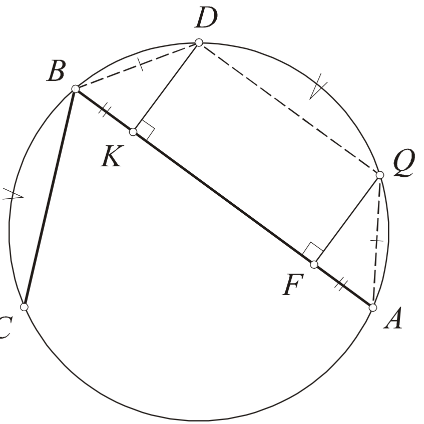


рис.4

Третье доказательство. *(Аль-Беруни)*

Проведем $DQ \parallel AB$ *(рис.4)*.
Очевидно, $AQDB$ – равнобокая трапеция и $AQ = BD$;
$AF = KB$. Поскольку $\cup AQ = \cup DB$ и D – середина дуги ABC, то $\cup BC = \cup DQ$, а значит, равны и соответствующие отрезки:
$BC = DQ = KF$. Значит,
$AF + FK = KB + BC$, или
$AK = KB + BC$.

Четвертое доказательство. *(Аль-Беруни)*

Отложим $KT = KB$ *(рис.5)*.
Так как D – середина дуги ABC, то $DA = DC$. $\angle 1 = \angle 2$ – вписанные, опираются на одну дугу. Пусть $\angle DBT = \angle DTB = a$. Тогда $\cup DA = \cup DBC = 2a$. Вписанный $\angle DBC = \frac{1}{2}(360° - 2a) = 180° - a$. Также и $\angle DTA = 180° - a$ (смежный с углом DTB). Следовательно, по стороне и двум прилежащим углам равны треугольники ATD и CBD, откуда $AT = BC$, что делает задачу решенной.

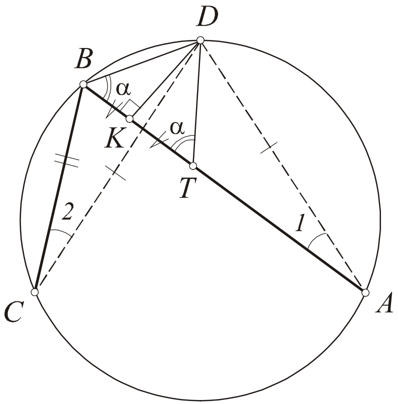


рис.5

Пятое доказательство. (*Аль-Беруни*) Из точки D проведем перпендикуляр DL на прямую CB (*рис.6*). Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ и $DA = DC$, то $\Delta AKD = \Delta CLD$ – по гипотенузе и острому углу. Значит, $LC = AK$ и $LD = DK$. Соединим D и B. $\Delta DLB = \Delta DKB$ (по катету и гипотенузе). Значит, $BL = BK$. При этом $LC = AK$. Следовательно, $AK = KB + BC$, что и требовалось доказать.

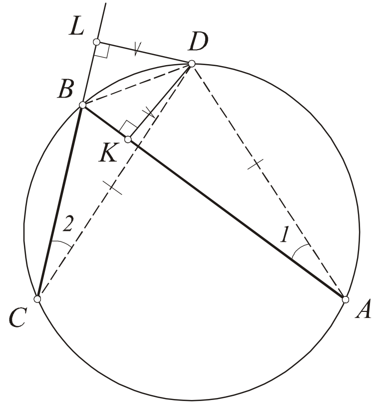


рис.6

Бережное отношение к *теореме Архимеда* позволило Аль-Беруни решить ряд задач, в которых она была успешно применена. Вот, например, каким образом Аль-Беруни решает задачу, приписываемую *Менелаю*.

Постройте треугольник ABC по следующим элементам: a; A; b+c.

Решение Аль-Беруни. На отрезке $BC = a$ строим сегмент, вмещающий данный угол A (*рис.7*).

Находим точку D – середину дуги BAC. На DB как на диаметре описываем окружность. А из точки B раствором циркуля, равным $\dfrac{b+c}{2}$ (согласно теореме Архимеда), делаем на ней засечку – получаем точку K. Продолжение BK пересекает окружность в недостающей вершине A. Исследование показывает, что Задача может иметь два решения (симметричных), одно решение, ни одного решения (при $b + c < a$).

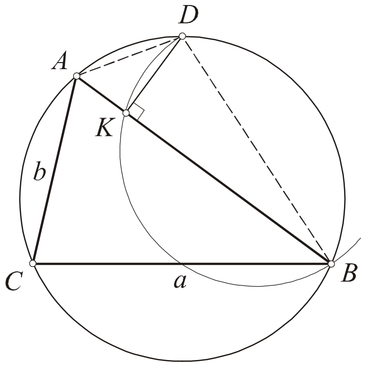


рис.7

В своей тригонометрической книге «Канон Масуда по астрономии и звездам» Аль-Беруни доказывает ряд важнейших тригонометрических формул, основываясь на *теореме Архимеда*. Вот одна из них.

Докажите справедливость следующей тригонометрической формулы:

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}.$$

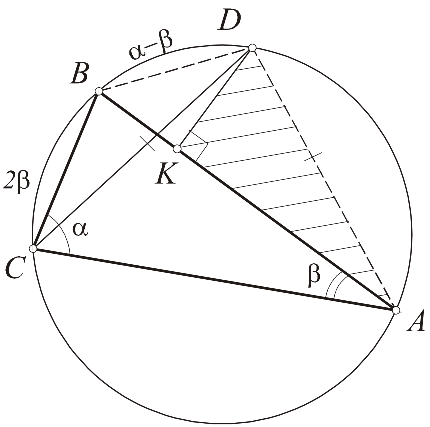


рис.8

Пусть D – середина дуги ABC, DK – перпендикуляр на AB. Пусть также $\angle ACB = a$, $\angle BAC = b$ (*рис.8*).

Тогда вся дуга ABC равна $2a + 2b$, а ее половина, $\cup DBC = a + b$. $\cup BD = a + b - 2b = a - b$ и $\angle BAD = \dfrac{a-b}{2}$ (вписанный). Очевидно, что в равнобедренном треугольнике ADC $\angle ACD = \dfrac{a+b}{2} = \angle CAD$ (вписанные, опираются на равные дуги). По теореме синусов для ΔABC имеем: $AB = 2R\cdot\sin a$ и $BC = 2R\cdot\sin b$.

По этой же теореме для ΔADC $DA = DC = 2R\cdot\sin\dfrac{a+b}{2}$. Из прямоугольного

ΔAKD: $AK = AD\cdot\cos\angle BAD = 2R\cdot\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$.

С другой стороны, по *теореме Архимеда*

$$AK = \frac{1}{2}(AB + BC) = \frac{1}{2}(2R\sin a + 2R\sin b) = R(\sin a + \sin b).$$

Получаем: $R(\sin a + \sin b) = 2R\cdot\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$

и, после сокращения на R, $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.

И в заключение – несколько задач, в которых «выручает» теорема Архимеда.

Задача 1. Докажите, что проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного первой стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна по длине третьей стороне.

Задача 2. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке W. Докажите, что:

а) $b+c \le 2AW$;

б) $AW = \dfrac{b+c}{2\cos\dfrac{A}{2}}$.

Задача 3. Докажите, что в обозначениях *рис.1* выполняется равенство:

$$AB \cdot BC + BD^2 = AD^2$$

Задача 4. B и C – фиксированные точки окружности, по которой произвольно перемещается точка A. Точка K – середина ломаной CAB. Найдите геометрическое место точек K.

Глава 12
Олимпиадный треугольник Аль-Беруни

> *«Я сделал то, что надлежит сделать всякому в своей отрасли – с признательностью воспринять старания своих предшественников и без стеснения исправить их погрешности».*
>
> *Аль-Беруни*

Новые задачи, решаемые математиками стран арабского халифата, часто сводились к решению уравнений третьей степени. Через корни кубических уравнений были найдены стороны некоторых правильных многоугольников, что представлялось важным для составления более точных таблиц хорд (таблиц синусов). Аль-Беруни для нахождения стороны правильного 9-угольника предложил оригинальный способ, в результате которого вышел на уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$. Решив его (к сожалению, способ Аль-Беруни неизвестен), он нашел сторону правильного 18-угольника, а затем и 9-угольника, с точностью до восьми знаков после запятой. В своих вычислениях Аль-Беруни пользовался единичным радиусом – вместо деления радиуса на части, сделанного Птолемеем. При этом он подробно объяснил, почему так лучше, удобнее, проще (заметим, что единичный радиус тригонометрического круга был введен в активное употребление значительно позже, благодаря трудам Леонарда Эйлера).

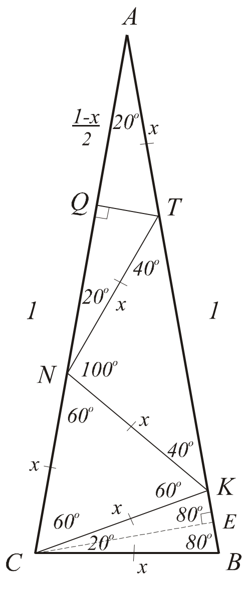


рис.1

Вот какой треугольник «приглянулся» Аль-Беруни для получения уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$
.

Рассмотрим равнобедренный треугольник *ABC* *(* $AB = AC = 1$ *)* с углом $20°$ при вершине *(рис.1)*. Пусть $BC = x$ – хорда круга, а вернее, сторона правильного 18-угольника, вписанного в круг. Отложим на боковых сторонах треугольника *ABC* ломаную $C - K - N - T$, где $CK = KN = NT = x$. Нетрудно заметить, что при этом ΔCKN – равносторонний. Углы в ΔKNT равны $40°; 40°; 100°$. И, поскольку

$\angle TNA = 20°$, то и $AT = NT = x$. Так как $\Delta ABC \sim \Delta CBK$, то $\frac{x}{1} = \frac{BK}{x}$, откуда $BK = x^2$. Проведем CE и TQ – соответствующие высоты к основаниям в равнобедренных треугольниках *CBK* и *ATN*. Тогда $BE = \frac{1}{2}BK = \frac{x^2}{2}$ и $AE = 1 - \frac{x^2}{2}$, а $AQ = \frac{1}{2}AN = \frac{1-x}{2}$.

Поскольку $\Delta AQT \sim \Delta AEC$, то $\frac{x}{1} = \frac{\frac{1-x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}$,

или $2x - x^3 = 1 - x$, или $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Далее Аль-Беруни находит *x* своим (неизвестным нам) способом – с высокой степенью точности. $BC = x$ – сторона правильного 18-угольника, вписанного в окружность. После чего нетрудно найти *CE* – половину стороны правильного, вписанного в этот круг, 9-угольника.

Все, что сделано здесь Аль-Беруни, добротно и эффективно. Оно заслуживает отдельного разговора еще и потому, что треугольник, придуманный Аль-Беруни, оказался жизнеспособным. Этот треугольник понравился математикам. Стали появляться задачи с ним. В результате сложилась коллекция задач *с треугольником Аль-Беруни* (в основном, олимпиадного характера).

Предложим вниманию читателей некоторые из таких задач, а сам треугольник рискнем назвать *олимпиадным*.

Задача 1. Пусть $AB = AC = b$, $BC = a$, $\angle BAC = 20°$. Докажите, что $b > 2a$ *(рис.2)*.

<u>*Решение*</u>. Отложим на *AC* отрезок $CF = a$. В ΔABF выполняется неравенство: $AF > BF$ (против большего угла лежит большая сторона). Аналогично, в ΔBFC имеет место неравенство: $BF > BC$. Тогда тем более $AF > BC$. Отсюда $AC = AF + FC > 2BC$, или $b > 2a$.

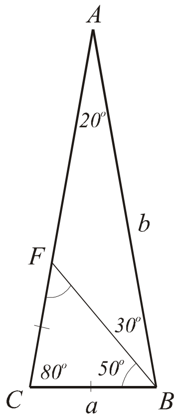


рис.2

Задача 2. Докажите, что $b < 3a$.

Решение. К ΔABC пристроим два таких же, как он, треугольника ABD и ACL (*рис.3*), ΔABD и ΔACL. Очевидно, ΔALD – равносторонний, и $LD = b$. Поскольку длина ломаной $DBCL$ больше длины отрезка LD, то $b < 3a$.

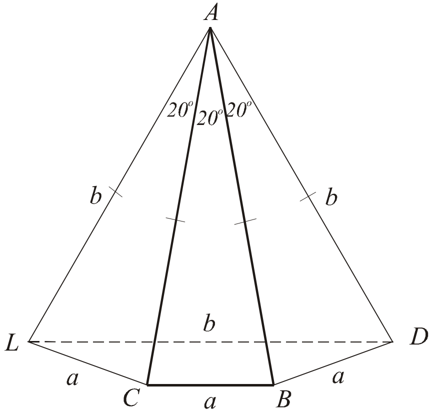


рис.3

Задача 3. На AB отложим $AT = a$. Найдите $\angle BTC$.

Решение. Мы уже знаем, что $CK = KN = NT = TA = a$ и что ΔCKN – равносторонний (*рис.4*). $\angle ANT = 20°$ – является внешним для равнобедренного ΔCNT. Тогда $\angle NCT = \angle NTC = 10°$. Поскольку $\angle NTK = \angle NKT = 40°$, то $\angle BTC = 40° - 10° = 30°$.

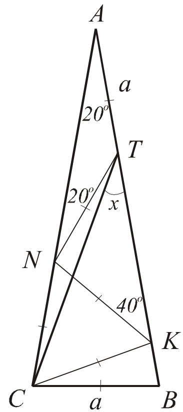


рис.4

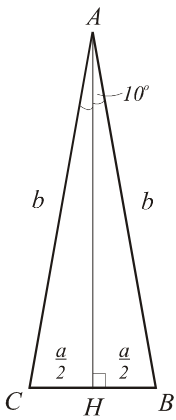


рис.5

Задача 4. Докажите справедливость равенства *для олимпиадного треугольника Аль-Беруни*:
$a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Решение. Из прямоугольного ΔABH $\sin 10° = \dfrac{a}{2b}$ (*рис.5*). Известно, что $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$. Значит, $\sin 30° = 3\sin 10° - 4\sin^3 10°$, или $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3a}{2b} - 4\dfrac{a^3}{8b^3}$, откуда получим: $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Задача 5. На сторонах *AC* и *AB* треугольника Аль-Беруни взяты соответственно точки *D* и *F* такие, что $\angle DBC = 50°$, а $\angle FCB = 60°$. Найдите величину угла *DFC (рис.6)*.

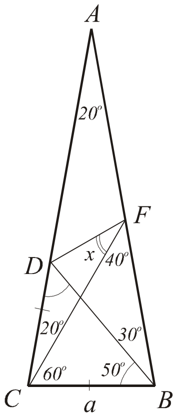


рис.6

Решение.

По теореме синусов для ΔABD:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sin 130°}{\sin 30°} = \frac{\sin 50°}{\sin 30°} = \frac{\cos 40°}{\frac{1}{2}} = 2\cos 40°.$$

По той же теореме для ΔBCF:

$$\frac{CF}{BC} = \frac{\sin 80°}{\sin 40°} = \frac{2\sin 40° \cdot \cos 40°}{\sin 40°} = 2\cos 40°.$$

Заменим *BC* на *CD* (они равны, т.к. $\angle CBD = \angle CDB = 50°$).

Итак, $\dfrac{CF}{CD} = 2\cos 40° = \dfrac{AB}{AD}$.

Следовательно, $\Delta CDF \sim \Delta ADB$ – по пропорциональности двух сторон и равенству углов между ними. Значит, $\angle DFC = \angle DBA = 30°$.

Задача 6. При помощи олимпиадного треугольника Аль-Беруни докажите справедливость тригонометрического равенства:

$$ctg 10° - 4\cos 10° = \sqrt{3}.$$

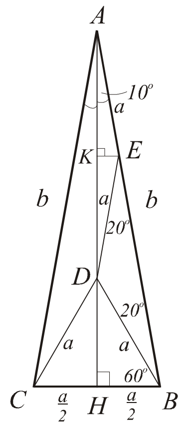


рис.7

Решение. Проведем в ΔABC высоту *AH (рис.7)*.

Из прямоугольного ΔABH: $AH = \dfrac{a}{2} ctg 10°$ (1)

Построим на *BC* равносторонний ΔBDC (*D* – на высоте *AH*). Выполним засечку $DE = a$ $(E \in AB)$. Поскольку $\angle DEB = 20°$, и он – внешний для ΔAED, в котором $\angle DAE = 10°$, то и $\angle ADE = 10°$ и $AE = ED = a$. Тогда $AD = 2AK$, где $EK \perp AD$, а $AK = AE \cdot \cos 10°$. Итак,

$AD = 2a \cdot \cos 10°$. $DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (высота в равностороннем ΔBDC).

Следовательно, $AH = AD + DH$, или $AH = 2a \cdot \cos 10° + \frac{a\sqrt{3}}{2}$ *(2)*

Из *(1)* и *(2)* получим: $\frac{a}{2} ctg 10° = 2a \cdot \cos 10° + \frac{a\sqrt{3}}{2}$, или $ctg 10° - 4\cos 10° = \sqrt{3}$, что и требовалось доказать.

Несколько задач предложим для самостоятельного решения.

Задача 7. На сторонах AC и AB *треугольника Аль-Беруни* взяты точки K и N соответственно – так, что $\angle KBC = 70°$, $\angle NCB = 60°$. Найдите величину угла NKB.

Задача 8. На стороне AC отложили $AQ = BC$. Найдите величину угла QBC.

Задача 9. В треугольнике Аль-Беруни $D \in AC$ и $E \in AB$ – такие, что $CD = AE = BC$. Найдите $\angle ADE$.

Задача 10. Воспользовавшись треугольником Аль-Беруни, докажите тригонометрическое равенство: $\frac{1}{2\sin 10°} - 2\sin 70° = 1$.

Литература

1. Александров И.И. Сборник геометрических задач на постренение. – М.: Учпедгиз, 1950.
2. Архимед Сочинения. – М.: ГИФМЛ, 1962.
3. Баран О.І. Математичні мініатюри. – Харків, Основа, 2003.
4. Барыбин К.С. Сборник еометрических задач на доказательство. – М. Учпедгиз, 1954.
5. Бевз Г.П. Геометрія кіл. – Харків, Основа, 2004
6. Бевз Г.П. Геометрія чотирикутника. – Харків, Основа, 2003.
7. Билецкий Ю., Филипповский Г. Чертежи на песке. – К.: Факт, 2000.
8. Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. – М.: ГИФМЛ, 1959.
9. Великина П.Я. Сборник задач по геометрии. – М.: Просвещение, 1971.
10. Воробець Б.Д. 200 задач з планіметрЇ. – Львів, ВНТЛ, 1997.
11. Вышенский В.А. и др. Сборник задач Киевских математических олимпиад. – К.: Выща школа, 1984.
12. Гельфанд М.Б., Павлович В.С. Внеклассная работа по математике. – М.: Просвещение, 1965.
13. Глейзер Г.И. История математики в школе, VII – VIII классы. – М.: Просвещение, 1982.
14. Делоне Б., Житомирский О. Задачник по геометрии. – М.: Физматгиз, 1959.
15. Еленьский Щепан. По следам Пифагора. – М.: Детгиз, 1961.
16. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1962.
17. Игудисман О.С. Математика на устном экзамене. – М.: Московский лицей, 1997.
18. Каган В.Ф. Архимед. – М.: ГИТТЛ, 1949.
19. Кованцов Н.И. Математика и романтика. – К.: Вища школа, 1980.
20. Кованцов М.І. Математична хрестоматія.-К.: Радянська школа, 1970.
21. Конфорович А.Г. Визначні математичні задачі. – К.: Радянська школа, 1981.
22. Крысицкий В. Шеренга великих математиков. – Варшава, Наша Ксенгарня, 1970.
23. Кушнир И. Альтернативные способы решения задач (Геометрия). К: Факт, 2006.
24. Кушнір І.А. Методи розв'язання задач з геометрії. – К.: Абрис, 1994.
25. Кушнір І.Ф. Трикутник і тетраедр у задачах. – К.: Радянська школа, 1991.
26. Лурье М.В. Геометрия. Техника решения задач. – М.: УНЦДО, 2002.
27. Лурье С.Я. Архимед. – М.: Издательство АН СССР, 1945.
28. Пидоу Д. Геометрия и искусство. – М.: Мир, 1979.
29. Прасолов В.В. Геометрические задачи древнего мира. – М.: Фазис, 1997.

30. Розенфельд Б.А. Аполлоний Пергский. – М.: МЦНМО, 2004.
31. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.
32. Ткачук В.В. Математика абитуриенту. – М.: МЦНМО, 2006.
33. Филипповский Г. Школьная геометрия в миниатюрах. – К.: Грот, 2002.
34. Халамайзер А.Я. Пифагор. – М.: Высшая школа, 1994.
35. Черватюк О.Г., Шиманська Г.Д. Елементи цікавої математики. – К.: Радянська школа, 1968.
36. Чистяков В.Д. Старинные задачи по элементарной математике. – Минск: Вышейша школа, 1978.
37. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: Наука, 1986. Библиотечка "Квант".
38. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. – М.: Астрель, 2001.
39. Ямвлих. О Пифагоровой жизни. – М.: Алетейа, 2002.

Григорий Филипповский
Авторская школьная геометрия
Части 1 и 2

Верстка: Алексей Глушич
Обложка: Лейла Наврозашвили

Бумага офсетная, формат 60x84 1/16.
Печать лазерная.

g.filippovsky@yandex.ua

Киев, 2012