А.Г. Мерзляк,
В.Б. Полонский,
Е.М. Рабинович,
М.С. Якир

СБОРНИК

задач и заданий для тематического оценивания по геометрии для 11 класса

Рекомендовано Министерством науки и образования Украины

Харьков
«Гимназия»
2006

Тематическое распределение тренировочных упражнений

Тема	Номера упражнений
Двугранные и трехгранные углы	1–16
Многогранники. Призма	17–21
Прямая призма	22–39
Наклонная призма	40–47
Сечения призмы	48–60
Параллелепипед	61–73
Пирамида	74–125
Сечения пирамиды	126–134
Усеченная пирамида	135–140
Правильные многогранники	141–146
Цилиндр	147–162
Вписанная и описанная призмы	163–178
Конус	179–190
Усеченный конус	191–199
Вписанная и описанная пирамиды	200–208
Шар	209–229
Вписанные и описанные многогранники	230–248
Объем прямого параллелепипеда	249–267
Объем наклонного параллелепипеда	268–274
Объем прямой призмы	275–297
Объем наклонной призмы	298–303
Объем пирамиды	304–330
Объем усеченной пирамиды	331–339
Равновеликие тела	340–344
Объемы подобных тел	345–351
Объем цилиндра	352–365
Объем конуса	366–377
Объем усеченного конуса	378–383
Объем шара. Объем шарового сегмента и шарового сектора	384–396
Площадь боковой поверхности цилиндра	397–413
Площадь боковой поверхности конуса	414–431
Площадь боковой поверхности усеченного конуса	432–437
Площадь сферы	438–447
Комбинации тел	448–476

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Вариант 1

Двугранные и трехгранные углы

1. В гранях двугранного угла проведены прямые a и b, параллельные его ребру, на расстоянии 10 см и 6 см от него соответственно. Найти величину этого двугранного угла, если расстояние между прямыми a и b равно 14 см.
2. Двугранный угол равен 30°. Плоскость α пересекает грани двугранного угла по параллельным прямым, удаленным от ребра двугранного угла на $2\sqrt{3}$ см и 6 см. Найти расстояние от ребра двугранного угла до плоскости α.
3. Равносторонний треугольник ABC лежит в одной из граней двугранного угла, а сторона AB принадлежит его ребру. Найти величину двугранного угла, если расстояние от вершины C треугольника до другой грани равно 2 см, а сторона треугольника равна $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см.
4. Величина двугранного угла равна 60°. На его ребре выбраны точки A и B, расстояние между которыми 24 см, а в гранях — точки C и D такие, что $AC = BC = 13$ см, $AD = BD = 15$ см. Найти расстояние между точками C и D.
5. Равносторонний треугольник ABE и квадрат $ABCD$ лежат в гранях двугранного угла с ребром AB. Найти величину двугранного угла, если $AB = 4\sqrt{2}$ см, $ED = 4$ см.
6. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) лежит в одной из граней двугранного угла с ребром AB, величина которого равна 45°. Найти углы, которые образуют катеты этого треугольника с другой гранью.

7. Из точек M и K, лежащих в разных гранях двугранного угла величиной 60°, проведены перпендикуляры MM_1 и KK_1 к его ребру длиной 3 см и 8 см соответственно. Найти длину отрезка MK, если $M_1K_1 = \sqrt{15}$ см.
8. Из точек A и B, лежащих в разных гранях двугранного угла, проведены к его ребру перпендикуляры AC и BD длиной 5 см и 8 см соответственно. Найти величину двугранного угла, если $CD = 24$ см, $AB = 25$ см.
9. В одной из граней двугранного угла проведена прямая, образующую с ребром двугранного угла угол 60°, а со второй гранью — угол 45°. Найти величину двугранного угла.
10. Точка D находится вне плоскости равностороннего треугольника ABC со стороной 4 см. Плоскости DAB, DBC и DAC образуют с плоскостью ABC углы 30°, 30° и 90° соответственно. Найти длину отрезка DB.
11. Точка A находится внутри двугранного угла, равного 60°, и удалена от его граней на 8 см и 11 см. Найти расстояние от точки A до ребра двугранного угла.
12. Проекция прямой на плоскость одной из граней двугранного угла перпендикулярна его ребру. Доказать, что проекция этой прямой на плоскость другой грани также перпендикулярна его ребру.
13. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от граней данного двугранного угла.
14. Все плоские углы трехгранного угла прямые. Точка A находится внутри трехгранного угла на расстоянии 4 см, 8 см и 6 см от его ребер. Найти расстояние от точки A до вершины трехгранного угла.
15. В трехгранном угле плоские углы равны 60°, 60° и 90°. Найти величины двугранных углов, лежащих против равных плоских углов.
16. Все плоские углы трехгранного угла равны 60°. Найти его двугранные углы.

Многогранники. Призма

17. Нарисуйте многогранник, у которого 6 вершин и 5 граней.

18. Нарисуйте многогранник, у которого 5 вершин и 5 граней.
19. Существует ли призма, у которой только одно боковое ребро перпендикулярно плоскости основания?
20. Какой многоугольник лежит в основании призмы, имеющей: 1) 5 граней; 2) 14 граней; 3) k граней?
21. Существует ли призма, имеющая 16 ребер?

Прямая призма

22. В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 4 см. Найти диагонали призмы, если ее боковое ребро равно 7 см.
23. В основании прямой призмы лежит ромб с острым углом 60° и стороной 8 см. Найти диагонали призмы, если ее боковое ребро равно 4 см.
24. В основании прямой призмы лежит квадрат. Диагональ призмы равна 17 см, а высота — 15 см. Найти длину диагонали боковой грани призмы.
25. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция, основания которой 12 см и 18 см, а высота — 3 см. Найти величины двугранных углов при боковых ребрах призмы.
26. В основании правильной призмы лежит квадрат со стороной 4 см, а диагональ призмы образует с боковой гранью угол 30°. Найти высоту призмы и угол, образуемый диагональю призмы с ее основанием.
27. Найти сторону основания и меньшую диагональ правильной шестиугольной призмы, если ее большая диагональ равна $8\sqrt{5}$ см, а все ребра призмы равны между собой.
28. В основании призмы лежит правильный треугольник со стороной 8 см, а ее боковые грани — прямоугольники. Найти боковую поверхность и полную поверхность призмы, если ее высота равна 12 см.
29. Найти площадь полной поверхности прямой призмы, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с основанием 8 см и проведенной к ней высотой, равной 3 см, если высота призмы равна 6 см.
30. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями 16 см и 30 см, а диагональ боковой грани призмы образует с основанием угол 60°. Найти площадь боковой поверхности призмы.
31. Стороны основания прямой треугольной призмы равны 10 см, 17 см и 21 см, а площадь полной поверхности призмы — 312 см^2. Найти длину ее бокового ребра.

32. Основание прямой призмы — трапеция с основаниями 10 см и 22 см. Найти полную поверхность призмы, если три ее боковые грани — квадраты со стороной 10 см.

33. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы равна 64 см^2, а полная поверхность — 96 см^2. Найти высоту призмы.

34. В правильной шестиугольной призме большая диагональ равна 8 см и образует с плоскостью основания угол 30°. Найти площадь полной поверхности призмы.

35. Радиус окружности, описанной около основания правильной треугольной призмы, равен $2\sqrt{3}$ см. Найти площадь полной поверхности призмы, если все ее боковые грани — квадраты.

36. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция, меньшее основание которой равно 8 см, а острый угол 60°. Диагонали трапеции — биссектрисы ее острых углов. Найти площадь боковой поверхности призмы, если диагонали призмы образуют с основанием угол 30°.

37. Площадь основания правильной треугольной призмы равна S, а диагональ боковой грани образует с боковым ребром угол α. Найти площадь боковой поверхности призмы.

38. Найти площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, если диагональ ее боковой грани равна l и образует с боковым ребром угол α.

39. В основании прямой призмы лежит ромб, большая диагональ которого равна d. Диагональ боковой грани образует с плоскостью основания угол α, а с данной диагональю основания — угол β. Найти площадь боковой поверхности призмы.

Наклонная призма

40. Боковое ребро наклонной призмы равно 12 см и образует с плоскостью основания угол 30°. Найти длину высоты призмы.

41. В основании призмы лежит трапеция. Через середины непараллельных сторон верхнего и нижнего оснований призмы проведена плоскость. Площадь части этой плоскости, расположенной внутри призмы, равна 24 см^2, а площадь грани, содержащей большее основание трапеции, — 36 см^2. Найти площадь грани призмы, содержащей меньшее основание трапеции.

42. В основании наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = 10$ см, $BC = 16$ см. Боковое ребро призмы AA_1 образует с плоскостью основания угол 30°, а ортогональная проекция вершины A_1 верхнего основания на плоскость нижнего — середина отрезка BC. Найти площадь грани BB_1C_1C.

43. Расстояния между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равны 4 см, 5 см и 7 см, а площадь ее боковой поверхности — 48 см^2. Найти длину бокового ребра призмы.

44. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны. Их общее боковое ребро равно 12 см и удалено от двух других боковых ребер на 8 см и 15 см. Найти площадь боковой поверхности призмы.

45. В основании призмы лежит правильный треугольник со стороной 6 см. Одна из боковых граней — квадрат, а две другие — параллелограммы с острым углом 30°. Найти площадь полной поверхности призмы.

46. Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно 8 см, а одно из боковых ребер образует со смежными сторонами основания углы по 45°. Найти площадь полной поверхности призмы.

47. В основании призмы лежит прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Две боковые грани, содержащие меньшие стороны основания, перпендикулярны плоскости основания, а две других образуют с ней угол 30°. Найти боковое ребро призмы, если площадь ее полной поверхности равна 316 см^2.

Сечения призмы

48. Найти ребро куба, если площадь его диагонального сечения равна $16\sqrt{2}$ см^2.

49. В основании прямой призмы лежит параллелограмм со сторонами 8 см и 15 см и острым углом 60°. Площадь меньшого из диагональных сечений призмы равна 130 см^2. Найти площадь боковой поверхности призмы.

50. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 8 см, а острый угол 30°. Через катет треугольника, лежащий против угла 30°, проведено сечение, образующее угол 60° с плоскостью основания и пересекающее боковое ребро. Найти площадь сечения.

51. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 4 см, а ее высота — 8 см. Найти площадь сечения призмы, проходящего через диагональ основания параллельно диагонали призмы.

52. Через сторону основания правильной треугольной призмы со стороной основания a проведено сечение, пересекающее боковое ребро призмы в его середине и образующее с плоскостью основания угол α. Найти площадь боковой поверхности призмы.

53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма (рис. 1). Точки M и N принадлежат ребрам AA_1 и CD соответственно. Перерисовать рисунок в тетрадь и построить точку пересечения прямой MN с плоскостью $A_1B_1C_1$.

54. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонная четырехугольная призма (рис. 2). Точка F принадлежит ребру AA_1, а точка E — грани CC_1B_1B. Перерисовать рисунок в тетрадь и построить точки пересечения прямой FE с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$, если прямая FE им не параллельна.

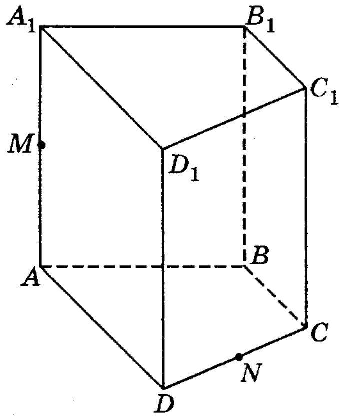

Рис. 1

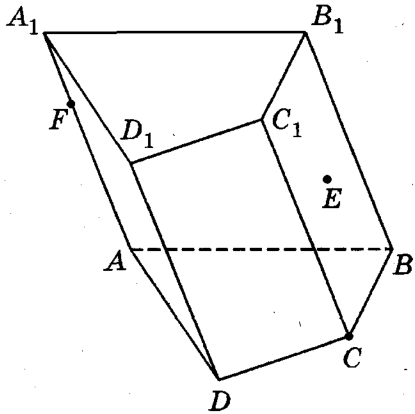

Рис. 2

55. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма, в основании которой лежит параллелограмм. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, N и K, принадлежащие ребрам: 1) AA_1, BB_1 и CC_1 соответственно; 2) AA_1, CC_1 и AD соответственно.

56. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма (рис. 3). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точку A и точки E и F, лежащие на ребрах BB_1 и B_1C_1 соответственно.

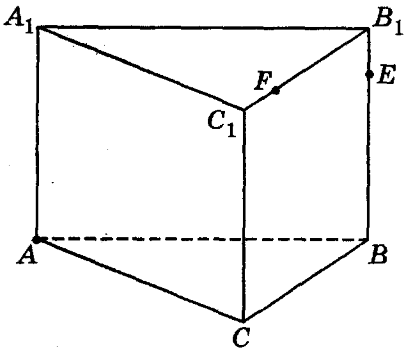

Рис. 3

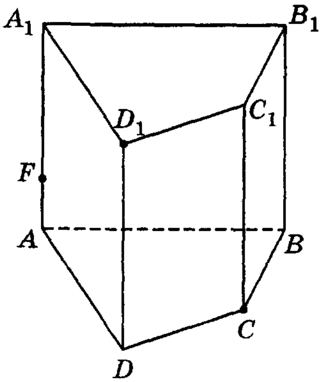

Рис. 4

57. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма (рис. 4). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить сечение призмы плоскостью, проходящей через вершины C и D_1 и точку F на ребре AA_1.

58. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма. Построить ее сечение плоскостью, проходящей через точки E, F и K, принадлежащие ребрам CD, BB_1 и A_1D_1 соответственно.

59. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма (рис. 5). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки H и M, принадлежащие граням AA_1B_1B и DD_1C_1C соответственно и точку E ребра AD.

60. Может ли сечение куба плоскостью быть: 1) правильным треугольником; 2) ромбом?

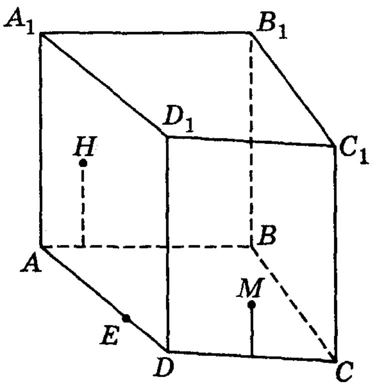

Рис. 5

Параллелепипед

61. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 5 см и 6 см, а диагональ — $\sqrt{65}$ см. Найти площадь полной поверхности параллелепипеда.

62. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 15 см, а диагональ боковой грани — 12 см. Найти высоту параллелепипеда, если площадь его боковой поверхности равна $108\sqrt{7}$ см^2.

63. Найти линейные размеры прямоугольного параллелепипеда, если сумма длин всех его ребер равна 180 см, а линейные размеры относятся как 4 : 5 : 6.

64. Найти площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ больше линейных размеров на 10 см, 9 см и 1 см соответственно.

65. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Найти высоту параллелепипеда, если площадь его полной поверхности равна 160 см^2, а площадь боковой поверхности — 128 см^2.

66. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как 3 : 5, а диагонали боковых граней равны 10 см и $2\sqrt{41}$ см. Найти длины ребер параллелепипеда.

67. В прямоугольном параллелепипеде диагональ d образует с плоскостью основания угол α, а с плоскостью боковой грани угол β. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда.

68. Основание прямого параллелепипеда — ромб со стороной 16 см и острым углом 60°. Найти длину большей диагонали параллелепипеда, если его высота равна 30 см.

69. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 4 см и 8 см, а угол между ними 60°. Большая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда.

70. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площади его диагональных сечений равны 6 см^2 и 8 см^2.

71. В основании параллелепипеда лежит ромб с острым углом 60°. Боковое ребро, выходящее из вершины острого угла, образует со сторонами этого угла углы по 45°. Найти высоту параллелепипеда, если его боковое ребро равно 6 см.

72. В основании параллелепипеда лежит квадрат. Одна из вершин его верхнего основания одинаково удалена от вершин нижнего основания. Найти высоту параллелепипеда, если его боковое ребро равно 7,5 см, а сторона основания — $6\sqrt{2}$ см.

73. В основании параллелепипеда лежит ромб со стороной 6 см. Диагональное сечение, содержащее большую диагональ основания, перпендикулярно плоскости основания и имеет площадь 72 см^2. Найти меньшую диагональ основания, если боковое ребро параллелепипеда равно 8 см и образует с плоскостью основания угол 60°.

Пирамида

74. Найти сумму плоских углов треугольной пирамиды.

75. Существует ли пирамида, имеющая 11 ребер?

76. $SABC$ — правильная треугольная пирамида (рис. 6). Перерисовать рисунок в тетрадь и изобразить: 1) основание высоты пирамиды; 2) угол наклона ребра SA к плоскости основания; 3) линейный угол двугранного угла при ребре BC.

77. Все боковые ребра треугольной пирамиды $SABC$ равны между собой, SO — ее высота (рис. 7). Что можно сказать о виде треугольника ABC?

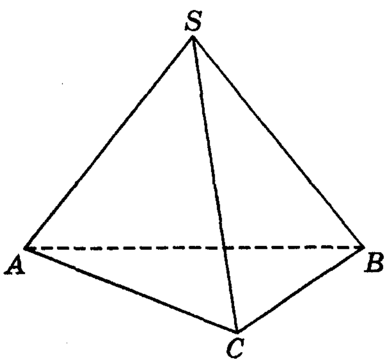

Рис. 6

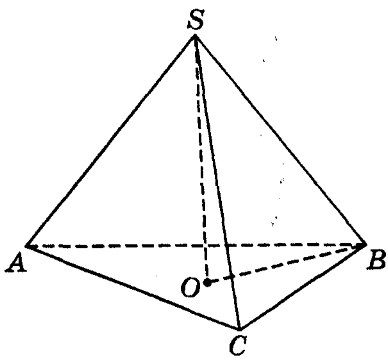

Рис. 7

78. В каких пределах может изменяться величина плоского угла при вершине правильной треугольной пирамиды?

79. Существует ли правильная шестиугольная пирамида, все ребра которой равны между собой?

80. Высота правильной треугольной пирамиды равна 8 см, а сторона основания — 6 см. Найти длину бокового ребра пирамиды.

81. Найти площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой 8 см, а боковое ребро — 10 см.

82. Найти апофему правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна 12 см, а диагональ основания — $4\sqrt{2}$ см.

83. Высота правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 45°. Найти сторону основания пирамиды.

84. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4 см, а ее апофема — 8 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

85. Плоский угол при вершине правильной девятиугольной пирамиды равен 30°, а боковое ребро — 8 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

86. Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности правильной пирамиды, если сторону основания увеличить в 3 раза, а апофему — в 2 раза?

87. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а высота — 3 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

88. Найти отношение площади основания правильной пирамиды к площади боковой поверхности, если апофема образует с плоскостью основания угол 60°.

89. В основании правильной пирамиды лежит треугольник со стороной 2 см, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 30°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

90. Найти площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 8 см, а высота — 4 см.

91. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 8 см и образует с плоскостью основания угол 30°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

92. В правильной треугольной пирамиде угол между апофемами равен 60°. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если сторона ее основания равна 4 см.

93. Каждое ребро правильной треугольной пирамиды равно 6 см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

94. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна 8 см, а радиус окружности, вписанной в основание, — 3 см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

95. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а высота — 4 см. Найти: 1) апофему пирамиды; 2) угол наклона бокового ребра к плоскости основания; 3) угол наклона боковой грани к плоскости основания; 3) площадь полной поверхности пирамиды.

96. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°, а радиус окружности, описанной около основания, равен $2\sqrt{3}$ см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

97. Площадь основания и площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды соответственно равны 16 см^2 и 76 см^2. Найти апофему и высоту пирамиды.

98. Апофема правильной треугольной пирамиды равна m и образует с плоскостью основания угол α. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

99. Радиус окружности, описанной около боковой грани правильной треугольной пирамиды, равен R, а плоский угол при вершине — α. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

100. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол α, а расстояние от основания высоты пирамиды до бокового ребра равно b. Найти длины ребер пирамиды.

101. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45°. Найти: 1) угол наклона боковой грани к плоскости основания; 2) плоский угол при вершине пирамиды; 3) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

102. В правильной треугольной пирамиде боковая грань образует с плоскостью основания угол α. Найти: 1) угол наклона бокового ребра к плоскости основания; 2) плоский угол при вершине пирамиды; 3) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

103. В правильной четырехугольной пирамиде боковая грань образует с плоскостью основания угол 30°, а расстояние от центра основания до бокового ребра равно 6 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

104. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно l, а плоский угол при вершине β. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

105. В основании пирамиды $SABCD$ (S — вершина) лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что $\angle SAC = \angle SCA$, $\angle SBD = \angle SDB$. Доказать, что основание высоты пирамиды — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.

106. В основании пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна 4 см, а все боковые ребра равны между собой.

107. В основании пирамиды лежит ромб с меньшей диагональю 4 см и острым углом 60°. Все боковые грани образуют с основанием пирамиды равные углы по 45°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

108. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом a и противоположным острым углом α. Все двугранные углы при основании пирамиды равны β. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

109. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, $AB = 6\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135^\circ$. Боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы в 30°. Найти высоту пирамиды.

110. В основании пирамиды лежит равнобокая трапеция, боковая сторона которой равна 4 см, а диагонали — биссектрисы острых углов трапеции. Найти высоту пирамиды, если острый угол трапеции равен 60°, а боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы в 30°.

111. В основании пирамиды лежит равнобокая трапеция, основания которой 8 см и 4 см. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°.

112. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом 2α при основании и радиусом вписанной окружности r. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если все двугранные углы при основании пирамиды равны β.

113. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC (рис. 8). Ребро SC перпендикулярно плоскости основания. Перерисовать рисунок в тетрадь и указать: 1) угол наклона грани ASB к плоскости основания; 2) углы наклона ребер SA и SB к плоскости основания.

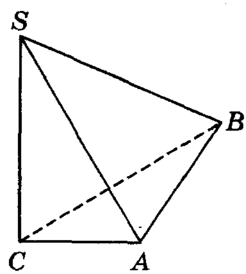

Рис. 8

114. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием 18 см и боковой стороной 15 см. Две боковые грани, содержащие равные стороны треугольника, перпендикулярны к плоскости основания, а их общее боковое ребро равно 5 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

115. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 20$ см, $AC = 16$ см. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и равно 18 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

116. В основании пирамиды лежит квадрат. Две смежные боковые грани перпендикулярны плоскостри основания, а две другие образуют с ней угол 30°. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если ее наименьшее боковое ребро равно 4 см.

117. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, $AC = BC = 10$ см, $\angle C = 150^\circ$. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если ребро SA перпендикулярно плоскости основания, а грань SBC образует с плоскостью основания угол 60°.

118. В основании пирамиды лежит параллелограмм со сторонами 20 см и 30 см и острым углом 30°. Боковое ребро, проходящее через вершину острого угла, перпендикулярно плоскости основания и равно 12 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

119. В основании пирамиды лежит правильный шестиугольник со стороной a. Высота пирамиды равна стороне основания и проходит через одну из вершин основания. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

120. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Две смежные боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с ней углы α и β. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна h.

121. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с острым углом 60° и прилежащим к нему катетом, равным 6 см. Боковые ребра образуют с плоскостью основания пирамиды равные углы по 30°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

122. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 8 см и углом при основании 30°. Боковая грань, содержащая основание треугольника, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие образуют с ней угол 30°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

123. В основании пирамиды лежит треугольник ABC, $AB = 15$ см, $BC = 26$ см, $AC = 37$ см. Грань SBC перпендикулярна плоскости основания, а ребро SA равно $12\sqrt{2}$ см. Найти площадь грани SBC.

124. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$ см, $\angle A = 30^\circ$. Боковая грань SBC перпендикулярна плоскости основания, а две другие образуют с плоскостью основания угол 30°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

125. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, $AB = 8$ см, $BC = 15$ см. Грань SAB перпендикулярна плоскости основания, а грани SAD и SBC образуют с основанием равные углы 60°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Сечения пирамиды

126. В плоскости основания пирамиды $SABC$ взята точка F (рис. 9). Через нее проведена прямая, пересекающая боковое ребро SB в точке E. Перерисовать рисунок в тетрадь и построить точку пересечения прямой FE с гранью ASC.

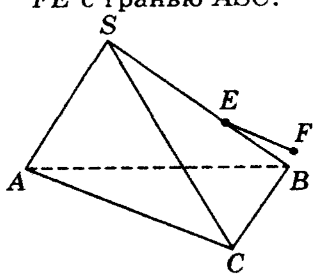

Рис. 9

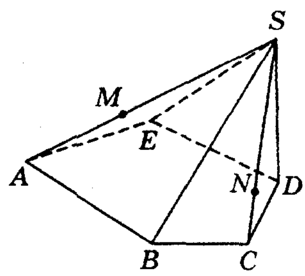

Рис. 10

127. Точки M и N принадлежат боковым ребрам SA и SC пирамиды $SABCDE$ (рис. 10). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить точку пересечения прямой MN с плоскостью ABC.

128. Построить сечение треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через вершину S, точку на ребре AC и параллельной прямой BC.

129. $SABC$ — треугольная пирамида (рис. 11). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку N на ребре SA и параллельной прямым AB и SC.

130. Построить сечение треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 12) плоскостью, проходящей через точки M, P и K, принадлежащие ребрам SA, AC и SB соответственно.

131. Высота пирамиды равна H. На каком расстоянии от вершины пирамиды надо провести сечение, параллельное основанию, чтобы площадь сечения составляла половину площади основания?

132. В правильной четырехугольной пирамиде через точку, делящую высоту пирамиды в отношении 2 : 3, считая от вершины, проведено сечение, параллельное основанию. Его площадь равна 4 см^2. Найти сторону основания пирамиды.

133. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, сторона основания которой равна a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ AC основания параллельно ребру SB.

134. В правильной четырехугольной пирамиде через середины двух смежных боковых ребер проведено сечение, параллельное высоте пирамиды. Найти площадь сечения, если боковое ребро пирамиды равно 12 см, а диагональ основания — $8\sqrt{2}$ см.

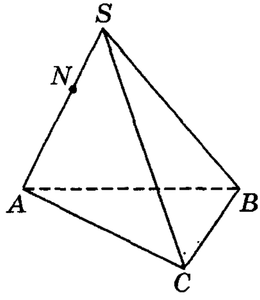

Рис. 11

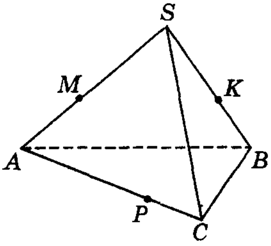

Рис. 12

Усеченная пирамида

135. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная пирамида (рис. 13). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить: 1) угол наклона бокового ребра к плоскости основания; 2) угол наклона боковой грани к плоскости основания.

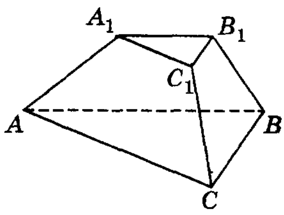

Рис. 13

136. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 8 см и 6 см, а боковое ребро — 5 см. Найти площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

137. Основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 10 см и 6 см, а боковое ребро образует с плоскостью большего основания угол 45°. Найти площадь диагонального сечения пирамиды.

138. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде диагонали оснований равны 10 см и 6 см, а боковая грань образует с плоскостью большего основания угол 60°. Найти высоту пирамиды.

139. В правильной усеченной треугольной пирамиде стороны оснований равны 8 см и 16 см, а высота пирамиды — 4 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

140. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 2 см и 8 см, а высота пирамиды — 6 см. Через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований проведено сечение. Найти площадь этого сечения.

Правильные многогранники

141. Сколько четырехгранных углов имеет октаэдр?

142. Найти сумму плоских углов при всех вершинах икосаэдра.

143. Площадь полной поверхности икосаэдра равна 480 см^2. Найти площадь одной из его граней.

144. Длина ребра октаэдра равна 6 см. Найти площадь его полной поверхности.

145. Найти площадь полной поверхности куба, если его диагональ равна d.

146. Доказать, что центры граней куба — вершины октаэдра. Найти отношение площадей их поверхностей.

Цилиндр

147. Площадь осевого сечения цилиндра равна 156 $см^2$. Найти высоту цилиндра, если радиус его основания равен 6 см.

148. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 см и образует с плоскостью основания цилиндра угол 30°. Найти высоту цилиндра и площадь его основания.

149. Радиус основания цилиндра равен 8 см, а диагональ осевого сечения больше образующей на 2 см. Найти площадь осевого сечения цилиндра.

150. Высота цилиндра равна 5 см. На расстоянии 4 см от его оси проведено сечение, перпендикулярное основаниям цилиндра. Найти радиус основания, если диагональ сечения равна 13 см.

151. Осевое сечение цилиндра — квадрат со стороной $2\sqrt{5}$ см. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, диагональ которого равна 5 см. Найти площадь этого сечения.

152. Через образующую цилиндра проведено осевое сечение и сечение, плоскость которого образует с плоскостью осевого сечения угол 30°. Найти площадь осевого сечения, если площадь второго сечения равна Q.

153. Квадрат со стороной 6 см вращается вокруг одной из сторон. Найти: 1) площадь осевого сечения образованного цилиндра; 2) длину окружности основания образованного цилиндра; 3) площадь сечения, проходящего параллельно оси образованного цилиндра на расстоянии 3 см от нее.

154. Площадь осевого сечения цилиндра равна Q. Найти площадь сечения цилиндра, проходящего параллельно оси цилиндра на расстоянии, равном половине радиуса основания цилиндра.

155. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, площадь которого равна 48 $см^2$, а стороны сечения относятся как 2 : 3. Найти радиус основания цилиндра, если расстояние от плоскости сечения до оси равно 4 см, а высота цилиндра больше радиуса основания.

156. Через образующую цилиндра проведены два взаимно перпендикулярных сечения, площади которых 8 $см^2$ и 15 $см^2$. Найти площадь осевого сечения цилиндра.

157. Параллельно оси цилиндра, высота которого больше диаметра основания, проведено сечение, параллельное оси цилиндра. Площадь сечения равна 6 см^2, а его периметр — 10 см. Найти высоту цилиндра и радиус его основания, если сечение отсекает от оснований цилиндра дуги по 120°.

158. Высота и радиус основания цилиндра соответственно равны 5 см и 10 см. Концы отрезка длиной 13 см лежат на окружностях разных оснований цилиндра. Найти расстояние от оси цилиндра до прямой, содержащей этот отрезок.

159. Развертка боковой поверхности цилиндра — квадрат. Найти меньший из углов между диагоналями осевого сечения цилиндра.

160. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, пересекающее нижнее основание цилиндра по хорде, которую видно из центра верхнего основания под углом α, а длина отрезка, соединяющего центр верхнего основания с серединой этой хорды, равна m. Найти радиус основания цилиндра, если расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения равно l.

161. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, площадь которого равна S, а диагональ сечения образует с плоскостью основания угол α. Сечение пересекает нижнее основание цилиндра по хорде, которую видно из центра этого основания под углом β. Найти высоту и радиус основания цилиндра.

162. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, диагональ которого равна d и которое пересекает нижнее основание по хорде, которую видно из его центра под углом α. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой этой хорды, образует с плоскостью основания угол γ. Найти площадь сечения цилиндра.

Вписанная и описанная призмы

163. Можно ли описать цилиндр около прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольник?

164. Можно ли вписать цилиндр в призму, в основании которой лежит ромб?

165. Определить вид треугольника, лежащего в основании призмы, вписанной в цилиндр, если ось цилиндра проходит вне призмы.

166. В основании прямой четырехугольной призмы лежит четырехугольник $ABCD$, углы которого равны: $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 123^\circ$, $\angle C = 144^\circ$, $\angle D = 57^\circ$. Можно ли описать цилиндр вокруг этой призмы?

167. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция, боковая сторона которой равна меньшему основанию. Можно ли вписать цилиндр в эту призму?

168. Суммы площадей противоположных граней прямой четырехугольной призмы равны 18 см^2 и 24 см^2. Можно ли вписать цилиндр в эту призму?

169. В цилиндр вписана призма, у которой площади боковых граней равны. Доказать, что призма правильная.

170. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а вокруг него описана правильная шестиугольная призма. Найти отношение площадей боковых поверхностей этих призм.

171. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник. Высота призмы равна 10 см, а площадь боковой поверхности — 40 см^2. Найти радиус основания цилиндра, описанного вокруг этой призмы.

172. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a, а высота призмы H. Найти площадь осевого сечения цилиндра, описанного вокруг призмы.

173. Площадь осевого сечения цилиндра равна S. Найти площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, вписанной в этот цилиндр.

174. В правильную четырехугольную призму вписан цилиндр, радиус основания которого R, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол α. Найти площадь боковой поверхности призмы.

175. Высота треугольной призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с острым углом α, равна H. Площадь боковой поверхности призмы равна S. Найти радиус основания цилиндра, описанного вокруг призмы.

176. В правильную треугольную призму вписан цилиндр, высота которого равна H, а радиус основания R. Найти площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей через две его образующие, по которым боковая поверхность цилиндра касается боковой поверхности призмы.

177. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании. Диагональ грани, содержащей основание этого треугольника, образует с плоскостью основания призмы угол β. Найти площадь боковой поверхности призмы, если радиус основания цилиндра, описанного вокруг призмы, равен R.

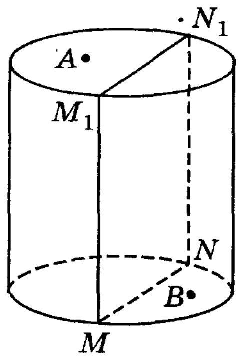

Рис. 14

178. MM_1N_1N — осевое сечение цилиндра, параллельное его оси (рис. 14). Точки A и B лежат на основаниях цилиндра. Перерисовать рисунок в тетрадь и построить точку пересечения прямой AB с плоскостью MM_1N_1.

Конус

179. Доказать, что каждая точка оси конуса равноудалена от его образующих.

180. Высота конуса равна 9 см, а его образующая — 11 см. Найти радиус основания конуса.

181. Найти высоту конуса и радиус его основания, если его образующая равна 12 см, а осевое сечение конуса — правильный треугольник.

182. Высота конуса равна 12 см, а разность образующей и радиуса основания равна 8 см. Найти площадь осевого сечения конуса.

183. Высота конуса равна 18 см, а радиус основания — 6 см. Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает его боковую поверхность по окружности, радиус которой 4 см. Найти расстояние от плоскости сечения до плоскости основания конуса.

184. Радиус основания конуса равен 9 см, а его высота разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные его основанию. Найти площади полученных сечений.

185. При каком соотношении между радиусом основания R конуса и его высотой H угол при вершине осевого сечения конуса будет: 1) острым; 2) прямым; 3) тупым?

186. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 30°, а радиус окружности, описанной около осевого сечения конуса, — 6 см. Найти высоту конуса.

187. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α, а площадь осевого сечения равна Q. Найти длину окружности основания конуса.

188. Через вершину конуса проведено сечение, пересекающее его основание по хорде длиной 12 см. Эту хорду видно из центра основания под углом 60°. Найти угол между плоскостью сечения и плоскостью основания конуса, если площадь сечения равна 72 см^2.

189. Два конуса, радиусы оснований которых 6 см и 4 см, имеют общую высоту, а их основания параллельны. Найти длину окружности, по которой пересекаются боковые поверхности этих конусов.

190. В основании конуса проведена хорда длиной m, которую видно из центра основания под углом α. Найти высоту конуса, если угол между образующей конуса и плоскостью основания равен β.

Усеченный конус

191. В усеченном конусе высота равна 10 см, а угол между образующей и плоскостью большего основания — 30°. Найти образующую усеченного конуса и разность радиусов его оснований.

192. Длина образующей усеченного конуса равна 15 см, высота — 12 см, а один из радиусов оснований — 6 см. Найти площадь осевого сечения усеченного конуса.

193. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 9 : 5. Найти площадь осевого сечения конуса, если его высота равна 15 см, а образующая — 17 см.

194. Площади оснований усеченного конуса равны 9 см^2 и 25 см^2. Через середину его высоты проведено сечение, параллельное основаниям. Найти площадь этого сечения.

195. Радиусы оснований усеченного конуса равны 10 см и 8 см, а образующая перпендикулярна диагонали осевого сечения, проходящего через эту образующую. Найти площадь осевого сечения усеченного конуса.

196. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 см и 9 см, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью большего основания угол 30°. Найти образующую конуса.

197. Радиусы оснований усеченного конуса равны 7 см и 12 см, а его образующая равна радиусу одного из оснований. Найти площадь осевого сечения конуса. Сколько решений имеет задача?

198. Образующая усеченного конуса равна l и образует с плоскостью большего основания угол α. Найти радиусы оснований усеченного конуса и площадь этого осевого сечения, если диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол β.

199. В усеченном конусе проведено осевое сечение MM_1N_1N и по разные стороны от него на окружностях оснований выбраны точки A и B (рис. 15). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить точку пересечения прямой AB с плоскостью MM_1N_1.

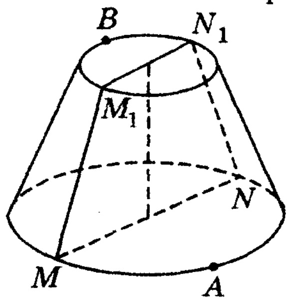

Рис. 15

Вписанная и описанная пирамиды

200. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. Доказать, что высотой конуса является высота грани пирамиды, содержащая гипотенузу треугольника основания.

201. Можно ли вокруг конуса описать пирамиду, в основании которой лежит ромб?

202. Можно ли описать конус вокруг четырехугольной пирамиды, углы основания которой в порядке следования относятся как 2 : 4 : 7 : 5? Где должно находиться основание высоты пирамиды?

203. В основании пирамиды лежит прямоугольник, диагональ которого равна 8 см. Все боковые ребра пирамиды равны между собой и образуют с плоскостью основания углы по 30°. Найти площадь осевого сечения конуса, описанного вокруг пирамиды.

204. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, основание которого 16 см, а боковая сторона — 10 см. В пирамиду вписан конус. Найти площадь осевого сечения конуса, если высота конуса равна 9 см.

205. Высота конуса равна $4\sqrt{3}$ см, а угол между ней и образующей — 30°. Вокруг конуса описана четырехугольная пирамида, в основании которой лежит трапеция, средняя линия которой равна 10 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

206. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом при вершине 90°. Высота пирамиды равна 15 см, а площадь основания — 50 см^2. Найти образующую конуса, вписанного в пирамиду.

207. Основания усеченной пирамиды — квадраты, площади которых равны 16 см^2 и 36 см^2, а площадь ее боковой поверхности — 40 см^2. Найти площадь осевого сечения усеченного конуса, вписанного в эту пирамиду.

208. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, площадь которого равна Q, а острый угол α. Боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол β. Найти площадь осевого сечения конуса, описанного вокруг пирамиды.

Шар

209. Радиус шара равен $\sqrt{5}$ см. Внутри или вне шара размещена точка A, если она удалена: 1) от центра шара на 2 см; 2) от центра шара на 2,3 см; 3) от точки на поверхности шара на 4,5 см?

210. К сфере радиусом 8 см проведена касательная плоскость. На этой плоскости взята точка A на расстоянии 6 см от точки касания. Найти наибольшее и наименьшее расстояния от точки A до точек сферы.

211. Сфера пересечена плоскостью на расстоянии 12 см от центра. Длина линии пересечения сферы с плоскостью равна 10π см. Найти радиус сферы.

212. Через конец радиуса шара проведена плоскость, образующая с ним угол 30°. Найти площадь сечения, если радиус шара равен 6 см.

213. Площадь большого круга данного шара равна Q, а площадь сечения шара плоскостью равна $\frac{Q}{2}$. На каком расстоянии от центра шара проведено сечение?

214. Диаметр шара двумя точками разделен на три части в отношении 2 : 3 : 5. Найти отношение площадей сечений шара, проходящих через эти точки перпендикулярно диаметру.

215. Вершины прямоугольного треугольника лежат на поверхности шара, радиус которого 6 см. Найти расстояние от центра шара до плоскости треугольника, если его гипотенуза равна 4 см.

216. Вершины равнобедренного треугольника с основанием 16 см и углом 150° при вершине лежат на поверхности шара. Расстояние от центра шара до плоскости треугольника равно 12 см. Найти радиус шара.

217. Радиус шара равен 16 см. Шар касается сторон правильного треугольника со стороной 48 см. Найти расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

218. Шар касается всех сторон трапеции, основания которой равны 16 см и 36 см. Найти расстояние от центра шара до плоскости трапеции, если радиус шара равен 13 см.

219. Шар касается двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Расстояние между точками касания равно 8 см. Найти расстояние от центра шара до линии пересечения плоскостей.

220. Два шара имеют общий центр. Радиус одного из них равен 8 см. Плоскость пересекает поверхности этих шаров и проходит через их центр. Площадь части сечения, расположенного между поверхностями шаров, равна 36π см^2. Найти радиус второго шара.

221. Радиусы двух сфер равны 13 см и 15 см, а расстояние между их центрами — 14 см. Найти длину линии, по которой пересекаются поверхности этих сфер.

222. Высота цилиндра равна диаметру основания. Доказать, что в этот цилиндр можно вписать шар. Где находится центр этого шара?

223. Высота цилиндра равна H и образует с диагональю осевого сечения цилиндра угол α. Найти радиус шара, описанного вокруг цилиндра.

224. Радиус основания конуса равен 6 см, а угол при вершине осевого сечения конуса 30°. Найти радиус шара, описанного вокруг конуса.

225. Радиус основания конуса равен 15 см, а высота — 36 см. Найти радиусы шаров, вписанного в конус и описанного вокруг него.

226. Образующая конуса равна l и образует с плоскостью основания угол α. Найти радиусы шаров, вписанного в конус и описанного вокруг него.

227. В усеченный конус вписан шар. Под каким углом из центра шара видно образующую конуса?

228. Образующая усеченного конуса равна 12 см и образует с плоскостью большего основания угол 60°. В конус вписан шар. Найти радиус шара и радиусы оснований усеченного конуса.

229. Угол между образующей усеченного конуса и плоскостью большего основания равен α, а радиусы оснований конуса равны R и r. Найти радиус шара, описанного вокруг конуса.

Вписанные и описанные многогранники

230. В правильную треугольную призму вписан шар. Найти отношение стороны основания призмы к ее высоте.

231. Вокруг прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 1 см, 2 см и 5 см, описан шар. Найти его радиус.

232. Высота правильной четырехугольной призмы равна 6 см, а радиус описанного шара — 9 см. Найти площадь боковой поверхности призмы.

233. В прямоугольном параллелепипеде диагональ образует с плоскостью основания угол α, а диагональ основания образует с одной из сторон основания угол β. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда, если радиус шара, описанного вокруг него, равен R.

234. Найти радиус шара, вписанного в правильную шестиугольную призму, сторона основания которой равна 14 см.

235. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и острым углом 30°. В призму вписан шар. Найти радиус этого шара.

236. В прямую призму вписан шар, радиус которого равен 4 см. Найти площадь основания призмы, если площадь ее боковой поверхности равна 48 см^2.

237. В правильную треугольную призму вписан шар и вокруг нее описан шар. Найти отношение радиусов этих шаров.

238. В шар вписана правильная треугольная пирамида. Боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол 45°. Доказать, что центр шара совпадает с основанием высоты пирамиды.

239. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12 см, а ее диагональное сечение — прямоугольный треугольник. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

240. Найти радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, а двугранный угол при основании α.

241. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α, а радиус шара, вписанного в нее, равен r. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

242. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 9 см, а противоположные боковые грани образуют угол 60°. Найти радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

243. На поверхности шара выбрана точка M и из нее проведены три луча, пересекающие поверхность сферы в точках A, B и C. Найти радиус сферы, если $MA = MB = MC$, $\angle AMB = \angle AMC = \angle BMC = 60^\circ$, а расстояние от точки M до плоскости ABC равно 18 см.

244. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол α, а радиус описанной сферы равен R. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

245. Радиусы окружностей, описанных около основания и боковой грани правильной четырехугольной пирамиды, равны соответственно 8 см и $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ см. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

246. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна a, а плоский угол при вершине — α. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

247. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а двугранный угол при боковом ребре — α. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

248. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 8 см и углом при вершине 120°. Все боковые грани образуют с основанием угол 60°. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

Объем прямого параллелепипеда

249. Найти объем прямоугольного параллелепипеда, линейные размеры которого 3 см, 5 см и 4 см.

250. Площадь поверхности куба равна 96 $см^2$. Найти его объем.

251. Каждое ребро прямого параллелепипеда равно 6 см, а острый угол основания 30°. Найти объем параллелепипеда.

252. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 см и 8 см, а его диагональ образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем параллелепипеда.

253. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 10 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найти объем параллелепипеда, если разность сторон основания равна 1 см.

254. В прямоугольном параллелепипеде одна из сторон основания равна 8 см. Диагональ параллелепипеда равна 16 см и образует с боковой гранью, содержащей эту сторону, угол 45°. Найти объем параллелепипеда.

255. Меньшая сторона основания прямоугольного параллелепипеда равна 6 см, а угол между диагоналями основания равен 60°. Найти объем параллелепипеда, если его диагональ образует с плоскостью основания угол 30°.

256. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, меньшая диагональ которого равна 6 см, а острый угол 60°. Боковое ребро параллелепипеда в два раза меньше стороны основания. Найти объем параллелепипеда.

257. Диагонали AC_1 и B_1D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны и равны по 8 см. Найти объем параллелепипеда, если его высота равна $\sqrt{7}$ см.

258. Одна из сторон основания прямоугольного параллелепипеда равна 4 см, а угол между диагоналями основания, лежащий против этой стороны, — 60°. Сечение, проходящее через диагональ нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания, образует с плоскостью нижнего основания угол 45°. Найти объем параллелепипеда.

259. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм, стороны которого 5 см и 8 см, а острый угол 30°. Найти объем параллелепипеда, если площадь его боковой поверхности равна 104 $см^2$.

260. Линейные размеры одного прямоугольного параллелепипеда относятся как 3 : 4 : 5, а второго — как 2 : 3 : 4. Объем первого параллелепипеда в 2,5 раза больше объема второго. Найти отношение площадей полных поверхностей параллелепипедов.

261. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, диагонали которого относятся как 2 : 5. Найти объем параллелепипеда, если его диагонали равны 17 см и 25 см.

262. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$, $AB = a$, $BC = b$. Плоскость, проходящая через точки A, B и C_1, образует с плоскостью основания угол α. Найти объем параллелепипеда.

263. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм, острый угол которого равен α, а площадь — S. Площади двух смежных боковых граней параллелепипеда равны M и N. Найти объем параллелепипеда.

264. Длины диагоналей граней прямоугольного параллелепипеда равны 13 см, 15 см и $\sqrt{106}$ см. Найти объем параллелепипеда.

265. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 12 $см^2$, 15 $см^2$ и 20 $см^2$. Найти объем параллелепипеда.

266. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого образует с плоскостью основания угол 30°, а с одной из боковых граней — угол 45°. Найти объем параллелепипеда, если радиус основания цилиндра равен 3 см.

267. В шар радиуса R вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого образует с диагоналями боковых граней, выходящих с нею из одной вершины, углы α и β. Найти объем параллелепипеда.

Объем наклонного параллелепипеда

268. В основании наклонного параллелепипеда лежит параллелограмм, стороны которого 4 см и 9 см, а острый угол — 30°. Боковое ребро параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45° и равно 6 см. Найти объем параллелепипеда.

269. Боковое ребро наклонного параллелепипеда равно 9 см. Сечение параллелепипеда плоскостью, перпендикулярной боковому ребру — прямоугольник, стороны которого 6 см и 3 см. Найти объем параллелепипеда.

270. В основании наклонного параллелепипеда лежит квадрат со стороной 3 см. Боковое ребро параллелепипеда равно 4 см и образует со смежными сторонами основания, которые пересекает, равные углы по 60°. Найти объем параллелепипеда.

271. В основании наклонного параллелепипеда лежит прямоугольник со сторонами 2 см и 3 см, а боковое ребро параллелепипеда равно 7 см. Две смежные боковые грани образуют с плоскостью основания углы 60° и 45°. Найти объем параллелепипеда.

272. В основании наклонного параллелепипеда лежит квадрат со стороной 4 см. Две его противоположные грани — также квадраты, а две другие — ромбы с острым углом 60°. Найти объем параллелепипеда.

273. В основании наклонного параллелепипеда лежит ромб со стороной a и острым углом α. Боковое ребро, выходящее из вершины острого угла ромба, равно b и образует со сторонами ромба, которые пересекает, равные острые углы β. Найти объем параллелепипеда.

274. Боковое ребро наклонного параллелепипеда находится на расстоянии m от параллельного ему диагонального сечения. Найти объем параллелепипеда, если площадь этого диагонального сечения равна Q.

Объем прямой призмы

275. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с основанием 16 см и боковой стороной 17 см. Диагональ боковой грани, содержащей основание треугольника, образует с плоскостью основания угол 30°. Найти объем призмы.

276. Каждое ребро правильной шестиугольной призмы равно 4 см. Найти объем призмы.

277. Диагональное сечение правильной четырехугольной призмы — квадрат, площадь которого равна 16 см^2. Найти объем призмы.

278. В правильной шестиугольной призме диагонали равны 10 см и $2\sqrt{21}$ см. Найти объем призмы.

279. В правильной шестиугольной призме диагональ боковой грани равна l и образует с плоскостью основания угол α. Найти объем призмы.

280. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с основанием 8 см и боковой стороной 5 см. Высота призмы равна меньшей высоте основания. Найти объем призмы.

281. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, косинус одного из углов которого равен 0,6. Боковое ребро призмы равно 3 см, а ее объем — 162 см^3. Найти площадь боковой поверхности призмы.

282. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна с. Через один из катетов нижнего основания и середину противоположного бокового ребра проведено сечение, площадь которого равна Q. Найти объем призмы.

283. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция, основания которой 4 см и 16 см, а диаметр окружности, вписанной в трапецию, вдвое меньше диагонали призмы. Найти объем призмы.

284. Найти отношение объемов правильных треугольной и шестиугольной призм, если они имеют равные высоты и площади боковых поверхностей.

285. Через одну из вершин верхнего основания прямой треугольной призмы и противоположную ей сторону нижнего основания проведено сечение, образующее с плоскостью нижнего основания угол φ и имеющее площадь Q. Найти объем призмы, если ее высота равна H.

286. Объем правильной треугольной призмы равен V. Найти объем призмы, вершины которой — середины сторон оснований данной призмы.

287. Меньшее диагональное сечение правильной шестиугольной призмы — квадрат, а большая диагональ призмы равна $2d$. Найти объем призмы.

288. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен a, а прилежащий к нему угол — β. Диагональ грани, содержащей второй катет, образует с гранью, содержащей гипотенузу, угол α. Найти объем призмы.

289. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция с основаниями a и b ($a > b$). Через большее основание трапеции и середину бокового ребра, противоположного этому основанию, проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол α и площадь которого равна S. Найти объем призмы.

290. В основании прямой призмы лежит остроугольный равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при вершине. Через боковое ребро и высоту основания, опущенную на боковую сторону, проведено сечение, площадь которого равна Q. Найти объем призмы.

291. В правильной четырехугольной призме длина диагонали боковой грани равна 17 см, а площадь боковой поверхности — 480 см^2. Найти объем призмы.

292. Площадь основания правильной четырехугольной призмы равна 16 см^2, а диагональ основания призмы втрое меньше диагонали боковой грани. Найти объем призмы.

293. Периметры двух неравных граней правильной четырехугольной призмы равны P и M. Найти объем призмы.

294. Площадь основания и площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы соответственно равны S и Q. Найти объем призмы.

295. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 84 см^2, а площади боковых граней — 26 см^2, 28 см^2 и 30 см^2. Найти объем призмы.

296. В правильную треугольную призму вписан шар радиуса r. Найти объем призмы.

297. В сферу радиуса 4 см вписана правильная шестиугольная призма, площадь большего диагонального сечения которой равна 32 см^2. Найти объем призмы.

Объем наклонной призмы

298. В основании наклонной призмы лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 6 см и углом при вершине 120°. Боковое ребро призмы равно 4 см и образует с плоскостью основания угол 30°. Найти объем призмы.

299. В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник со стороной a. Одна из вершин верхнего основания ортогонально проектируется в центр нижнего основания, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найти объем призмы.

300. В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник со стороной 3 см. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания и является ромбом с диагональю 4 см. Найти объем призмы.

301. Две боковые грани треугольной призмы имеют площади 36 см^2 и 48 см^2 и образуют угол 150°. Найти объем призмы, если ее боковое ребро равно 12 см.

302. Боковое ребро наклонной треугольной призмы равно a и удалено от противоположной боковой грани на расстояние m. Расстояние между двумя другими боковыми ребрами равно l. Найти объем призмы.

303. Все грани призмы — равные ромбы со стороной 8 см и острым углом 60°. Найти объем призмы.

Объем пирамиды

304. В основании треугольной пирамиды лежит треугольник ABC, $AB = BC = 8$ см, $AC = 6$ см. Найти объем пирамиды, если ее высота равна 5 см.

305. Объем правильной пирамиды равен V. Чему будет равен объем правильной пирамиды, высота которой в m раз больше высоты, а сторона основания в n раз больше стороны основания первой пирамиды?

306. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через прямую BD и точку A_1. Найти объем параллелепипеда, если объем пирамиды A_1ABD равен V (рис. 16).

307. Точки M, K и P — середины ребер A_1D_1, D_1C_1 и DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно (рис. 17). Найти объем пирамиды D_1MKP, если объем куба равен V.

308. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания и является равнобедренным прямоугольным треугольником с гипотенузой a. Найти объем пирамиды.

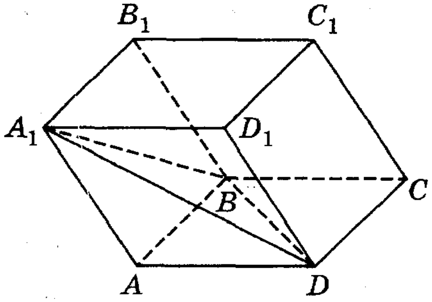

Рис. 16

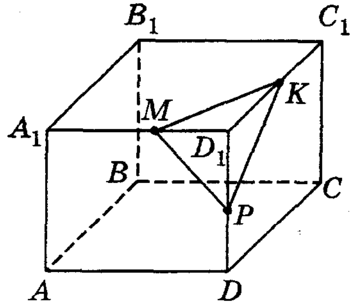

Рис. 17

309. Найти объем правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания равна 6 см, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 30°.

310. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна d, а боковая грань образует с плоскостью основания угол α. Найти объем пирамиды.

311. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Боковое ребро, проходящее через вершину наименьшего угла основания, перпендикулярно плоскости основания и равно 4 см. Найти объем пирамиды.

312. Диагональное сечение правильной четырехугольной пирамиды — равносторонний треугольник, площадь которого S. Найти объем пирамиды.

313. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Найти объем пирамиды, если боковое ребро SA перпендикулярно основанию и вдвое меньше гипотенузы AB треугольника ABC.

314. В основании правильной пирамиды лежит треугольник. Радиус окружности, описанной около основания, равен 6 см, а боковые ребра образуют с плоскостью основания угол 30°. Найти объем пирамиды.

315. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием 6 см и боковой стороной 5 см. Все боковые ребра образуют с плоскостью основания угол 60°. Найти объем пирамиды.

316. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 15 см, 16 см и 17 см, а все боковые грани пирамиды образуют с основанием угол 60°. Найти объем пирамиды.

317. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α, а отрезок, соединяющий середину высоты с серединой апофемы, равен a. Найти объем пирамиды.

318. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом b и противоположным к нему углом β. Все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол φ. Найти объем пирамиды.

319. В основании пирамиды лежит ромб, площадь которого S, а острый угол α. Все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды.

320. В основании пирамиды лежит треугольник ABC, $AB = 4$ см, $BC = 12$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Боковая грань, содержащая наибольшую сторону основания, образует с основанием угол 30° и имеет площадь $12\sqrt{13}$ см^2. Найти объем пирамиды.

321. В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от центра основания до боковой грани равно 3 см, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Найти объем пирамиды.

322. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а двугранный угол при боковом ребре — 120°. Найти объем пирамиды.

323. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l, а плоский угол при вершине — α. Найти объем пирамиды.

324. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α при вершине. Боковое ребро, проходящее через вершину угла α, перпендикулярно плоскости основания, а боковая грань, содержащая основание треугольника, образует с плоскостью основания угол φ. Найти объем пирамиды.

325. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BC = a$, $\angle B = \beta$. Грань ASC перпендикулярна плоскости основания, а грани BSC и ASB образуют с плоскостью основания углы α.
Найти объем пирамиды.

326. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ апофема равна a, а угол между апофемами двух смежных боковых граней равен α. Найти объем пирамиды.

327. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием 16 см и боковой стороной 10 см. Вершина пирамиды ортогонально проектируется в точку пересечения медиан основания. Наименьшее боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол 60°. Найти объем пирамиды.

328. В основании пирамиды лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 6 см. Боковая грань, содержащая один из катетов, перпендикулярна плоскости основания и является правильным треугольником. Найти объем пирамиды.

329. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, а плоский угол при вершине — α. Найти объем пирамиды.

330. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. В пирамиду вписан куб так, что одна грань куба лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины параллельной ей грани лежат на боковых ребрах пирамиды. Найти объем куба.

Объем усеченной пирамиды

331. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 3 см и 5 см, а высота пирамиды — 4 см. Найти объем пирамиды.

332. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 4 см и 6 см, а боковая грань образует с плоскостью большего основания угол 30°. Найти объем пирамиды.

333. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 3 см и 6 см, а боковое ребро образует с плоскостью большего основания угол 60°. Найти объем пирамиды.

334. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 4 см и 6 см, а высота полной пирамиды — 3 см. Найти объем усеченной пирамиды.

335. Основания усеченной пирамиды — равнобедренные треугольники со сторонами 5 см, 5 см, 6 см и 10 см, 10 см, 12 см соответственно. Все боковые ребра образуют с плоскостью большего основания углы 45°. Найти объем пирамиды.

336. Основания усеченной пирамиды — треугольники со сторонами 13 см, 14 см, 15 см и 26 см, 28 см, 30 см соответственно. Все боковые грани образуют с плоскостью основания угол 60°. Найти объем пирамиды.

337. Основания усеченной пирамиды — треугольники со сторонами 7 см, 12 см, 13 см и 14 см, 24 см, 26 см соответственно. Боковая грань, содержащая средние по величине стороны оснований, перпендикулярна плоскостям оснований, а боковое ребро, не лежащее в этой грани, образует с плоскостью большего основания угол 30°. Найти объем пирамиды.

338. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 6 см и 12 см, а острый угол боковой грани равен 45°. Найти объем пирамиды.

339. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 6 см и 12 см, а площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей ее оснований. Найти объем пирамиды.

Равновеликие тела

340. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что плоскость, проходящая через середины ребер AB, CD и A_1B_1, разбивает его на два равновеликих параллелепипеда.

341. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что плоскость, проходящая через прямые AD и AB_1, разбивает его на две равновеликие треугольные призмы.

342. В основании пирамиды лежит трапеция. Доказать, что плоскость, проходящая через середины параллельных сторон трапеции и через вершину пирамиды, разбивает пирамиду на две равновеликие части.

343. Равновелики ли две пирамиды, если их высоты равны, а основания — четырехугольники с соответственно равными сторонами?

344. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найти площадь диагонального сечения правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой равна b, и которая равновелика данной пирамиде.

Объемы подобных тел

345. Ребро куба уменьшили в 4 раза. Во сколько раз уменьшился объем куба?

346. Со скольких кубов с ребром 2 см можно сложить куб с ребром 8 см?

347. Ребро одного куба равно диагонали грани другого куба. Найти отношение объемов этих кубов.

348. Высота пирамиды равна 7 см. На расстоянии 5 см от основания пирамиды проведено параллельное ему сечение, площадь которого 8 см^2. Найти объем пирамиды.

349. Объем пирамиды равен V. Ее высота поделена в отношении 2 : 3, считая от вершины пирамиды, и через точку деления проведено сечение, параллельное основанию. Найти объем образованной усеченной пирамиды.

350. Высоту пирамиды поделено на три равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию пирамиды. Найти отношение объемов частей, на которые разбивают пирамиду эти плоскости.

351. В двух правильных треугольных пирамидах боковые ребра образуют с плоскостью основания угол 45°. Сторона основания первой пирамиды равна высоте другой. Найти отношение объемов пирамид.

Объем цилиндра

352. Радиус основания цилиндра равен 4 см, а высота — 6 см. Найти объем цилиндра.

353. Высота цилиндра равна 4 см, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол 30°. Найти объем цилиндра.

354. Осевое сечение цилиндра — квадрат с диагональю d. Найти объем цилиндра.

355. Высота цилиндра равна H, а площадь его осевого сечения равна Q. Найти объем цилиндра.

356. Радиус основания одного цилиндра в 4 раза больше радиуса основания другого, а высота первого цилиндра в 4 разы меньше высоты второго. Найти отношение объемов цилиндров.

357. Развертка боковой поверхности цилиндра — квадрат со стороной m. Найти объем цилиндра.

358. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу 120° и удаленное от оси цилиндра на 3 см. Найти объем цилиндра, если диагональ полученного сечения равна 12 см.

359. Через одну образующую цилиндра проведено два сечения, угол между которыми равен 120°, а площади полученных сечений равны по 48 см^2. Найти объем цилиндра, если его высота равна 8 см.

360. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которую видно из центра этого основания под углом β. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой этой хорды, равен l и образует с плоскостью нижнего основания угол α. Найти объем цилиндра.

361. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, пересекающее нижнее основание цилиндра по хорде, стягивающей дугу α. Диагональ сечения равна d и образует с плоскостью основания угол β. Найти объем цилиндра.

362. Периметр осевого сечения цилиндра равен P, а угол между диагоналями сечения, лежащий против образующей, равен α. Найти объем цилиндра.

363. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, площадь которого равна S, а диагональ образует с плоскостью основания угол α. Сечение пересекает нижнее основания цилиндра по хорде, которая видна из центра верхнего основания под углом φ. Найти объем цилиндра.

364. Объем цилиндра равен V. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с точкой окружности нижнего основания, образует с плоскостью нижнего основания угол φ. Найти площадь осевого сечения цилиндра.

365. Объем цилиндра равен V, а площадь его осевого сечения — S. Найти радиус основания и высоту цилиндра.

Объем конуса

366. Радиус основания конуса равен 4 см, а его высота — 6 см. Найти объем конуса.

367. Осевое сечение конуса — правильный треугольник, площадь которого равна $4\sqrt{3}$ см^2. Найти объем конуса.

368. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник, высота которого H, а угол при вершине — α. Найти объем конуса.

369. В основании конуса проведена хорда, равная радиусу основания и удаленная от центра основания конуса на 12 см. Через вершину конуса и эту хорду проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 60°. Найти объем конуса.

370. Образующая конуса равна l. Из центра основания конуса к образующей проведен перпендикуляр, угол между которым и высотой конуса равен α. Найти объем конуса.

371. В основании конуса проведена хорда длиной a, которая видна из центра основания под углом α. Отрезок, соединяющий вершину конуса с серединой этой хорды, образует с плоскостью основания угол β. Найти объем конуса.

372. Прямоугольный треугольник, острый угол которого равен 30°, вращается сначала вокруг одного катета, а затем вокруг второго. Найти отношение объемов образованных конусов.

373. Образующая конуса равна 4 см и равна радиусу окружности, описанной около осевого сечения конуса. Найти объем конуса.

374. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту конуса в отношении 3 : 2, считая от вершины. Найти отношение объемов тел, на которые эта плоскость разбивает конус.

375. SA, SB и SC — образующие конуса. Известно, что $\angle ASB = \angle ASC = \angle BSC = \alpha$, $AB = a$. Найти объем конуса.

376. Сечение, проведенное через две образующие конуса, имеет площадь S. Это сечение пересекает основание конуса по хорде, которая видна из вершины конуса под углом α. Плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол β. Найти объем конуса.

377. Наибольшая площадь сечения конуса, проведенного через его вершину, в 2 раза больше площади осевого сечения конуса. Найти объем конуса, если его образующая равна 6 см.

Объем усеченного конуса

378. Радиусы оснований усеченного конуса равны 8 см и 6 см, а его высота — 3 см. Найти объем усеченного конуса.

379. Радиусы оснований усеченного конуса равны 12 см и 2 см, а его образующая — 13 см. Найти объем усеченного конуса.

380. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r ($R > r$), а угол между образующей и плоскостью большего основания равен α. Найти объем усеченного конуса.

381. В усеченном конусе отношение радиусов оснований равно 2, а угол между образующей и плоскостью большего основания равен 60°. Найти объем конуса, если длина образующей равна 8 см.

382. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основанию. Найти объем образованного усеченного конуса, если объем полного конуса равен V.

383. Диагонали осевого сечения усеченного конуса делятся точкой пересечения на отрезки длиной 5,1 см и 11,9 см, а его образующая равна 10 см. Найти объем усеченного конуса.

Объем шара.
Объем шарового сегмента и шарового сектора

384. Радиус шара равен 6 см. Найти его объем.

385. Радиусы двух шаров относятся как 3 : 4. Найти отношение их объемов.

386. Во сколько раз надо уменьшить радиус шара, чтобы его объем уменьшился в 5 раз?

387. Два шара, радиусы которых 5 см и 7 см, имеют общий центр. Найти объем тела, расположенного между поверхностями этих шаров.

388. Радиус основания цилиндра равен 6 см, а его высота — 4 см. Найти радиус шара, равновеликого этому цилиндру.

389. На расстоянии 3 см от центра шара проведено сечение. Найти длину линии пересечения плоскости сечения и поверхности шара, если объем шара равен $\frac{500}{3}\pi$ см^3.

390. Через конец радиуса шара проведено сечение, образующее с этим радиусом угол α. Найти объем шара, если площадь сечения равна S.

391. Вершины равностороннего треугольника со стороной a лежат на поверхности шара, объем которого равен V. Найти расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

392. Диагонали ромба равны a и b. Шар касается всех сторон ромба. Найти объем шара, если расстояние от его центра до плоскости ромба равно m.

393. Найти объем шарового сегмента, если радиус шара равен 4 см, а высота шарового сегмента — 3 см.

394. Найти объем меньшего шарового сегмента, если радиус окружности его основания равен 8 см, а радиус шара — 10 см.

395. Найти объем шарового сектора, если радиус шара равен 4 см, а высота соответствующего шарового сегмента — 6 см.

396. Радиус шара равен 12 см. Найти объем шарового сектора этого шара, если дуга в его осевом сечении содержит 90°.

Площадь боковой поверхности цилиндра

397. Радиус основания цилиндра равен 4 см, а его высота — 3 см. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

398. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

399. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу в 30°. В каком отношении эта плоскость делит боковую поверхность цилиндра?

400. Одна из сторон прямоугольника равна $2\sqrt{3}$ см, а его диагональ образует с этой стороной угол 60°. Прямоугольник вращается сначала вокруг одной стороны, а затем — вокруг второй. Найти отношение площадей боковых поверхностей полученных цилиндров. Есть ли в условии задачи лишние данные?

401. Объем цилиндра численно равен площади его боковой поверхности. Найти радиус основания цилиндра.

402. Осевое сечение цилиндра имеет площадь S. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

403. Высота одного цилиндра в 3 раза больше высоты другого, а боковые поверхности цилиндров равны. Найти отношение радиусов оснований этих цилиндров.

404. Радиус основания цилиндра в 4 раза меньше его высоты, а площадь боковой поверхности равна 288π см^2. Найти высоту цилиндра и радиус его основания.

405. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, являющееся квадратом со стороной $4\sqrt{2}$ см и отсекающее от окружности основания дугу в 60°. Найти площадь полной поверхности цилиндра.

406. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 12π см^2, а его объем — 18π см^3. Найти высоту цилиндра.

407. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 15 см, а площадь полной поверхности цилиндра в два раза больше площади его боковой поверхности. Найти площадь полной поверхности цилиндра.

408. Прямоугольник $ABCD$ — развертка боковой поверхности цилиндра, $AC = 8$ см, $\angle ACD = 30^\circ$. Найти площадь полной поверхности цилиндра, если меньшая сторона прямоугольника $ABCD$ — высота цилиндра.

409. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу, градусная мера которой равна 120°. Площадь сечения равна $16\sqrt{3}$ см^2, а диагональ сечения образует с плоскостью основания угол 60°. Найти площадь полной поверхности цилиндра.

410. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которую видно из центра этого основания под углом β. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой этой хорды, равен l и образует с плоскостью основания угол α. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

411. Отрезок, концы которого лежат на окружностях разных оснований цилиндра, образует с плоскостью основания угол 60° и удален от оси цилиндра на 15 см. Найти площадь боковой поверхности цилиндра, если его высота равна $16\sqrt{3}$ см.

412. Объем цилиндра равен V, а отрезок, соединяющий центр верхнего основания с точкой окружности нижнего основания, образует с плоскостью основания угол α. Найти площадь полной поверхности цилиндра.

413. Через одну образующую цилиндра проведено два сечения, угол между которыми 30°, а площади сечений — 3 см^2 и $2\sqrt{3}$ см^2. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

Площадь боковой поверхности конуса

414. Радиус основания конуса равен 4 см, а его образующая — 5 см. Найти площадь боковой поверхности конуса.

415. Радиус основания конуса равен 5 см, а его высота — 12 см. Найти площадь боковой поверхности конуса.

416. Осевое сечение конуса — равнобедренный прямоугольный треугольник с высотой, проведенной к основанию, равной 10 см. Найти площадь полной поверхности конуса.

417. Высота конуса равна H, а угол при вершине осевого сечения равен 2α. Найти площадь полной поверхности конуса.

418. Площадь основания конуса равна 36π см^2, а площадь его полной поверхности — 96π см^2. Найти объем конуса.

419. Площадь полной поверхности конуса равна 200π см^2, а его образующая — 17 см. Найти объем конуса.

420. Площадь боковой поверхности конуса равна 32π см^2, а его высота — $4\sqrt{3}$ см. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

421. Радиус основания цилиндра в два раза меньше радиуса основания конуса, а образующая конуса в три раза меньше образующей цилиндра. Найти отношение площадей боковых поверхностей конуса и цилиндра.

422. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник, площадь которого равна S. Найти площадь полной поверхности конуса.

423. Точка M делит высоту конуса в отношении $3:2$, считая от вершины конуса. Через эту точку проведена плоскость, параллельная основанию конуса. Найти отношение площадей боковых поверхностей тел, на которые эта плоскость разбивает конус.

424. Параллельно основанию конуса проведена плоскость, делящая его на две части, причем площадь боковой поверхности конуса, который отсекается плоскостью, втрое меньше площади боковой поверхности всего конуса. В каком отношении, считая от вершины, эта плоскость делит высоту конуса?

425. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α, а площадь осевого сечения конуса равна S. Найти площадь полной поверхности конуса.

426. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник. Найти отношение площади полной поверхности конуса к площади его боковой поверхности.

427. Развертка боковой поверхности конуса — сектор, угол которого равен $120°$. Найти площадь полной поверхности конуса, если периметр его осевого сечения равен 24 см.

428. Образующая конуса в два раза больше радиуса его основания. Доказать, что развертка боковой поверхности конуса — полукруг.

429. В основании конуса проведена хорда длиной a, которая видна из центра основания под углом α, а из вершины конуса — под углом φ. Найти площадь полной поверхности конуса.

430. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение, образующее с плоскостью основания конуса угол β. Найти площадь полной поверхности конуса, если его высота равна H.

431. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечение, площадь которого равна Q и которое образует с плоскостью основания угол β. Найти площадь боковой поверхности конуса.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса

432. Радиусы оснований усеченного конуса равны 8 см и 9 см, а его образующая — 5 см. Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса.

433. Высота усеченного конуса равна 3 см, а радиусы оснований — 8 см и 12 см. Найти радиус основания цилиндра, образующая которого равна образующей усеченного конуса, а площадь полной поверхности цилиндра равна площади боковой поверхности усеченного конуса.

434. Образующая усеченного конуса равна 6 см и наклонена к плоскости большего основания под углом 60°. Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса, если его образующая равна диаметру меньшего основания.

435. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна S, а площади оснований — M и N. Найти площадь осевого сечения усеченного конуса.

436. Высота усеченного конуса равна 6 см, а угол между ней и образующей — 30°. Диагональ осевого сечения конуса перпендикулярна образующей, лежащей в плоскости этого сечения. Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса.

437. *Диагонали осевого сечения усеченного конуса перпендикулярны*, а его образующая l наклонена к плоскости большего основания под углом α. Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса.

Площадь сферы

438. Радиус сферы равен 4 см. Найти площадь ее поверхности.

439. Площадь большого круга шара равна S. Найти площадь поверхности этого шара.

440. Радиус шара увеличили в 3 раза. Как при этом изменилась площадь его поверхности?

441. Объем шара уменьшился в 64 раза. Во сколько раз уменьшилась площадь его поверхности?

442. Найти радиус шара, если его объем и площадь поверхности выражаются одним и тем же числом.

443. Гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника являются диаметрами трех шаров. Найти площадь поверхности большего шара, если площади поверхностей меньших равны S_1 и S_2.

444. На расстоянии 5 см от центра шара проведено сечение, площадь которого равна 144π см^2. Найти площадь поверхности шара.

445. На расстоянии 8 см от центра шара проведено сечение, площадь которого равна 225π см^2. Найти площадь сферической поверхности меньшего из образованных шаровых сегментов.

446. Радиусы оснований шарового пояса равны 6 см и 8 см, а радиус шара — 10 см. Найти площадь сферической поверхности шарового пояса, если параллельные плоскости, пересекающие шар, размещены: 1) по одну сторону от центра шара; 2) по разные стороны от центра шара.

447. Радиус шара равен 4 см. Плоскость пересекает диаметр шара под углом 30° и делит его в отношении 1 : 3. Найти площади сферической поверхности частей, на которые при этом делится поверхность шара.

Комбинации тел

448. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 см и 12 см. Он вращается вокруг прямой, содержащей меньший из катетов. Найти объем и площадь полной поверхности тела вращения.

449. Стороны треугольника равны 13 см, 20 см и 21 см. Он вращается вокруг прямой, содержащей наибольшую из его сторон. Найти объем и площадь поверхности тела вращения.

450. Прямоугольный треугольник с катетом b и прилежащим острым углом α вращается вокруг гипотенузы. Найти площадь поверхности тела вращения.

451. В равнобокой трапеции $ABCD$ $AD = a$, $BC = b$ $(a > b)$, $\angle A = \alpha$. Найти объем тела вращения, образованного вращением трапеции вокруг стороны AD.

452. В прямоугольном треугольнике катет равен b, а противоположный ему острый угол — β. Треугольник вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника и проходящей через вершину угла β перпендикулярно гипотенузе. Найти площадь поверхности тела вращения.

453. Площадь параллелограмма равна Q. Он вращается вокруг стороны, длина которой равна a. Найти объем тела вращения.

454. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а угол при вершине — 120°. Треугольник вращается вокруг боковой стороны. Найти площадь поверхности тела вращения.

455. Основание равнобедренного треугольника равно a, а острый угол при основании — α. Этот треугольник вращается вокруг прямой l, лежащей в плоскости треугольника, параллельной его основанию и находится на расстоянии b от нее. Найти объем тела вращения (рис. 18).

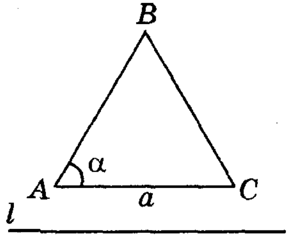

Рис. 18

456. В куб, ребро которого равно 6 см, вписан шар. Найти объем шара и площадь его поверхности.

457. Вокруг прямоугольного параллелепипеда, размеры которого равны 2 см, 5 см и 7 см, описан шар. Найти площадь поверхности этого шара.

458. Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 8 см, а боковое ребро — 4 см. Найти площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму.

459. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а боковое ребро — 4 см. Найти объем и площадь полной поверхности конуса, описанного вокруг этой пирамиды.

460. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a, а высота — H. Найти объем цилиндра, описанного вокруг этой призмы.

461. В правильной треугольной призме боковое ребро равно l, а диагональ боковой грани образует с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность цилиндра, вписанного в эту призму.

462. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием m и углом при основании α. Все боковые грани пирамиды образуют с основанием угол φ. Найти площадь полной поверхности конуса, вписанного в эту пирамиду.

463. Боковые ребра треугольной пирамиды равны l, а в ее основании лежит прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом β. Найти объем конуса, описанного вокруг этой пирамиды.

464. В правильную шестиугольную призму, объем которой равен V, вписан шар. Найти объем этого шара.

465. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l, а высота — h. Найти объем шара, описанного вокруг пирамиды.

466. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Найти объем этого шара, если боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол α, а расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно m.

467. В цилиндр вписан шар радиуса R. Найти отношение объемов цилиндра и шара.

468. Диаметр основания конуса равен его образующей. Можно ли в этот конус поместить шар, объем которого в два раза меньше объема конуса?

469. В сферу радиуса R вписан цилиндр, осевое сечение которого — квадрат. Найти объем цилиндра.

470. Найти соотношение между объемами трех шаров, диаметры которых — катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника.

471. В конус вписан цилиндр, высота которого в два раза меньше высоты конуса. Найти объем цилиндра, если объем конуса равен V.

472. Объем конуса равен V, а угол при вершине осевого сечения — α. Найти объем шара, вписанного в конус.

473. Вокруг шара, объем которого равен V, описаны конус и цилиндр, образующие которых равны диаметру основания. Объем конуса равен V_1, а объем цилиндра — V_2. Доказать, что $V_2^2 = V \cdot V_1$.

474. В усеченный конус вписан шар радиуса R. Найти объем усеченного конуса, если диаметр его большего основания виден из центра шара под углом α.

475. Радиусы двух шаров равны 13 см и 15 см, а расстояние между их центрами — 14 см. Найти объем общей части этих шаров.

476. Два равных конуса имеют общую высоту и параллельные основания. Объем каждого из них равен V. Найти объем общей части этих конусов.

Вариант 2

1. Величина двугранного угла равна 30°. В гранях двугранного угла проведены прямые a и b, параллельные ребру двугранного угла, на расстоянии 8 см и $2\sqrt{3}$ см от него. Найти расстояние между прямыми a и b.

2. Плоскость γ пересекает грани двугранного угла по параллельным прямым a и b, удаленным от ребра двугранного угла на 4 см и 6 см. Найти расстояние от ребра двугранного угла до плоскости γ, если расстояние между прямыми a и b равно $2\sqrt{7}$ см.

3. Сторона AB равностороннего треугольника ABC, площадь которого равна $36\sqrt{3}$ см^2, лежит на ребре двугранного угла, а точка C принадлежит одной из его граней. Из точки C к другой грани проведен перпендикуляр CD. Расстояние от точки D до AB равно $3\sqrt{3}$ см. Найти величину этого двугранного угла.

4. Величина двугранного угла равна 120°. На его ребре выбран отрезок BC длиной 4 см. В разных гранях двугранного угла выбраны точки A и D такие, что $AB = AC = DB = DC$. Найти длину отрезка AB, если $AD = 6$ см.

5. Квадраты $ABCD$ и $ABEF$ лежат в гранях двугранного угла. Найти величину этого двугранного угла, если $AB = 8$ см, $CF = 8\sqrt{2}$ см.

6. Равносторонний треугольник ABC лежит в одной из граней двугранного угла с ребром AB, величина которого равна 60°. Найти углы, образованные сторонами BC и AC с другой гранью.

7. Из точек C и D, лежащих в разных гранях двугранного угла величиной 45°, проведены перпендикуляры DA и CB к его ребру. Найти длину отрезка DC, если $AB = 3$ см, $AD = 6\sqrt{2}$ см, $BC = 8$ см.

8. Точки P и K лежат в разных гранях двугранного угла величиной 30°. Из этих точек к ребру угла проведены перпендикуляры PP_1 и KK_1. Найти длину отрезка PP_1, если $KK_1 = 6\sqrt{3}$ см, $P_1K_1 = \sqrt{38}$ см, $PK = 9$ см.

9. В одной из граней двугранного угла величиной 30° проведена прямая, образующая с ребром двугранного угла угол 45°. Найти угол, образуемый этой прямой с другой гранью.

10. Точка K находится вне плоскости равностороннего треугольника ABC со стороной 7 см. Плоскости KAB, KAC и KBC образуют с плоскостью ABC углы 30°, 60° и 30° соответственно, а проекция точки K на плоскость ABC лежит внутри треугольника ABC. Найти длину отрезка KB.

11. Точка D находится внутри двугранного угла и удалена от одной из его граней на $2\sqrt{3}$ см, а от ребра двугранного угла — на $4\sqrt{21}$ см. Найти расстояние от точки D до другой грани двугранного угла, если его величина равна 30°.

12. Точка F лежит внутри двугранного угла. Точки M и K — ее проекции на плоскости граней этого угла. Доказать, что если $FM = FK$, то прямая MK образует с ребром двугранного угла прямой угол.

13. Найти геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от граней двугранного угла.

14. Все плоские углы трехгранного угла прямые. Точка P находится на расстоянии $3\sqrt{5}$ см от его вершины и на расстоянии 5 см и 7 см от двух его ребер. Найти расстояние от точки P до третьего ребра.

15. В трехгранном угле плоские углы равны 45°, 45° и 60°. Найти величины двугранных углов, лежащих против равных плоских углов.

16. Все плоские углы трехгранного угла равны α ($\alpha < 90^\circ$). Найти его двугранные углы.

Многогранники. Призма

17. Нарисуйте многогранник, у которого 8 вершин и 6 граней.
18. Нарисуйте многогранник, у которого 4 вершины и 4 грани.
19. Существует ли призма, у которой только одна грань перпендикулярна плоскости основания?
20. Какой многоугольник лежит в основании призмы, имеющей: 1) 9 ребер; 2) 36 ребер; 3) k ребер?
21. Существует ли призма, имеющая 22 ребра?

Прямая призма

22. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC = 5$ см. Высота BD треугольника ABC равна 4 см. Найти длину диагонали грани призмы, содержащей основание треугольника, если высота призмы равна 8 см.
23. В основании прямой четырехугольной призмы лежит прямоугольник, меньшая сторона которого равна 6 см, а угол между диагоналями 60°. Найти диагональ призмы, если ее боковое ребро равно 5 см.
24. В основании прямой призмы лежит ромб. Найти сторону основания призмы, если диагонали призмы равны 8 см и 12 см, а высота — 4 см.
25. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция, основания которой 9 см и 15 см, а боковая сторона — 6 см. Найти величины двугранных углов при боковых ребрах призмы.
26. Высота правильной четырехугольной призмы равна 18 см, а диагональ призмы образует с ее основанием угол 60°. Найти сторону основания призмы и угол, образуемый диагональю призмы с ее боковой гранью.
27. Найти диагонали правильной шестиугольной призмы, каждое ребро которой равно 4 см.
28. В основании призмы лежит квадрат со стороной 6 см, а ее боковые грани — прямоугольники. Найти боковую поверхность и полную поверхность призмы, если ее высота равна 9 см.

29. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 10 см, а один из катетов — 6 см. Найти площадь полной поверхности призмы, если ее высота равна 8 см.

30. В основании прямой призмы лежит прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см, а диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45°. Найти площадь боковой поверхности призмы.

31. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Боковая грань призмы, содержащая среднюю по длине сторону основания, равновеликая основанию призмы. Найти площадь полной поверхности призмы.

32. Основание прямой призмы — равнобокая трапеция, меньшее основание которой 3 см, а боковая сторона — 13 см. Найти длину бокового ребра призмы, если площадь ее полной поверхности равна 402 $см^2$, а три боковые грани — квадраты со стороной 13 см.

33. Боковая поверхность правильной треугольной призмы равна $12\sqrt{3}$ $см^2$, а полная поверхность — $20\sqrt{3}$ $см^2$. Найти высоту призмы.

34. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площадь четырехугольника AA_1D_1D равна 4 $см^2$. Найти площадь боковой поверхности призмы.

35. Радиус окружности, описанной около основания правильной четырехугольной призмы, равен $6\sqrt{2}$ см. Найти площадь полной поверхности призмы, если сторона ее основания в два раза меньше бокового ребра.

36. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция, основания которой 4 см и 12 см, а диагонали — биссектрисы тупых углов. Найти площадь боковой поверхности призмы, если ее диагональ образует с боковым ребром угол 30°.

37. Площадь основания правильной четырехугольной призмы равна Q, а диагональ призмы образует с боковой гранью угол β. Найти площадь боковой поверхности призмы.

38. Найти площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, если диагональ ее боковой грани равна d и образует с плоскостью основания призмы угол β.

39. В основании прямой призмы лежит ромб, меньшая диагональ которого равна l. Через эту диагональ и вершину верхнего основания призмы проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани по прямым, угол между которыми равен α, и образующая с плоскостью основания угол β. Найти площадь боковой поверхности призмы.

Наклонная призма

40. Боковое ребро наклонной призмы образует с плоскостью основания угол 60°, а высота призмы равна 6 см. Найти длину бокового ребра призмы.

41. В основании призмы лежит трапеция. Площади параллельных боковых граней равны 24 см^2 и 16 см^2. MN и M_1N_1 — средние линии верхнего и нижнего оснований призмы. Найти площадь четырехугольника MM_1N_1N.

42. В основании наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC, $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. Боковое ребро призмы BB_1 образует с плоскостью основания угол 45°, а проекция точки B_1 на плоскость ABC — точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти площадь грани AA_1C_1C.

43. Расстояния между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равны 5 см, 5 см и 6 см. Найти площадь боковой поверхности призмы, если ее боковое ребро равно 13 см.

44. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны. Их общее боковое ребро отстоит от двух других боковых ребер на 5 см и 12 см. Найти длину бокового ребра призмы, если площадь ее боковой поверхности равна 240 см^2.

45. В основании призмы лежит квадрат со стороной 4 см. Две боковые грани призмы — квадраты, а две другие — ромбы с острым углом 60°. Найти площадь полной поверхности призмы.

46. В основании наклонной треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 6 см. Боковое ребро, содержащее вершину прямого угла основания, равно 4 см и образует с катетами углы по 60°. Найти площадь полной поверхности призмы.

47. В основании призмы лежит квадрат со стороной 6 см. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с нею угол 60°. Найти площадь полной поверхности призмы, если высота призмы равна 8 см.

Сечения призмы

48. Диагональ куба равна $4\sqrt{3}$ см. Найти площадь его диагонального сечения.

49. Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной призмы равна $8\sqrt{2}$ см^2, а ее высота 4 см. Найти площадь боковой поверхности призмы.

50. В основании прямой призмы лежит правильный треугольник, высота которого равна $4\sqrt{3}$ см. Через сторону основания проведено сечение, пересекающее боковое ребро. Площадь этого сечения равна 32 см^2. Найти угол, образуемый этим сечением с плоскостью основания.

51. Диагональ основания правильной четырехугольной призмы равна $2\sqrt{2}$ см, а диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45°. Найти площадь сечения призмы, проходящего через сторону нижнего основания и противоположную ей сторону верхнего основания.

52. Через диагональ основания правильной четырехугольной призмы со стороной основания b проведено сечение, которое образует с плоскостью основания угол β и пересекает боковое ребро призмы в его середине. Найти площадь боковой поверхности призмы.

53. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма (рис. 19). Точки P и K принадлежат ребрам A_1C_1 и BB_1 соответственно. Перерисовать рисунок в тетрадь и построить точку пересечения прямой PK с плоскостью ABC.

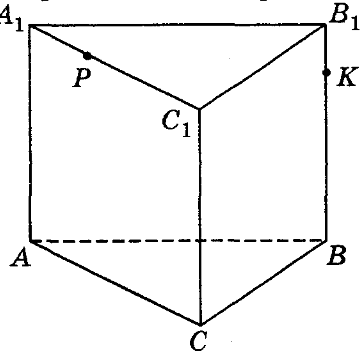

Рис. 19

54. $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная треугольная призма (рис. 20). Точка T принадлежит ребру BB_1, а точка Q — грани AA_1C_1C. Перерисовать рисунок в тетрадь и построить точки пересечения прямой TQ с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$, если прямая TQ им не параллельна.

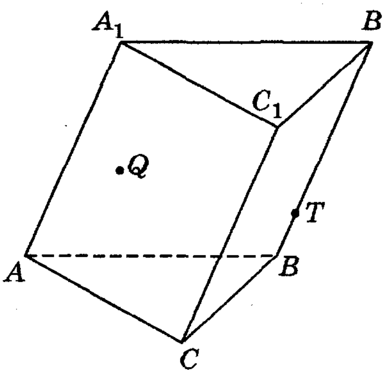

Рис. 20

55. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма, в основании которой лежит параллелограмм. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки E, F и M, принадлежащие ребрам: 1) AA_1, BB_1 и DD_1 соответственно; 2) AA_1, BB_1 и CD соответственно.

56. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма (рис. 21). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точку C и точки P и M, лежащие на ребрах BB_1 и A_1B_1 соответственно.

57. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма (рис. 22). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить сечение призмы плоскостью, проходящей через вершины B_1, C и точку K на ребре DD_1.

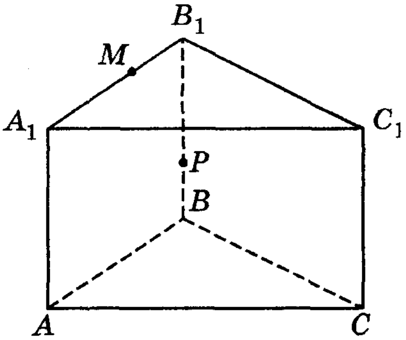

Рис. 21

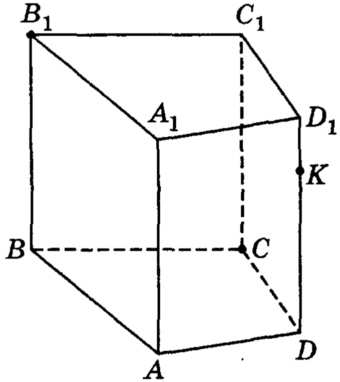

Рис. 22

58. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма. Построить ее сечение плоскостью, проходящей через точки M, N и P, принадлежащие ребрам BC, A_1B_1 и DD_1 соответственно.

59. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма (рис. 23). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки T и P, принадлежащие граням AA_1D_1D и DD_1C_1C соответственно, и точку Q на ребре BC.

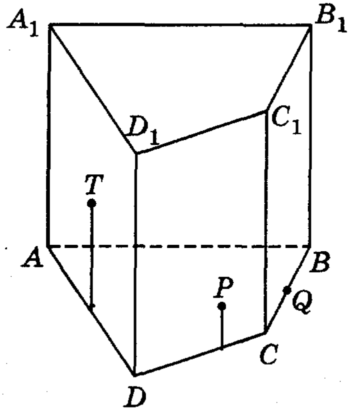

Рис. 23

60. Может ли сечение куба плоскостью быть: 1) квадратом; 2) правильным шестиугольником?

Параллелепипед

61. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит прямоугольник со сторонами 8 см и 15 см, а диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 60°. Найти площадь полной поверхности параллелепипеда.

62. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 9 см, а диагональ боковой грани — 6 см. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда.

63. Найти ребра прямоугольного параллелепипеда, если их длины относятся как $2 : 6 : 9$, а диагональ параллелепипеда равна 33 см.

64. Диагональ прямоугольного параллелепипеда больше сторон основания на 3 см и 2 см. Найти площадь его полной поверхности, если высота параллелепипеда равна $2\sqrt{2}$ см.

65. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как $1 : 2$. Найти высоту параллелепипеда, если площадь его полной поверхности равна 76 см^2, а площадь боковой поверхности — 60 см^2.

66. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны 9 см, 11 см и 12 см. Найти диагональ параллелепипеда.

67. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и образует с плоскостью основания угол α. Диагональ основания образует с одной из сторон основания угол β. Найти площадь полной поверхности параллелепипеда.

68. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 16 см и 10 см, а острый угол — 60°. Найти большую диагональ параллелепипеда, если его высота равна 24 см.

69. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб с острым углом 60° и большей диагональю $8\sqrt{3}$ см. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 30°. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда.

70. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, площадь которого равна 120 см^2. Найти длину высоты параллелепипеда, если площади его диагональных сечений равны 40 см^2 и 96 см^2.

71. В основании параллелепипеда лежит квадрат, а боковое ребро образует со сторонами основания равные углы по 60°. Найти высоту параллелепипеда, если длина бокового ребра 12 см.

72. В основании параллелепипеда лежит ромб с диагоналями 6 см и 8 см. Одна из вершин его верхнего основания одинаково удалена от сторон нижнего основания. Найти боковое ребро параллелепипеда, если его высота равна 1,8 см. Сколько решений имеет задача?

73. В основании параллелепипеда лежит квадрат со стороной 4 см. Одно из диагональных сечений параллелепипеда перпендикулярно плоскости основания и имеет площадь 32 см^2. Найти площадь другого диагонального сечения, если боковое ребро образует со сторонами основания равные углы по 60°.

Пирамида

74. Найти сумму плоских углов четырехугольной пирамиды.

75. Существует ли пирамида, имеющая 17 ребер?

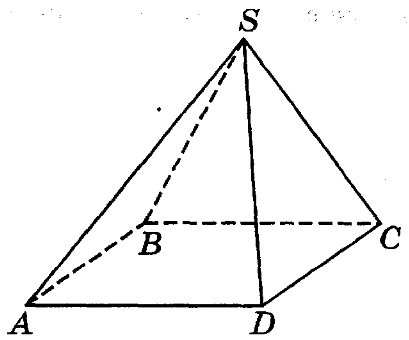

Рис. 24

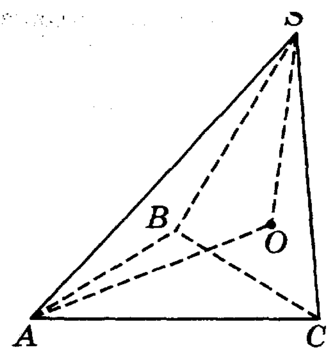

Рис. 25

76. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида (рис. 24). Перерисовать рисунок в тетрадь и изобразить: 1) основание высоты пирамиды; 2) угол наклона ребра SC к плоскости основания; 3) линейный угол двугранного угла при ребре AD.

77. Все боковые ребра треугольной пирамиды $SABC$ равны между собой, SO — ее высота (рис. 25). Что можно сказать о виде треугольника ABC?

78. В каких пределах может изменяться величина плоского угла при вершине правильной пятиугольной пирамиды?

79. Существует ли правильная пятиугольная пирамида, все ребра которой равны между собой?

80. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см, а боковое ребро — 6 см. Найти сторону основания пирамиды.

81. Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды равна 48 см^2, а сторона основания — $8\sqrt{2}$ см. Найти длину бокового ребра пирамиды.

82. Найти апофему правильной треугольной пирамиды, если высота пирамиды равна 10 см, а высота основания — 6 см.

83. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Найти сторону основания пирамиды.

84. Сторона основания правильной восьмиугольной пирамиды равна 4 см, а ее апофема — 9 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

85. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен 45°, а боковое ребро — 4 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

86. Как изменится площадь боковой поверхности правильной пирамиды, если сторону основания увеличить в 4 раза, а апофему уменьшить в 2 раза?

87. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см, а высота — 6 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

88. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды в 2 раза больше площади основания. Найти величину двугранного угла при основании пирамиды.

89. В основании правильной пирамиды лежит квадрат со стороной 6 см, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 45°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

90. Найти площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 9 см, а высота — 6 см.

91. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна $6\sqrt{2}$ см, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

92. В правильной треугольной пирамиде апофема равна половине стороны основания. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если длина ее бокового ребра равна $2\sqrt{2}$ см.

93. Каждое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 8 см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

94. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а радиус окружности, описанной около основания, равен $3\sqrt{3}$ см. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

95. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а апофема — 5 см. Найти: 1) высоту пирамиды; 2) угол наклона бокового ребра к плоскости основания; 3) угол наклона боковой грани к плоскости основания; 4) площадь полной поверхности пирамиды.

96. Радиус окружности, вписанной в основание правильной шестиугольной пирамиды, равен $2\sqrt{3}$ см, боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

97. Площади боковой и полной поверхностей правильной треугольной пирамиды соответственно равны $24\sqrt{3}$ см^2 и $27\sqrt{3}$ см^2. Найти сторону основания и высоту пирамиды.

98. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна d, а боковая грань образует с плоскостью основания угол α. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

99. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует со стороной основания угол α, а радиус окружности, вписанной в боковую грань, равен r. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

100. Высота правильной треугольной пирамиды равна H, а двугранный угол при основании — α. Найти длины ребер пирамиды.

101. В правильной треугольной пирамиде боковая грань образует с плоскостью основания угол 30°. Найти: 1) угол наклона бокового ребра к плоскости основания; 2) плоский угол при вершине пирамиды; 3) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

102. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найти: 1) угол наклона боковой грани к плоскости основания; 2) плоский угол при вершине пирамиды; 3) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

103. В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°, а расстояние от центра основания до боковой грани равно 12 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

104. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно c, а двугранный угол при основании α. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

105. В основании пирамиды $SABCD$ (S — вершина) лежит параллелограмм $ABCD$. O — точка пересечения его диагоналей, $SA = SC$, $SB = SD$. Доказать, что SO — высота пирамиды.

106. В основании пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 12 см и 30 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если ее высота равна 8 см, а боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы.

107. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник со сторонами 5 см, 5 см и 8 см. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если все двугранные углы при основании пирамиды равны 30°.

108. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом α при вершине и боковой стороной b. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если все двугранные углы при основании пирамиды равны β.

109. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, $\angle B = 150^\circ$. Найти сторону AC, если высота пирамиды равна 12см, а боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы в 60°.

110. В основании пирамиды лежит равнобокая трапеция, боковая сторона которой равна 6 см, а тупой угол 120°. Меньшее основание трапеции равно ее боковой стороне. Все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы. Найти эти углы, если высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$ см.

111. В основании пирамиды лежит прямоугольная трапеция, большая из параллельных сторон которой 18 см, а меньшая из непараллельных — 10 см. Острый угол трапеции равен 30°. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если все двугранные углы при основании равны 45°.

112. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом α при вершине и радиусом описанной окружности R. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если все двугранные углы при основании пирамиды равны β.

113. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) (рис. 26). Указать: 1) угол наклона грани SBC к плоскости основания; 2) углы наклона ребер SB и SC к плоскости основания.

114. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Боковое ребро, лежащее против средней по длине стороны, перпендикулярно к плоскости основания и равно 12 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

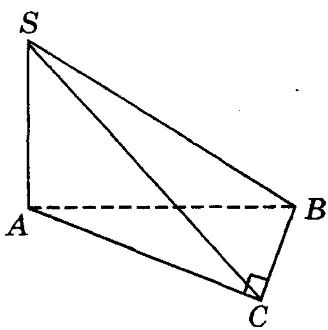

Рис. 26

115. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = 8$ см и углом 60°. Боковые грани, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны плоскости основания, а третья грань образует с основанием угол 45°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

116. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной 8 см. Две смежные боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с нею угол 60°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

117. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием 8 см и противоположным углом 120°. Боковые грани, содержащие стороны одного из острых углов основания, перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с основанием угол 60°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

118. В основании пирамиды лежит параллелограмм, высоты которого равны 5 см и 8 см, а угол между ними 30°. Одно из боковых ребер, содержащих вершину тупого угла, перпендикулярно плоскости основания и равно 6 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

119. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной a. Одно из боковых ребер равно l и перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

120. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее боковое ребро равно l и образует с пересекаемыми сторонами основания углы α и β. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

121. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с острым углом 30°. Все боковые ребра пирамиды равны, а ее высота равна 12 см и образует с боковым ребром угол 45°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

122. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной 8 см. Одна грань пирамиды перпендикулярна к плоскости основания, а две другие образуют с нею угол 30°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

123. В основании пирамиды лежит треугольник ABC, $AB = 11$ см, $BC = 24$ см, $AC = 31$ см. Грань SAB перпендикулярна плоскости основания, ребро SC образует с плоскостью основания угол 60°. Найти площадь грани SAB.

124. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 6$ см, $AB = 10$ см. Грань SAC перпендикулярна плоскости основания, а высота пирамиды равна 8 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если грани SAB и SBC образуют с плоскостью основания равные углы.

125. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, $AB = 16$ см. Грань SDC перпендикулярна плоскости основания. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если $SD = SC = 10$ см.

Сечения пирамиды

126. В плоскости основания пирамиды $SABC$ взята точка K (рис. 27). Через нее проведена прямая, пересекающая грань ASC в точке P. Перерисовать рисунок в тетрадь и построить точку пересечения прямой KP еще с одной гранью пирамиды.

127. Точки M и N принадлежат боковым ребрам SA и SC пирамиды $SABCDE$ (рис. 28). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить точку пересечения прямой MN с плоскостью ABC.

128. Построить сечение треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через вершину C, точку на ребре SB и параллельной прямой AB.

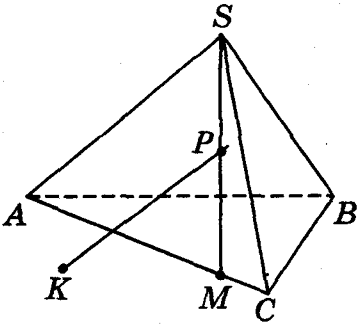

Рис. 27

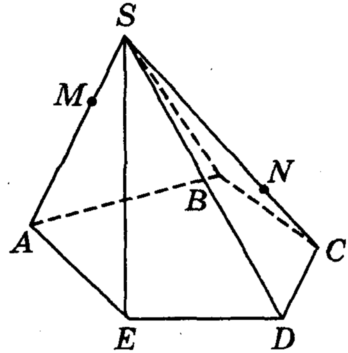

Рис. 28

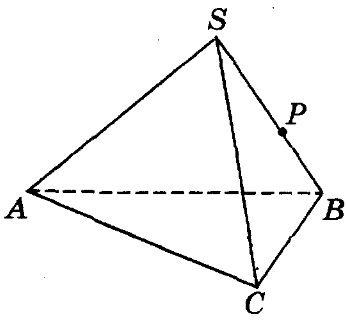

Рис. 29

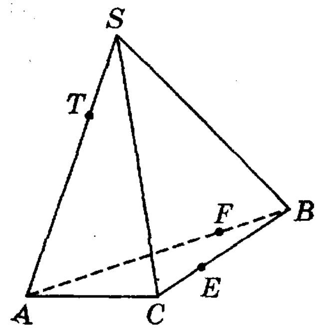

Рис. 30

129. $SABC$ — треугольная пирамида (рис. 29). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку P на ребре SB и параллельной прямым BC и SA.

130. Построить сечение треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 30) плоскостью, проходящей через точки T, F и E, принадлежащие ребрам SA, AB и BC соответственно.

131. Высота пирамиды равна H. На каком расстоянии от вершины пирамиды надо провести сечение, параллельное основанию, чтобы площадь сечения составила $\frac{1}{3}$ площади основания?

132. В правильной треугольной пирамиде через точку, делящую боковое ребро пирамиды в отношении 3 : 5, считая от вершины, проведено сечение, параллельное основанию. Найти стороны треугольника, лежащего в сечении, если площадь основания равна 128 см^2.

133. В основании правильной пирамиды $SABC$ лежит треугольник со стороной b. Двугранный угол при основании пирамиды равен β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и BC основания параллельно грани ASC.

134. В правильной шестиугольной пирамиде радиус окружности, описанной около основания, равен 6 см, а боковое ребро — 8 см. Найти площадь сечения, проходящего через середины двух смежных боковых ребер пирамиды параллельно ее высоте.

Усеченная пирамида

135. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида (рис. 31). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить: 1) угол наклона бокового ребра к плоскости основания; 2) угол наклона боковой грани к плоскости основания.

136. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 6 см и 4 см, а боковое ребро — 8 см. Найти площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

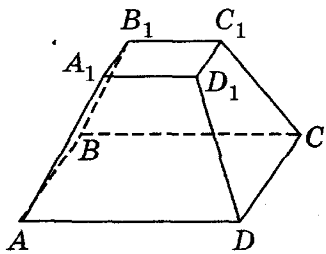

Рис. 31

137. Боковое ребро правильной усеченной четырехугольной пирамиды равно 4 см, а сторона большего основания — 6 см. Найти площадь диагонального сечения пирамиды, если ее высота равна 2 см.

138. В правильной усеченной треугольной пирамиде стороны оснований равны 6 см и 8 см, а боковая грань образует с плоскостью большего основания угол 45°. Найти высоту пирамиды.

139. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 10 см и 6 см, а ее высота — 2 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

140. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 9 см и 18 см, а высота пирамиды — 8 см. Через сторону большего основания и противоположную ей вершину меньшего основания проведено сечение. Найти площадь этого сечения.

Правильные многогранники

141. Сколько трехгранных углов имеет додекаэдр?

142. Найти сумму плоских углов при всех вершинах додекаэдра.

143. Площадь полной поверхности октаэдра равна 240 см^2. Найти площадь одной его грани.

144. Длина ребра икосаэдра равна 8 см. Найти площадь его полной поверхности.

145. Найти площадь полной поверхности правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен R.

146. Доказать, что центры граней октаэдра — вершины куба. Найти ребро куба, если ребро октаэдра равно 6 см.

Цилиндр

147. Высота цилиндра равна 8 см, а радиус основания — 7 см. Найти площадь осевого сечения цилиндра.

148. Высота цилиндра равна 6 см, а угол между диагональю осевого сечения и образующей равен 60°. Найти диагональ осевого сечения цилиндра и площадь его основания.

149. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 13 см, а радиус основания цилиндра больше высоты на 1 см. Найти площадь осевого сечения цилиндра.

150. Параллельно оси цилиндра, радиус основания которого 8 см, а образующая 12 см, проведено сечение. Диагональ сечения равна 20 см. Найти расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.

151. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $5\sqrt{2}$ см. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, являющееся квадратом с площадью 10 см^2. Найти площадь осевого сечения цилиндра.

152. Площадь осевого сечения цилиндра равна S. Через одну из образующих этого сечения проведено сечение, плоскость которого образует с плоскостью осевого сечения угол 60°. Найти площадь этого сечения.

153. Прямоугольник со сторонами 5 см и 9 см вращается вокруг большей из сторон. Найти: 1) площадь осевого сечения образованного цилиндра; 2) длину окружности основания образованного цилиндра; 3) площадь сечения, проходящего на расстоянии 2 см от оси образованного цилиндра параллельно ей.

154. Площадь осевого сечения цилиндра равна S. Найти площадь сечения цилиндра, параллельного его оси и находящегося на расстоянии от нее, равном трети радиуса основания цилиндра.

155. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, площадь которого равна $12\sqrt{3}$ см^2. Диагональ сечения образует с плоскостью основания угол 60°. Найти расстояние от плоскости сечения до оси цилиндра, если радиус основания цилиндра равен 3 см.

156. Через образующую цилиндра проведены два сечения, площади которых равны 30 см^2 и $20\sqrt{3}$ см^2. Угол между плоскостями сечений равен 30°. Найти площадь сечения цилиндра, проходящего через две другие стороны данных сечений.

157. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, отсекающее от его оснований дуги по 90°. Площадь сечения равна 48 см^2, и оно находится на расстоянии 3 см от оси цилиндра. Найти радиус основания цилиндра и его высоту.

158. Радиус основания равностороннего цилиндра равен 8 см. Через две точки, лежащие на окружностях разных оснований цилиндра, проведена прямая, находящаяся на расстоянии 6 см от оси цилиндра. Найти угол, образуемый этой прямой с осью цилиндра.

159. Развертка боковой поверхности цилиндра — прямоугольник, одна из сторон которого вдвое меньше другой. Найти угол между диагоналями осевого сечения цилиндра, если его высота меньше радиуса основания цилиндра.

160. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, диагональ которого равна l. Сечение пересекает основание цилиндра по хорде, которую видно из центра этого основания под углом α. Найти расстояние от плоскости сечения до оси цилиндра, если диагональ сечения образует с плоскостью основания угол β.

161. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, площадь которого равна Q, а диагональ сечения образует с плоскостью основания угол φ. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с точкой окружности нижнего основания, образует с осью цилиндра угол α. Найти высоту и радиус основания цилиндра.

162. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, находящееся на расстоянии l от оси цилиндра и отсекающее от нижнего основания цилиндра хорду, которую видно из центра верхнего основания под углом α. Найти площадь данного сечения.

Вписанная и описанная призмы

163. Можно ли описать цилиндр вокруг прямой призмы, в основании которой лежит ромб?

164. Можно ли вписать цилиндр в призму, в основании которой лежит прямоугольник с разными сторонами?

165. Определить вид треугольника, лежащего в основании призмы, вписанной в цилиндр, если ось цилиндра проходит внутри призмы.

166. В прямой четырехугольной призме углы основания в порядке следования относятся как 3 : 5 : 8 : 6. Можно ли описать цилиндр вокруг этой призмы?

167. Сумма боковых сторон трапеции, лежащей в основании прямой призмы, равна 16 см, а средняя линия трапеции — 7 см. Можно ли вписать цилиндр в эту призму?

168. Площади боковых граней прямой четырехугольной призмы в порядке следования относятся как 2 : 3 : 5 : 6. Можно ли вписать цилиндр в эту призму?

169. Вокруг цилиндра описана призма, все двугранные углы которой при боковых ребрах равны. Доказать, что призма правильная.

170. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма, а вокруг него описана правильная четырехугольная призма. Найти отношение площадей боковых поверхностей этих призм.

171. В основании прямой призмы лежит ромб. Площадь боковой поверхности призмы равна 120 см^2. Найти радиус основания цилиндра, вписанного в эту призму, если высота призмы равна 6 см, а острый угол основания — 60°.

172. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, а высота призмы H. Найти площадь осевого сечения цилиндра, вписанного в эту призму.

173. Площадь осевого сечения цилиндра равна Q. Найти площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной вокруг этого цилиндра.

174. Вокруг правильной треугольной призмы описан цилиндр, радиус основания которого r, а угол между диагональю осевого сечения и образующей равен β. Найти площадь боковой поверхности призмы.

175. В правильной четырехугольной призме все ребра равны, а площадь диагонального сечения равна S. Найти площадь основания цилиндра, вписанного в призму.

176. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна a, а высота H. В призму вписан цилиндр. Найти площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей через две образующие, по которым боковая поверхность цилиндра касается двух соседних боковых граней призмы.

177. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Диагональ грани, содержащей боковую сторону этого треугольника, образует с плоскостью основания призмы угол α. Найти площадь боковой поверхности призмы, если радиус основания цилиндра, вписанного в призму, равен r.

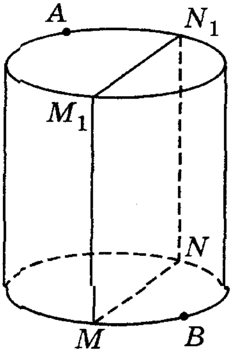

Рис. 32

178. MM_1N_1N — сечение цилиндра, параллельное его оси (рис. 32). На основаниях цилиндра выбраны точки A и B. Перерисовать рисунок в тетрадь и построить точку пересечения прямой AB с плоскостью MM_1N_1.

Конус

179. Доказать, что каждая точка, равноудаленная от точек окружности основания конуса, принадлежит прямой, содержащей ось конуса.

180. Радиус основания конуса равен 5 см, а образующая — 11 см. Найти высоту конуса.

181. Радиус основания конуса равен 6 см, а его осевое сечение — равнобедренный прямоугольный треугольник. Найти высоту конуса и его образующую.

182. Радиус основания конуса равен 8 см, а его образующая больше высоты на 2 см. Найти площадь осевого сечения конуса.

183. Радиус основания конуса равен 10 см, а образующая — 26 см. На расстоянии 4,8 см от вершины конуса проведено сечение, параллельное основанию. Найти площадь этого сечения.

184. Радиус основания конуса равен 24 см, а его высота поделена в отношении 3 : 4 : 5, считая от вершины. Через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию конуса. Найти площади полученных сечений.

185. При каком соотношении между радиусом основания R конуса и его образующей l угол при вершине осевого сечения конуса будет: 1) острым; 2) прямым; 3) тупым?

186. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 30°, а радиус окружности, описанной около осевого сечения, равен 12 см. Найти образующую конуса.

187. Угол при вершине осевого сечения конуса равен β, а периметр его равен P. Найти площадь основания конуса.

188. Радиус основания конуса равен 16 см. Через вершину конуса проведено сечение, пересекающее его основание по хорде, которую видно из центра основания под углом 60°. Найти угол между плоскостью сечения и плоскостью основания конуса, если расстояние от центра основания конуса до данной хорды равно 16 см.

189. Два конуса имеют общую высоту, а их основания параллельны. Длина окружности, по которой пересекаются их боковые поверхности, равна $4{,}5\pi$ см, а радиус основания одного из конусов 3 см. Найти радиус основания другого конуса.

190. В основании конуса проведена хорда, которую видно из центра основания под углом α, а из вершины конуса — под углом β. Найти высоту конуса, если длина его образующей равна l.

Усеченный конус

191. Радиусы оснований усеченного конуса равны 8 см и 4 см, а угол между образующей и плоскостью большего основания равен 60°. Найти высоту усеченного конуса и его образующую.

192. Радиусы оснований усеченного конуса равны 14 см и 22 см, а образующая — 17 см. Найти площадь осевого сечения конуса.

193. Радиусы оснований усеченного конуса равны 9 см и 21 см, а отношение его образующей к высоте равно 2,6. Найти площадь осевого сечения конуса.

194. Площади оснований усеченного конуса равны 12 см^2 и 24 см^2. Через точку, делящую его высоту в отношении 1 : 3, считая от меньшего основания, проведено сечение, параллельное основаниям. Найти площадь этого сечения.

195. В усеченном конусе образующая равна 8 см и образует с плоскостью большего основания угол 30°. Диагональ осевого сечения перпендикулярна образующей, через которую проходит данное сечение. Найти радиусы оснований усеченного конуса.

196. Образующая усеченного конуса равна 4 см и образует с плоскостью большего основания угол 60°. Найти радиусы оснований усеченного конуса, если диагональ его осевого сечения равна $2\sqrt{19}$ см.

197. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 см и 14 см, а его образующая равна радиусу одного из оснований. Найти площадь осевого сечения усеченного конуса.

198. Угол между образующей усеченного конуса и плоскостью большего основания равен α, а разность радиусов оснований равна $2m$. Найти радиусы оснований и площадь осевого сечения усеченного конуса, если диагональ осевого сечения образует с плоскостью меньшего основания угол β.

199. В усеченном конусе проведено осевое сечение CC_1D_1D и по разные стороны от него на основаниях конуса выбраны точки A и B (рис. 33). Перерисовать рисунок в тетрадь и построить точку пересечения прямой AB с плоскостью CC_1D_1.

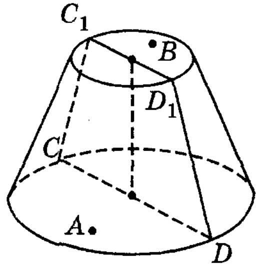

Рис. 33

Вписанная и описанная пирамиды

200. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит остроугольный треугольник. Где находится основание высоты конуса по отношению к треугольнику основания пирамиды?

201. Можно ли вокруг конуса описать пирамиду, в основании которой лежит равнобокая трапеция, боковая сторона которой равна средней линии?

202. Углы основания четырехугольной пирамиды в порядке следования относятся как $2 : 5 : 7 : 3$. Можно ли описать конус вокруг этой пирамиды? В случае положительного ответа указать, где должно находиться основание высоты пирамиды.

203. В основании пирамиды лежит прямоугольник, одна из сторон которого равна 18 см и образует с диагональю угол 60°. Все боковые ребра пирамиды равны 12 см. Найти площадь осевого сечения конуса, описанного вокруг пирамиды.

204. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см, а двугранные углы при основании пирамиды равны 30°. Найти площадь осевого сечения конуса, вписанного в пирамиду.

205. Высота конуса равна 4 см, а радиус основания — 6 см. Вокруг конуса описана четырехугольная пирамида, в основании которой лежит равнобокая трапеция с боковой стороной 15 см. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

206. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник, площадь которого равна $\sqrt{3}$ см^2, а угол при вершине — 120°. Найти высоту конуса, вписанного в пирамиду, если образующая конуса равна 9 см.

207. Площадь осевого сечения усеченного конуса, описанного вокруг усеченной четырехугольной пирамиды, равна $5\sqrt{14}$ см^2. Основания пирамиды — квадраты со сторонами 4 см и 6 см. Найти образующую усеченного конуса.

208. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c, а острый угол — β. Боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания угол α. Найти площадь осевого сечения конуса, вписанного в эту пирамиду.

Шар

209. Радиус шара равен $4\frac{2}{7}$ см. Внутри или вне шара расположена точка B, если она удалена: 1) от центра шара на 5 см; 2) от центра шара на $\sqrt{15}$ см; 3) от точки на поверхности шара на 8,6 см?

210. К сфере радиусом 15 см проведена касательная плоскость. На этой плоскости взята точка K такая, что наименьшее расстояние от точки K до точек сферы равно 2 см. Найти расстояние от точки K до точки касания сферы с плоскостью и наибольшее расстояние от точки K до точек сферы.

211. Диаметр шара равен 34 см. На каком расстоянии от центра шара надо провести сечение, чтобы длина линии пересечения сферы с плоскостью сечения была равна 16π см?

212. Через конец радиуса шара проведено сечение, образующее с этим радиусом угол 45°. Найти радиус шара, если площадь сечения равна 64π см^2.

213. Площадь большого круга данного шара равна S, а площадь сечения шара плоскостью равна $\frac{2}{3}S$. На каком расстоянии от центра шара проведено сечение?

214. Диаметр шара двумя точками поделен на три части в отношении 3 : 4 : 7 и через точки деления проведены сечения, перпендикулярные диаметру. Найти отношение площадей этих сечений.

215. Вершины равностороннего треугольника со стороной 9 см лежат на поверхности шара, а расстояние от центра шара до плоскости треугольника равно 3 см. Найти радиус шара.

216. Вершины равнобедренного треугольника с основанием 36 см и боковой стороной 30 см лежат на поверхности шара, радиус которого равен 25 см. Найти расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

217. Диагонали ромба равны 30 см и 40 см. Шар касается всех сторон ромба, а расстояние от центра шара до *плоскости ромба равно* 18 *см. Найти радиус шара.*

218. Шар касается всех сторон равнобокой трапеции, боковая сторона которой равна 8 см, а острый угол 45°. Найти радиус шара, если расстояние от его центра до плоскости трапеции равно $6\sqrt{2}$ см.

219. Шар касается граней трехгранного угла, все плоские углы которого прямые. Найти расстояние от центра шара до вершины угла, если радиус шара равен 4 см.

220. Два шара, радиусы которых 9 см и 4 см, имеют общий центр. Плоскость пересекает поверхности этих шаров и проходит через их центр. Найти площадь той части сечения, которая расположена между поверхностями шаров.

221. Радиусы двух сфер равны 10 см и 17 см, а длина лини их пересечения — 16π см. Найти расстояние между центрами сфер.

222. В цилиндр вписан шар. Доказать, что высота цилиндра равна диаметру его основания. Где находится центр этого шара?

223. Радиус основания цилиндра равен R. Диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол α. Найти радиус шара, описанного вокруг цилиндра.

224. Радиус основания конуса равен 8 см, а его осевое сечение — равнобедренный прямоугольный треугольник. Найти радиус шара, описанного вокруг конуса.

225. Радиус основания конуса равен 8 см, а его образующая — 17 см. Найти радиусы шаров, вписанного в конус и описанного вокруг него.

226. Радиус основания конуса равен R, а угол при вершине осевого сечения конуса α. Найти радиусы шаров, вписанного в конус и описанного вокруг него.

227. Вокруг усеченного конуса описан шар. Доказать, что все образующие конуса видно из центра шара под равными углами.

228. В усеченном конусе угол между образующей и плоскостью большего основания равен 60°, а разность радиусов оснований конуса равна 6 см. В конус вписан шар. Найти радиус шара и радиусы оснований усеченного конуса.

229. Образующая усеченного конуса равна l, а угол между ней и плоскостью большего основания равен α. Найти радиус шара, описанного вокруг конуса, если диагональ его осевого сечения перпендикулярна образующей, которую пересекает.

Вписанные и описанные многогранники

230. В правильную четырехугольную призму вписан шар. Найти отношение стороны основания призмы к ее высоте.

231. Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как 3 : 4 : 12, а площадь его полной поверхности 768 см^2. Найти радиус шара, описанного вокруг параллелепипеда.

232. В правильной треугольной призме радиус описанного шара равен 13 см, а сторона основания — $5\sqrt{3}$ см. Найти площадь боковой поверхности призмы.

233. В прямоугольном параллелепипеде сторона основания равна a и образует с одной из диагоналей основания угол α, а площадь диагонального сечения параллелепипеда, содержащая эту диагональ, равна S. Найти радиус шара, описанного вокруг параллелепипеда.

234. Найти радиус шара, вписанного в правильную треугольную призму, сторона основания которой равна 6 см.

235. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 16 см, 28 см и 30 см. В призму вписан шар. Найти радиус этого шара.

236. В прямую призму вписан шар. Найти площадь боковой поверхности призмы, если площадь основания равна 8 см^2.

237. В правильную четырехугольную призму вписан шар и вокруг нее описан шар. Найти отношение радиусов этих шаров.

238. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны между собой. Доказать, что центр шара, описанного вокруг пирамиды, совпадает с центром ее основания.

239. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 9 см, а ее диагональное сечение — равносторонний треугольник. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

240. Найти радиус шара, вписанного в правильную шестиугольную пирамиду, высота которой равна H, а двугранный угол при основании β.

241. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α, а радиус шара, вписанного в нее, равен r. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

242. Высота правильной треугольной пирамиды равна 12 см, а ее апофема равна 13 см. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

243. Из точки F, лежащей на поверхности сферы, проведены три луча, пересекающие поверхность сферы в точках A, B и C. Найти расстояние от точки F до плоскости ABC, если радиус сферы равен 18 см, $FA = FB = FC$, $\angle AFB = \angle BFC = \angle AFC = 90^\circ$.

244. В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол β, а радиус описанного шара R. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

245. Радиусы окружностей, описанных около основания и боковой грани правильной треугольной пирамиды, соответственно равны 24 см и $12\sqrt{3}$ см. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

246. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна b, а угол между боковым ребром и стороной основания — β. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

247. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а двугранный угол при основании α. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

248. В основании пирамиды лежит ромб со стороной 50 см и большей диагональю 80 см. Высота пирамиды равна 32 см и проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду.

Объем прямого параллелепипеда

249. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 140 см^3, а два его линейных размера — 5 см и 7 см. Найти третий линейный размер.

250. Объем куба равен 64 см^3. Найти площадь его поверхности.

251. Каждое ребро прямого параллелепипеда равно 8 см, а острый угол основания — 60°. Найти объем параллелепипеда.

252. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 60° и равна $10\sqrt{3}$ см. Одна из сторон основания параллелепипеда равна 9 см. Найти объем параллелепипеда.

253. Диагональ прямоугольного параллелепипеда больше его линейных размеров на 1 см, 9 см и 10 см соответственно. Найти объем параллелепипеда.

254. В прямоугольном параллелепипеде одна из сторон основания равна 6 см, а боковое ребро — 10 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 30°. Найти объем параллелепипеда.

255. Диагонали A_1C и B_1D прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O так, что $\angle COD = 60^\circ$ и равны по 8 см. Найти объем параллелепипеда, если его диагональ образует с плоскостью основания угол 45°.

256. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм, стороны которого 8 см и 12 см, а тупой угол — 120°. Высота параллелепипеда равна меньшей диагонали основания. Найти объем параллелепипеда.

257. Диагонали A_1C и B_1D прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 24 см и 10 см и образуют угол 90°. Найти объем параллелепипеда, если одна из сторон его основания равна 12 см.

258. Одна из сторон основания прямоугольного параллелепипеда равна 6 см, а диагональ основания — 12 см. Сечение, проходящее через диагональ нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания, образует с плоскостью нижнего основания угол 30°. Найти объем параллелепипеда.

259. Площади двух смежных боковых граней прямого параллелепипеда равны 63 см^2 и 108 см^2, а длина их общего ребра 9 см. Найти объем параллелепипеда, если острый угол при основании равен 45°.

260. Линейные размеры одного прямоугольного параллелепипеда относятся как $1 : 2 : 3$, а другого — как $2 : 5 : 8$. Площадь полной поверхности первого параллелепипеда в 6 раз меньше площади полной поверхности второго параллелепипеда. Найти отношение объемов параллелепипедов.

261. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 17 см и 25 см, а одна из диагоналей основания — 26 см. Найти объем параллелепипеда, если его меньшая диагональ образует с плоскостью основания угол 60°.

262. Диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна d и образует со стороной AB угол α. Плоскость, проходящая через точки C, D и B_1, образует с плоскостью основания угол β. Найти объем параллелепипеда.

263. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, площадь которого равна S, а площади диагональных сечений — P и Q. Найти объем параллелепипеда.

264. Расстояния от центра прямоугольного параллелепипеда до его ребер равны 5 см, 8 см и 9 см. Найти объем параллелепипеда.

265. Периметры трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 18 см, 20 см и 22 см. Найти объем параллелепипеда.

266. В цилиндр, радиус основания которого равен 2 см, вписан прямоугольный параллелепипед, боковое ребро которого образует с диагональю параллелепипеда и с диагональю грани, выходящими из одной вершины, углы 60° и 45° соответственно. Найти объем параллелепипеда.

267. В шар радиуса R вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ боковой грани которого образует с диагональю параллелепипеда и со стороной основания, лежащей в этой грани, углы α и β соответственно. Найти объем параллелепипеда.

Объем наклонного параллелепипеда

268. В основании наклонного параллелепипеда лежит ромб, большая диагональ которого равна 8 см, а острый угол — 60°. Боковое ребро параллелепипеда равно 12 см и образует с плоскостью основания угол 30°. Найти объем параллелепипеда.

269. Боковое ребро наклонного параллелепипеда равно 8 см. Сечение параллелепипеда плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, — параллелограмм, стороны которого 2 см и 3 см, а острый угол — 45°. Найти объем параллелепипеда.

270. В основании наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, $AB = 8$ см, $\angle ABC = 60^\circ$. Боковое ребро BB_1 равно 8 см и образует со сторонами AB и BC ромба равные углы по 45°. Найти объем параллелепипеда.

271. В основании наклонного параллелепипеда лежит прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см, боковое ребро параллелепипеда равно 2 см, а боковые грани образуют с плоскостью основания углы 60° и 45°. Найти объем параллелепипеда.

272. В основании наклонного параллелепипеда лежит прямоугольник со сторонами 5 см и 8 см. Две его боковые грани — также прямоугольники со сторонами 5 см и 4 см, а острый угол двух других граней равен 45°. Найти объем параллелепипеда.

273. В основании наклонного параллелепипеда лежит квадрат со стороной a. Одно из боковых ребер параллелепипеда равно b и образует с пересекаемыми сторонами основания равные углы β. Найти объем параллелепипеда.

274. Расстояние между боковым ребром AA_1 и диагональю B_1D наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно l. Четырехугольник AB_1C_1D — ромб со стороной a и углом α. Найти объем параллелепипеда.

Объем прямой призмы

275. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями 12 см и 16 см. Диагональ боковой грани образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем призмы.

276. Каждое ребро правильной треугольной призмы равно 2 см. Найти объем призмы.

277. В правильной шестиугольной призме боковая грань — квадрат, диагональ которого равна $6\sqrt{2}$ см. Найти объем призмы.

278. В правильной четырехугольной призме диагональ равна 8 см, а диагональ боковой грани — 6 см. Найти объем призмы.

279. В правильной четырехугольной призме диагональ равна d и образует с плоскостью основания угол α. Найти объем призмы.

280. В основании призмы лежит треугольник со сторонами 8 см, 13 см и 15 см. Диагональ боковой грани, содержащей меньшую сторону основания, равна 6 см. Найти объем призмы.

281. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, тангенс одного из углов которого равен двум. Высота призмы вдвое больше меньшего из катетов основания, а объем призмы равен 54 $см^3$. Найти площадь боковой поверхности призмы.

282. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен a. Через второй катет и противоположную ему вершину верхнего основания проведено сечение, площадь которого равна S. Найти объем призмы, если ее высота равна H.

283. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция, боковая сторона которой равна 5 см, а диаметр вписанной окружности — 3 см. Диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 30°. Найти объем призмы.

284. Найти отношение объемов правильных треугольной и четырехугольной призм, если они имеют равные высоты и площади боковых поверхностей.

285. Через одну из вершин нижнего основания прямой четырехугольной призмы и диагонали боковых граней, выходящие из этой вершины, проведено сечение, площадь которого S и которое образует с плоскостью нижнего основания угол α. Найти объем призмы, если ее высота равна H.

286. Объем правильной четырехугольной призмы равен V. Найти объем призмы, вершины которой — середины сторон основания данной призмы.

287. Боковые грани правильной шестиугольной призмы — квадраты, а меньшая диагональ основания равна d. Найти объем призмы.

288. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен b, а противоположный ему угол — β. Диагональ боковой грани, содержащей другой катет, образует с гранью, содержащей гипотенузу, угол α. Найти объем призмы.

289. В основании прямой призмы лежит равнобокая трапеция, основания которой равны a и b ($a > b$), а площадь ее S. Через точку, делящую боковое ребро в отношении 3 : 1, считая от верхнего основания, и противоположное этому ребру меньшее основание трапеции проведено сечение, образующее с нижним основанием угол α. Найти объем призмы.

290. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$, $AC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$. Площадь боковой грани BB_1C_1C равна S. Найти объем призмы.

291. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани равна 25 см, а площадь боковой поверхности — 504 см^2. Найти объем призмы.

292. Площадь основания правильной треугольной призмы равна $25\sqrt{3}$ см^2. Высота основания призмы в четыре раза меньше диагонали боковой грани. Найти объем призмы.

293. Периметры двух неравных граней правильной шестиугольной призмы равны M и N. Найти объем призмы.

294. Площадь основания и площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы соответственно равны S_1 и S_2. Найти объем призмы.

295. Периметр основания прямой треугольной призмы равен 30 см, а площади боковых граней — 15 см^2, 36 см^2 и 39 см^2. Найти объем призмы.

296. В правильную четырехугольную призму вписан шар радиуса r. Найти объем призмы.

297. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 12 см. Эта призма вписана в сферу, радиус которой 7 см. Найти объем призмы.

Объем наклонной призмы

298. В основании наклонной призмы лежит треугольник со сторонами 4 см, 13 см и 15 см. Боковое ребро призмы равно 8 см и образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем призмы.

299. В основании наклонной призмы лежит правильный треугольник. Высота призмы равна h. Одна из вершин верхнего основания ортогонально проектируется в центр нижнего основания, а боковое ребро призмы образует с ее высотой угол β. Найти объем призмы.

300. В основании наклонной призмы лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие имеют площадь 36 см^2. Боковые ребра призмы равны ребрам основания и образуют с плоскостью основания угол 30°. Найти объем призмы.

301. В основании наклонной призмы лежит равнобедренный треугольник с основанием 6 см. Боковое ребро призмы равно 9 см, а угол между боковыми гранями, содержащими равные стороны основания, равен 120°. Найти объем призмы.

302. В основании наклонной призмы лежит трапеция, площади параллельных боковых граней равны S_1 и S_2, а расстояние между ними — l. Найти объем призмы.

303. В основании призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник. Боковая грань, проходящая через один из катетов основания, — квадрат со стороной 4 см, и образует с плоскостью основания угол 60°. Найти объем призмы.

Объем пирамиды

304. В основании пирамиды лежит треугольник ABC, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $\angle ABC = 30^\circ$. Найти объем пирамиды, если ее высота равна 5 см.

305. Объем правильной пирамиды равен V. Чему будет равен объем правильной пирамиды, высота которой в m раз больше высоты, а сторона основания в n раз меньше стороны основания первой пирамиды?

306. В призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение, делящее ребро AA_1 на две равные части. Найти объем призмы, если объем пирамиды $MABC$ равен V (рис. 34).

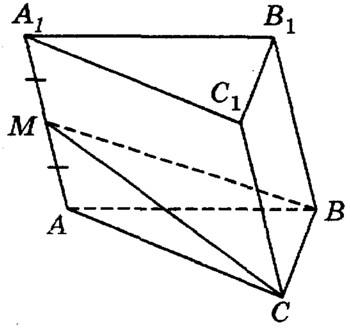

Рис. 34

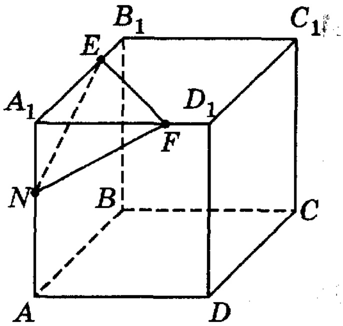

Рис. 35

307. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 35). Точки E, F и N лежат на ребрах A_1B_1, A_1D_1 и AA_1 соответственно. $A_1E : EB_1 = 2 : 1$, $A_1F : FD_1 = 3 : 1$, $A_1N : NA = 2 : 3$. Найти объем пирамиды A_1EFN, если объем куба равен V.

308. В основании пирамиды лежит квадрат. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания и является равносторонним треугольником. Найти объем пирамиды.

309. Найти объем правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°.

310. Высота основания правильной треугольной пирамиды равна h, а боковое ребро образует с высотой пирамиды угол φ. Найти объем пирамиды.

311. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7 см, 10 см и 13 см. Высота пирамиды проходит через вершину среднего по величине угла основания, а вершина пирамиды удалена от средней по величине стороны основания на 8 см. Найти объем пирамиды.

312. Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды равна S, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найти объем пирамиды.

313. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BC = a$, $\angle ABC = \alpha$. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, а грань SBC образует с нею угол φ. Найти объем пирамиды.

314. В правильной четырехугольной пирамиде радиус окружности, описанной около основания, равен 4 см, а боковые грани образуют с плоскостью основания угол 45°. Найти объем пирамиды.

315. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 8 см и углом при вершине 120°. Каждое боковое ребро пирамиды равно 17 см. Найти объем пирамиды.

316. В основании пирамиды лежит треугольник, две стороны которого равны 8 см и 3 см, а угол между ними — 60°. Все боковые грани образуют с основанием угол 30°. Найти объем пирамиды.

317. В правильной четырехугольной пирамиде высота образует с боковым ребром угол φ, а основание высоты удалено от середины бокового ребра на расстояние m. Найти объем пирамиды.

318. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Каждая боковая грань пирамиды образует с основанием угол φ. Найти объем пирамиды.

319. В основании пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна S, а угол между диагоналями основания — α. Все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол α. Найти объем пирамиды.

320. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7 см, 12 см и 13 см. Боковая грань, содержащая наибольшую сторону основания, имеет площадь $26\sqrt{2}$ см^2 и образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем пирамиды.

321. В правильной треугольной пирамиде расстояние от центра основания до боковой грани равно 3 см, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем пирамиды.

322. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 4 см, а двугранный угол при боковом ребре — 120°. Найти объем пирамиды.

323. В правильной треугольной пирамиде апофема равна a, а плоский угол при вершине — α. Найти объем пирамиды.

324. В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и углом α. Боковые грани, содержащие стороны этого угла, перпендикулярны плоскости основания, а две другие грани образуют с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды.

325. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Грань пирамиды, содержащая гипотенузу, перпендикулярна плоскости основания, а две другие образуют с нею равные углы β. Найти объем пирамиды.

326. В правильной треугольной пирамиде высота равна h, а угол между апофемами двух боковых граней — 90°. Найти объем пирамиды.

327. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием 12 см и боковой стороной 10 см. Вершина пирамиды ортогонально проектируется в точку пересечения биссектрис основания. Наименьшее боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найти объем пирамиды.

328. В основании пирамиды лежит квадрат с диагональю $14\sqrt{2}$ см. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания и является треугольником со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Найти объем пирамиды.

329. Апофема правильной треугольной пирамиды равна a. Боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол α. Найти объем пирамиды.

330. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании α. В пирамиду вписан куб так, что одна грань куба лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины параллельной ей грани лежат на апофемах пирамиды. Найти объем куба.

Объем усеченной пирамиды

331. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 2 см и 4 см, а высота пирамиды — 5 см. Найти объем пирамиды.

332. Сторона меньшего основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна $4\sqrt{2}$ см, а боковое ребро равно 6 см и образует с плоскостью большего основания угол 60°. Найти объем пирамиды.

333. Сторона меньшего основания правильной усеченной треугольной пирамиды равна 4 см, а боковое ребро равно 8 см и образует с плоскостью большего основания угол 45°. Найти объем пирамиды.

334. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 3 см и 6 см, а высота полной пирамиды — 10 см. Найти объем усеченной пирамиды.

335. Основания усеченной пирамиды — равнобедренные треугольники, основания которых 6 см и 8 см соответственно, а угол, лежащий против основания, равен 150°. Все боковые ребра образуют с плоскостью большего основания углы 60°. Найти объем пирамиды.

336. Меньшее основание усеченной пирамиды — треугольник со сторонами 8 см, 26 см и 30 см. Боковые грани образуют с плоскостью большего основания пирамиды углы по 45°, а высоты боковых граней равны $3\sqrt{2}$ см. Найти объем пирамиды.

337. Основания усеченной пирамиды — треугольники со сторонами 7 см, 10 см, 13 см и 14 см, 20 см, 26 см соответственно. Боковая грань, содержащая средние по величине стороны оснований, перпендикулярна плоскостям оснований, а боковое ребро, не лежащее в этой грани, равно 8 см. Найти объем пирамиды.

338. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 2 см и 4 см, а острый угол боковой грани — 60°. Найти объем пирамиды.

339. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 2 см и 6 см, а площадь боковой поверхности в два раза больше суммы площадей ее оснований. Найти объем пирамиды.

Равновеликие тела

340. Основания призмы — трапеции. Доказать, что плоскость, проходящая через середины оснований трапеций, разбивает ее на две равновеликие призмы.

341. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что плоскость ABC_1D_1 разбивает его на две равновеликие треугольные призмы.

342. В основании пирамиды лежит параллелограмм. Доказать, что плоскость, проходящая через вершину пирамиды и середины двух параллельных сторон основания, разбивает пирамиду на две равновеликие части.

343. Равновелики ли две пирамиды, если их высоты равны, а основания — треугольники с соответственно равными сторонами?

344. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, а диагональ боковой грани образует с высотой призмы угол α. Найти площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна b и которая равновелика данной призме.

Объемы подобных тел

345. Ребро куба увеличили в 3 раза. Во сколько раз увеличился объем куба?

346. Со скольких кубов с ребром 3 см можно сложить куб с ребром 9 см?

347. Ребро одного куба равно диагонали другого куба. Найти отношение объемов этих кубов.

348. В правильной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 10$ см, $SA = 15$ см. Через точку, которая делит боковое ребро в отношении $2 : 3$, считая от вершины пирамиды, проведено сечение $A_1B_1C_1$, параллельное основанию пирамиды. Найти объем пирамиды $SA_1B_1C_1$.

349. Площадь основания пирамиды равна S, а ее высота H поделена в отношении $1 : 2$, считая от вершины пирамиды, и через точку деления проведено сечение, параллельное основанию. Найти объем образованной усеченной пирамиды.

350. Высоту пирамиды поделено на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию пирамиды. Найти отношение объемов частей, на которые разбивают пирамиду эти плоскости.

351. В двух правильных четырехугольных пирамидах двугранные углы при основании равны 60°. Боковое ребро первой пирамиды равно высоте другой. Найти отношение объемов пирамид.

Объем цилиндра

352. Радиус основания цилиндра равен 6 см, а высота 3 см. Найти объем цилиндра.

353. Радиус основания цилиндра равен 3 см, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол 60°. Найти объем цилиндра.

354. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого равна Q. Найти объем цилиндра.

355. Радиус основания цилиндра равен R, а площадь его осевого сечения равна S. Найти объем цилиндра.

356. Радиус основания первого цилиндра в 2 раза больше радиуса основания второго, а высота первого цилиндра в 3 раза меньше высоты второго. Найти отношение объемов цилиндров.

357. Развертка боковой поверхности цилиндра — квадрат с диагональю d. Найти объем цилиндра.

358. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, находящееся на расстоянии 4 см от его оси. Диагональ полученного сечения равна 10 см. Найти объем цилиндра, если радиус его основания равен 12 см.

359. Через одну образующую цилиндра проведены два сечения, угол между которыми равен 60°, а площади полученных сечений равны по 42 см^2. Найти объем цилиндра, если радиус его основания равен $2\sqrt{3}$ см.

360. В основании цилиндра проведена хорда, которая видна из центра этого основания под углом α и которая находится на расстоянии d от центра этого основания. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с точкой окружности нижнего основания, образует с плоскостью нижнего основания угол φ. Найти объем цилиндра.

361. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, пересекающее нижнее основание цилиндра по хорде длиной l, видимой из центра этого основания под углом α, а из центра верхнего основания под углом β. Найти объем цилиндра.

362. Периметр осевого сечения цилиндра равен P, а его диагональ образует с плоскостью основания угол α. Найти объем цилиндра.

363. Параллельно оси цилиндра проведено сечение площадь которого равна Q, а угол между его диагоналями — α. Сечение пересекает нижнее основание по хорде, видимой из центра верхнего основания под углом β. Найти объем цилиндра.

364. Объем цилиндра равен V, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол γ. Найти площадь осевого сечения цилиндра.

365. Объем цилиндра равен V, а площадь его осевого сечения вдвое меньше площади основания. Найти радиус основания цилиндра и его высоту.

Объем конуса

366. Радиус основания конуса равен 3 см, а его высота — 4 см. Найти объем конуса.

367. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник, площадь которого равно 16 $см^2$. Найти объем конуса.

368. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна l, а угол при основании — α. Найти объем конуса.

369. Через вершину конуса и две образующие проведено сечение, пересекающее основание по хорде длиной 8 см. Эта хорда видна из центра основания конуса под углом 90°. Найти объем конуса, если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол 45°.

370. Угол между образующей конуса и его высотой равен α. Отрезок, соединяющий центр основания конуса с серединой образующей, равен m. Найти объем конуса.

371. В основании конуса проведена хорду, находящаяся на расстоянии d от центра основания и видимая из этого центра под углом α, а из вершины конуса — под углом β. Найти объем конуса.

372. Прямоугольный треугольник, острый угол которого равен α, вращается сначала вокруг одного катета, а затем вокруг другого. Найти отношение объемов образовавшихся конусов.

373. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник, основание которого $6\sqrt{3}$ см, а радиус описанной окружности — 6 см. Найти объем конуса.

374. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее его объем в отношении 8 : 19, считая от вершины. В каком отношении это сечение делит высоту конуса?

375. SA, SB и SC — образующие конуса. Найти его объем, если $SA = l$, $\angle SAB = \angle SBC = \angle SAC = \alpha$.

376. Сечение, проведенное через две образующие конуса, имеет площадьQ и образует с плоскостью основания угол α. Сечение пересекает основание конуса по хорде, которая видна из центра основания под углом β. Найти объем конуса.

377. Наибольшая площадь сечения конуса, проведенного через его вершину, в $\sqrt{2}$ раз больше площади осевого сечения конуса. Найти объем конуса, если его высота равна 3 см.

Объем усеченного конуса

378. Радиусы оснований усеченного конуса равны 5 см и 7 см, а его высота — 4 см. Найти объем усеченного конуса.

379. В усеченном конусе образующая равна 5 см, высота — 3 см, а один из радиусов основания — 7 см. Найти объем усеченного конуса.

380. Радиус большего основания усеченного конуса равен R, а его образующая равна l и образует с плоскостью большего основания угол α. Найти объем усеченного конуса.

381. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 3 : 7, а угол между высотой, длина которой 8 см, и образующей равен 60°. Найти объем усеченного конуса.

382. Через точку, делящую высоту конуса в отношении 3 : 1, считая от вершины, проведено сечение, параллельное основанию. Найти объем конуса, если объем образованного усеченного конуса равен V.

383. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а его образующая равна 4 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найти объем усеченного конуса.

Объем шара.
Объем шарового сегмента и шарового сектора

384. Радиус шара равен 4 см. Найти его объем.

385. Объемы двух шаров относятся как 8 : 27 Найти отношение их радиусов.

386. Во сколько раз надо увеличить радиус шара, чтобы его объем увеличился в 3 раза?

387. Два шара имеют общий центр. Найти радиус большего шара, если радиус меньшего шара равен 3 см, а объем тела, расположенного между поверхностями этих шаров, равен 252π см^3.

388. Радиус основания конуса равен 2 см, а его высота — 3 см. Найти радиус шара, равновеликого этому конусу.

389. На расстоянии 5 см от центра шара проведено сечение, площадь которого равна 144π см^2. Найти объем шара.

390. Через конец радиуса шара проведено сечение, которое образует с этим радиусом угол β. Найти площадь этого сечения, если объем шара равен V.

391. Прямоугольный треугольник, вершины которого лежат на поверхности шара, имеет катет длиной b и противоположный ему острый угол β. Найти расстояние от центра шара до плоскости треугольника, если объем шара равен V.

392. Шар, объем которого равен V, касается всех сторон равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна b, а острый угол при основании — α. Найти расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

393. Найти объем шарового сегмента, если радиус шара равен 5 см, а высота шарового сегмента — 6 см.

394. Найти объем большего шарового сегмента, если радиус окружности его основания равен 9 см, а радиус шара — 15 см.

395. Найти объем шарового сектора, если радиус шара равен 6 см, а высота соответствующего шарового сегмента — 2 см.

396. Радиус шара равен 6 см. Найти объем шарового сектора этого шара, если дуга в его осевом сечении содержит 60°.

Площадь боковой поверхности цилиндра

397. Радиус основания цилиндра равен 5 см, а высота — 6 см. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

398. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 10 см, а угол между диагоналями осевого сечения, лежащий против диаметра основания, — 120°. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

399. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу в 90°. В каком отношении эта плоскость делит боковую поверхность цилиндра?

400. Прямоугольник со сторонами 4 см и 6 см вращается сначала вокруг большей стороны, а потом — вокруг меньшей. Найти отношение площадей боковых поверхностей полученных цилиндров. Есть ли в условии задачи лишние данные?

401. Объем цилиндра численно в 2 раза больше площади его боковой поверхности. Найти радиус основания цилиндра.

402. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого равна S. Найти площадь полной поверхности цилиндра.

403. Радиус основания одного цилиндра в n раз больше радиуса основания другого цилиндра, а площади боковых поверхностей этих цилиндров равны. Найти отношение высот этих цилиндров.

404. Площадь боковой поверхности цилиндра в 2 раза больше площади его основания, а площадь полной поверхности цилиндра равна 256π см^2. Найти радиус основания цилиндра и его высоту.

405. Радиус основания цилиндра равен 6 см. Параллельно его оси проведено сечение, отсекающее от окружности основания дугу в 90°. Найти площадь полной поверхности цилиндра, если диагональ данного сечения равна 12 см.

406. Объем цилиндра равен 54π см^3, а его высота — 3 см. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

407. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 5 см, а площадь боковой поверхности цилиндра равна площади его основания. Найти площадь полной поверхности цилиндра.

408. Прямоугольник $ABCD$ — развертка боковой поверхности цилиндра. Диагональ прямоугольника равна 10 см, а угол между диагоналями — 60°. Найти площадь полной поверхности цилиндра, если большая сторона прямоугольника $ABCD$ — высота цилиндра.

409. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, диагональ которого равна 8 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найти площадь полной поверхности цилиндра, если расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения равно 3 см.

410. Параллельно оси цилиндра проведено сечение, диагональ которого образует с плоскостью основания угол α. Это сечение пересекает нижнее основание по хорде, которую видно из центра этого основания под углом β. Найти площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус его основания равен R.

411. Точки A и B лежат на окружностях разных оснований цилиндра, а длина отрезка AB равна 13 см. Найти расстояние от оси цилиндра до отрезка AB, если площадь боковой поверхности цилиндра равна 100π см^2, а радиус его основания — 10 см.

412. Объем цилиндра равен V, а диагональ осевого сечения образует с плоскостью основания угол α. Найти площадь полной поверхности цилиндра.

413. Через три образующие цилиндра проведены сечения, площади которых равны 3 см^2, 5 см^2 и 7 см^2. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

Площадь боковой поверхности конуса

414. Радиус основания конуса равен 3 см, а его образующая — 4 см. Найти площадь боковой поверхности конуса.

415. Высота конуса равна 15 см, а его образующая — 17 см. Найти площадь боковой поверхности конуса.

416. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник с основанием 8 см и углом при вершине 120°. Найти площадь полной поверхности конуса.

417. Образующая конуса равна a и наклонена к плоскости основания под углом α. Найти площадь полной поверхности конуса.

418. Объем конуса равен 18π см^3, а его высота в 2 раза больше радиуса основания. Найти площадь полной поверхности конуса.

419. Площадь полной поверхности конуса равна 90π см^2, а его образующая больше радиуса основания на 8 см. Найти объем конуса.

420. Площадь полной поверхности конуса равна 108π см^2, а его высота — $6\sqrt{3}$ см. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

421. Радиусы оснований конуса и цилиндра равны, а высота цилиндра в два раза меньше образующей конуса. Найти отношение площадей боковых поверхностей конуса и цилиндра.

422. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник, периметр которого равен P. Найти площадь полной поверхности конуса.

423. Точка K делит высоту конуса в отношении $2 : 3$, считая от вершины конуса. Через эту точку проведена плоскость, параллельная основанию конуса. Найти отношение площадей боковых поверхностей тел, на которые эта плоскость разбивает конус.

424. Плоскость, параллельная основанию конуса, делит его на две части с равными площадями боковой поверхности. В каком отношении, считая от вершины, эта плоскость делит высоту конуса?

425. Угол между образующей конуса и его высотой равен β, а площадь боковой поверхности конуса равна S. Найти площадь полной поверхности конуса.

426. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник. Найти отношение площади полной поверхности конуса к площади его боковой поверхности.

427. Развертка боковой поверхности конуса — сектор, угол которого равен 210°. Найти площадь полной поверхности конуса, если площадь его осевого сечения равна 64 см^2.

428. Развертка боковой поверхности конуса — полукруг. Доказать, что образующая конуса в два раза больше радиуса его основания.

429. Радиус основания конуса равен R. В основании конуса проведена хорда, видимая из центра основания под углом α, а из вершины конуса — под углом β. Найти площадь полной поверхности конуса.

430. Сечение конуса, проходящее через его вершину, пересекает основание конуса по хорде, видимой из центра основания под углом β. Плоскость сечения образует с высотой конуса угол φ. Найти площадь полной поверхности конуса, если его высота равна H.

431. Через две образующие конуса, угол между которыми равен β, проведено сечение, образующее с плоскостью основания конуса угол φ. Найти площадь сечения, если площадь боковой поверхности конуса равна S.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса

432. Радиусы оснований усеченного конуса равны 4 см и 6 см, а его образующая — 9 см. Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса.

433. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 см и 10 см, а его образующая — 8 см. Найти радиус основания цилиндра, высота которого в $\sqrt{3}$ раза больше высоты усеченного конуса, а площадь полной поверхности цилиндра равна площади боковой поверхности усеченного конуса.

434. Найти радиусы оснований усеченного конуса, образующая которого равна 10 см, высота — 8 см, а площадь боковой поверхности — 100π см^2.

435. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна S, его высота — H, а образующая — l. Найти площадь осевого сечения конуса.

436. Образующая усеченного конуса равна 10 см и образует с плоскостью большего основания угол 60°. Диагональ осевого сечения конуса образует с плоскостью большего основания угол 30°. Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса.

437. Высота усеченного конуса равна H, а диагонали его осевого сечения перпендикулярны. Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса, если угол между его образующей и плоскостью большего основания равен β.

Площадь сферы

438. Радиус сферы равен 6 см. Найти площадь ее поверхности.

439. Площадь поверхности шара равна S. Найти площадь большого круга этого шара.

440. Радиус шара уменьшили в 4 раза. Как при этом изменилась площадь его поверхности?

441. Площадь поверхности шара увеличилась в 9 раз. Во сколько раз увеличился его объем?

442. Найти радиус шара, если известно, что его объем численно в 2 раза больше площади поверхности.

443. Один из углов треугольника равен 120°. Его стороны являются диаметрами трех шаров. Найти площадь поверхности большего шара, если площади поверхностей меньших равны S_1 и S_2.

444. Плоскость, находящаяся на расстоянии 8 см от центра шара, пересекает его поверхность по линии, длина которой равна 12π см. Найти площадь поверхности шара.

445. Радиус шара равен 13 см. Плоскость пересекает поверхность шара и площадь сечения равна 25π см^2. Найти площадь сферической поверхности меньшего из образовавшихся шаровых сегментов.

446. Радиусы оснований шарового пояса равны 5 см и 12 см, а расстояние между параллельными плоскостями, которые пересекают шар, — 17 см. Найти площадь сферической поверхности шарового пояса, если параллельные плоскости расположены: 1) по разные стороны от центра шара; 2) по одну сторону от центра шара.

447. Радиус шара равен 5 см. Плоскость пересекает диаметр шара под углом 30° и делит его в отношении $4 : 1$. Найти площади сферической поверхности частей, на которые при этом делится поверхность шара.

Комбинации тел

448. Прямоугольник со сторонами 5 см и 12 см вращается вокруг прямой, содержащей большую из его сторон. Найти объем и площадь полной поверхности тела вращения.

449. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Он вращается вокруг прямой, содержащей среднюю из его сторон. Найти объем и площадь поверхности тела вращения.

450. Прямоугольный треугольник с катетом a и противоположным острым углом α вращается вокруг гипотенузы. Найти площадь поверхности тела вращения.

451. В равнобокой трапеции меньшее основание равно b, острый угол — β, а боковая сторона — c. Найти объем тела, образованного вращением трапеции вокруг меньшего основания.

452. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а один из острых углов — α. Треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через вершину угла α перпендикулярно гипотенузе и лежит в плоскости треугольника. Найти площадь поверхности тела вращения.

453. Площадь ромба равна S, а острый угол — α. Ромб вращается вокруг одной из сторон. Найти объем тела вращения.

454. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 8 см, а угол при основании — 15°. Треугольник вращается вокруг боковой стороны. Найти площадь поверхности тела вращения.

455. Основание равнобедренного треугольника равно b, а угол при вершине — 2β. Этот треугольник вращается вокруг прямой l, лежащей в плоскости треугольника, параллельной его основанию и находящейся на расстоянии c от основания. Найти объем тела вращения (рис. 36).

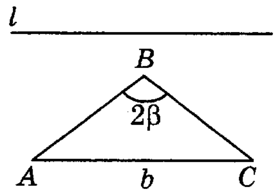

Рис. 36

456. Вокруг куба, ребро которого равно $2\sqrt{3}$ см, описан шар. Найти объем шара и площадь его поверхности.

457. Вокруг прямоугольного параллелепипеда, высота которого 8 см, а диагонали боковых граней — 10 см и 17 см, описан шар. Найти площадь поверхности этого шара.

458. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 4 см, а боковое ребро — 3 см. Найти площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в эту призму.

459. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а высота — $2\sqrt{7}$ см. Найти объем и площадь полной поверхности конуса, описанного вокруг этой пирамиды.

460. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, а высота — H. Найти площадь полной поверхности цилиндра, описанного вокруг этой призмы.

461. Диагональ основания правильной четырехугольной призмы равна d, а диагональ призмы образует с плоскостью основания угол β. Найти объем цилиндра, вписанного в эту призму.

462. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна a, а угол между боковыми сторонами — β. Все боковые грани пирамиды образуют с основанием угол φ. Найти площадь полной поверхности конуса, вписанного в эту пирамиду.

463. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом a и противоположным ему углом α. Боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол φ. Найти объем конуса, описанного вокруг этой пирамиды.

464. В правильную треугольную призму вписан шар, объем которого равен V. Найти объем призмы.

465. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно l, а сторона основания — a. Найти площадь поверхности шара, описанного вокруг пирамиды.

466. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна b, а высота — H. Найти объем шара, вписанного в эту пирамиду.

467. В цилиндр вписан шар радиуса R. Найти отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади поверхности шара.

468. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Можно ли в этот цилиндр поместить шар, объем которого в два раза меньше объема цилиндра?

469. В сферу радиуса R вписан конус, основание которого — большой круг сферы. Найти объем конуса.

470. Найти соотношение между поверхностями трех шаров, диаметры которых — высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, и отрезки, на которые высота делит гипотенузу.

471. В конус вписан цилиндр, радиусы оснований конуса и цилиндра относятся как 3 : 2. Найти объем конуса, если объем цилиндра равен V.

472. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. В конус вписан шар, объем которого равен V. Найти объем конуса.

473. В шар, объем которого равен V, вписаны конус и цилиндр, осевые сечения которых — правильный треугольник и квадрат соответственно. Объем конуса равен V_1, а объем цилиндра — V_2. Доказать, что $V_2^2 = V \cdot V_1$.

474. В усеченный конус вписан шар радиуса R. Найти объем усеченного конуса, если угол между образующей и плоскостью большего основания равен β.

475. Радиусы двух шаров равны 13 см и 20 см, а расстояние между их центрами — 21 см. Найти объем общей части этих шаров.

476. Два равных конуса имеют общую ось и параллельные основания. Вершины конусов лежат между плоскостями их оснований, а расстояние между вершинами составляет $\frac{1}{5}$ высоты каждого из них. Найти объем конусов, если объем их общей части равен V.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ

Вариант 1

Тематическое оценивание № 1

Тема. *Двугранный угол. Призма*

1°. Точка A лежит в одной из граней двугранного угла и удалена от другой грани на 5 см. Найти расстояние от точки A до ребра двугранного угла, если величина двугранного угла равна 30°.

2°. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны 6 см и 8 см. Найти площадь полной поверхности призмы, если ее боковое ребро равно 5 см.

3•. Диагональ боковой грани правильной четырехугольной призмы равна a и образует с диагональю призмы, выходящей из той же вершины, угол α. Найти площадь полной поверхности призмы.

4••. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, площадь которого равна 30 см^2, а площади диагональных сечений параллелепипеда — 10 см^2 и 24 см^2. Найти длину высоты параллелепипеда.

Тематическое оценивание № 2

Тема. *Пирамида*

1°. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 10 см, а высота — 8 см. Найти:
1) площадь диагонального сечения пирамиды;
2) сторону основания пирамиды;
3) площадь боковой поверхности пирамиды.

2•. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α. Все боковые грани образуют с основанием угол β. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

3••. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием 12 см. Боковые грани пирамиды, содержащие боковые стороны треугольника, перпендикулярны плоскости основания, а третья грань образует с основанием угол 30°. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна $8\sqrt{3}$ см.

Тематическое оценивание № 3

Тема. *Цилиндр. Вписанная и описанная призмы*

1°. Радиус основания цилиндра равен 6 см, а диагональ его осевого сечения образует с плоскостью основания угол $60°$. Найти:
1) высоту цилиндра;
2) площадь осевого сечения цилиндра.

2°. Радиус основания цилиндра равен 5 см, а угол между диагоналями его осевого сечения — $90°$. Найти высоту цилиндра.

3•. Высота цилиндра равна 8 см, радиус основания 5 см. На расстоянии 4 см от оси цилиндра параллельно ей проведено сечение. Найти площадь этого сечения.

4••. Диагональ осевого сечения цилиндра равна $8\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью его основания угол $60°$. Найти площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы, вписанной в цилиндр.

Тематическое оценивание № 4

Тема. *Конус. Шар*

1°. Радиус основания конуса равен 5 см, а образующая 13 см. Найти:
1) высоту конуса;
2) площадь осевого сечения конуса.

2°. На расстоянии 4 см от центра шара проведено сечение. Отрезок, соединяющий центр шара с точкой пересечения этого сечения с поверхностью шара, образует с плоскостью сечения угол $30°$. Найти площадь сечения.

3•. Через две образующие конуса, угол между которыми равен φ, проведено сечение. Найти площадь этого сечения, если высота конуса равна h, а угол между высотой и образующей равен α.

4••. Высота конуса равна 2 см, а радиус основания $2\sqrt{3}$ см. Найти площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, описанной вокруг конуса.

Тематическое оценивание № 5

Тема. *Объемы многогранников*

1°. В основании прямой призмы лежит прямоугольник, одна из сторон которого равна 15 см, а диагональ 17 см. Найти объем призмы, если ее высота равна 10 см.

2°. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Найти объем пирамиды, если ее высота равна 6 см.

3•. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Диагональ грани, содержащей боковую сторону треугольника, равна d и образует с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

4••. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом 30° при основании и боковой стороной 12 см. Все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол 60°. Найти объем пирамиды.

Тематическое оценивание № 6

Тема. *Объемы тел вращения*

1°. Объем шара равен 36π см^3. Найти диаметр шара.

2°. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, равен 6 см и образует с плоскостью нижнего основания угол 45°. Найти объем цилиндра.

3•. Осевое сечение конуса — правильный треугольник со стороной 4 см. Найти объем конуса.

4••. Площадь осевого сечения цилиндра равна S, а диагональ сечения образует с плоскостью основания угол α. Найти объем цилиндра.

Тематическое оценивание № 7

Тема. *Площади поверхностей тел вращения*

1°. Радиус основания конуса равен 6 см, а его высота — 8 см. Найти площадь полной поверхности конуса.

2°. В шаре на расстоянии 12 см от его центра проведено сечение, площадь которого равна 64π см^2. Найти площадь поверхности шара.

3•. В нижнем основании цилиндра проведена хорда длиной 6 см, которую видно из центра верхнего основания под углом 60°, а из центра нижнего основания — под углом 120°. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

4••. Равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна b, а угол при основании β, вращается вокруг прямой, содержащей его основание. Найти площадь поверхности тела вращения.

Тематическое оценивание № 8

Тема. *Обобщение и систематизация знаний учащихся по курсу геометрии 11 класса*

1°. В основании прямой призмы лежит параллелограмм, стороны которого равны 4 см и 6 см, а угол между ними 60°. Диагональ боковой грани, содержащей меньшую сторону основания, образует с плоскостью основания угол 30°. Найти площадь полной поверхности призмы.

2°. Образующая конуса равна 26 см, а его высота — 24 см. Найти объем конуса.

3•. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а боковая грань образует с плоскостью основания угол α. Найти объем пирамиды.

4••. Шар касается всех сторон ромба, диагонали которого равны 6 см и 8 см. Расстояние от центра шара до плоскости ромба равно 1 см. Найти объем шара.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕМАТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ

Вариант 2

Тематическое оценивание № 1

Тема. *Двугранный угол. Призма*

1°. Точка B лежит в одной из граней двугранного угла и удалена от его ребра на 10 см. Найти расстояние от точки B до другой грани двугранного угла, если его величина равна 60°.

2°. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна 17 см, а основание 16 см. Найти площадь полной поверхности призмы, если ее боковое ребро равно 10 см.

3•. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы равна l и образует с диагональю смежной боковой грани, выходящей из этой же вершины, угол β. Найти площадь полной поверхности призмы.

4••. Площади боковых граней прямоугольного параллелепипеда равны 24 см^2 и 32 см^2, а площадь основания — 12 см^2. Найти высоту параллелепипеда.

Тематическое оценивание № 2

Тема. *Пирамида*

1°. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна 24 см, а боковое ребро — 26 см. Найти:

1) площадь диагонального сечения пирамиды;
2) сторону основания пирамиды;
3) площадь боковой поверхности пирамиды.

2•. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при основании β. Все боковые грани образуют с основанием угол φ. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

3••. В основании пирамиды лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен 4 см. Боковые грани пирамиды, содержащие катеты треугольника, перпендикулярны плоскости основания, а третья грань образует с основанием угол 45°. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

Тематическое оценивание № 3

Тема. *Цилиндр. Вписанная и описанная призмы*

1°. Высота цилиндра равна 8 см, а диагональ его осевого сечения образует с плоскостью основания угол $30°$. Найти:

1) радиус основания цилиндра;
2) площадь осевого сечения цилиндра.

2°. Высота цилиндра равна 8 см, а диагонали его осевого сечения перпендикулярны. Найти радиус основания цилиндра.

3•. В нижнем основании цилиндра проведена хорда длиной 8 см, находящаяся на расстоянии 3 см от центра этого основания. Найти площадь осевого сечения цилиндра, если его высота равна 6 см.

4••. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см, а угол между ней и образующей цилиндра равен $60°$. Найти площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы, описанной вокруг цилиндра.

Тематическое оценивание № 4

Тема. *Конус. Шар*

1°. Высота конуса равна 6 см, а образующая 10 см. Найти:

1) радиус основания конуса;
2) площадь осевого сечения конуса.

2°. Радиус шара равен 17 см. Найти площадь сечения шара плоскостью, удаленной на 15 см от центра шара.

3•. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведено сечения. Найти площадь этого сечения, если радиус основания конуса равен R, а угол между образующей и плоскостью основания равен β.

4••. Высота конуса равна $2\sqrt{3}$ см, а радиус основания 4 см. Найти площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус.

Тематическое оценивание № 5

Тема. *Объемы многогранников*

1°. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 13 см, а один из катетов 12 см. Найти объем призмы, если ее высота равна 5 см.

2°. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13 см, 20 см и 21 см. Найти объем пирамиды, если ее высота равна 9 см.

3•. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной b и углом при вершине β. Диагональ грани, содержащей боковую сторону треугольника, образует с плоскостью основания угол φ. Найти объем призмы.

4••. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием 12 см и углом при вершине 120°. Все боковые ребра пирамиды образуют с ее высотой угол 60°. Найти объем пирамиды.

Тематическое оценивание № 6

Тема. *Объемы тел вращения*

1°. Объем шара равен 288π см^3. Найти диаметр шара.

2°. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см и образует с плоскостью нижнего основания угол 45°. Найти объем цилиндра.

3•. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник с углом при вершине 120° и боковой стороной 6 см. Найти объем конуса.

4••. Площадь осевого сечения цилиндра равна Q, а отрезок, соединяющий центр верхнего основания с точкой окружности нижнего основания, образует с плоскостью нижнего основания угол α. Найти объем цилиндра.

Тематическое оценивание № 7

Тема. *Площади поверхностей тел вращения*

1°. Высота конуса равна 5 см, а радиус основания — 12 см. Найти площадь полной поверхности конуса.

2°. Через конец радиуса шара проведено сечение, образующее с этим радиусом угол 30°. Найти площадь поверхности шара, если площадь сечения равна 36π см^2.

3•. В нижнем основании цилиндра проведена хорда, которую видно из центра нижнего основания под углом 90°, а из центра верхнего основания — под углом 60°. Найти площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус его основания равен 8 см.

4••. Равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α вращается вокруг прямой, содержащей его основание. Найти площадь поверхности тела вращения.

Тематическое оценивание № 8

Тема. *Обобщение и систематизация знаний учащихся по курсу геометрии 11 класса*

1°. В основании прямой призмы лежит ромб с острым углом 30°. Диагональ боковой грани равна 8 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найти площадь полной поверхности призмы.

2°. Образующая конуса равна 34 см, а радиус основания — 30 см. Найти объем конуса.

3•. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l и образует с плоскостью основания угол α. Найти объем пирамиды.

4••. Вершины равностороннего треугольника со стороной $5\sqrt{3}$ см лежат на поверхности шара, а расстояние от центра шара до плоскости треугольника равна 12 см. Найти объем шара.

Ответы и указания к тренировочным упражнениям

Вариант 1

1. 120°. **2.** 3 см. **3.** 30°. **4.** $\sqrt{61}$ см. **5.** 30°. *Указание.* Провести $EF \perp DC$ и $EK \perp AB$. Рассмотреть ΔEFK. **6.** 30°. **7.** 8 см. **8.** 60°. **9.** $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$. *Указание.* Пусть $\angle ABC = 60°$. Проведем $AD \perp \alpha$, $AC \perp l$. $\angle ABD = 45°$. Пусть $AB = a$ (рис. 37). Выразить отрезки AC и AD через a. **10.** $\sqrt{13}$ см. **11.** $2\sqrt{91}$ см. *Указание.* Провести через точку A плоскость, перпендикулярную ребру двугранного угла (рис. 38). Из ΔABE: $AE = 16$ см. Из ΔCDE: $CD = 9\sqrt{3}$ см.

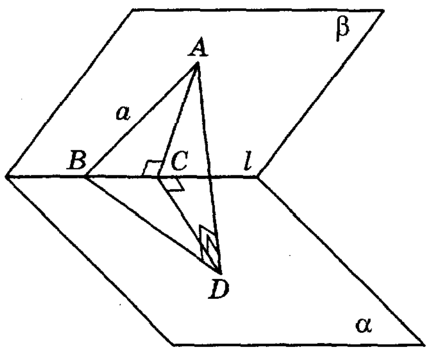

Рис. 37

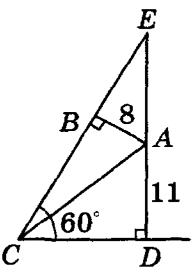

Рис. 38

14. $\sqrt{58}$ см. *Указание.* Пусть a, b и c — расстояния от точки A до граней угла. Тогда $a^2 + b^2 = 16$, $b^2 + c^2 = 64$, $a^2 + c^2 = 36$. Сложив эти равенства и разделив на два, получим $a^2 + b^2 + c^2 = 58$. **15.** $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$. **16.** $\arccos \frac{1}{3}$. **21.** Нет. *Указание.* Количество ребер произвольной призмы кратно 3. **22.** 9 см. **23.** $4\sqrt{5}$ см и $4\sqrt{13}$ см.

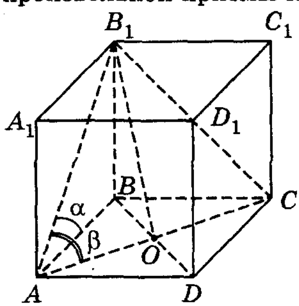

Рис. 39

25. 45° и 135°. **26.** $4\sqrt{2}$ см, 45°. **37.** 8 см, 16 см. **31.** 3 см. **35.** $(108 + 18\sqrt{3})$ см^2. **36.** 320 см^2. **37.** $4\sqrt{3}\ S \operatorname{ctg} \alpha$.

38. $2l^2 \sin 2\alpha$. **39.** $\frac{d^2 \sin 2\alpha}{2\cos^2\beta}$. *Указание.* Из ΔOB_1A: $B_1A = \frac{d}{2\cos\beta}$. Из ΔBB_1A: $B_1B = B_1A \sin\alpha$, $BA = B_1A \cos\alpha$ (рис. 39).

41. 12 см^2. **42.** $64\sqrt{3}$ см^2. *Указание.* Доказать, что четырехугольник BB_1C_1C — прямоугольник. **43.** 3 см. **44.** 480 см^2. **45.** 18 $(4 + \sqrt{3})$ см^2. **46.** 32 $(2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2})$ см^2. *Указание.* Доказать, что одна из боковых граней призмы — квадрат. **47.** 10 см. *Указание.* Пусть боковое ребро призмы равно l. Учитывая, что боковые грани, содержащие большие стороны основания призмы — прямоугольники, имеем $2 \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 8l + 2 \cdot 6l \sin 30^\circ = 316$. **49.** 460 см^2. **50.** $16\sqrt{3}$ см^2. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой о площади ортогональной проекции многоугольника. **51.** $8\sqrt{3}$ см^2. *Указание.* Искомое сечение — треугольник, высота которого равна половине диагонали призмы. **52.** $3a^2\sqrt{3}\ \mathrm{tg}\alpha$. **53.** *Указание.* Искомая точка — точка пересечения прямой MN и ее проекции на плоскость $A_1B_1C_1$. **54.** *Указание.* Искомые точки — точки пересечения прямой FE и ее проекций на плоскости ABC и $A_1B_1C_1$. **55.** *Указание.* Искомые сечения пересекают противоположные грани призмы по параллельным прямым. **56.** *Указание.* Найти точку P пересечения прямых FE и CC_1. Провести через точки A и P прямую. Пусть она пересекает A_1C_1 в точке D. $ADFE$ — искомое сечение. **57.** *Указание.* Найти точку E пересечения прямых D_1F и AD. Прямая CE пересекает AB в точке M. D_1FMC — искомое сечение. **58.** *Указание.* Пусть точка K_1 — ортогональная проекция точки K на плоскость ABC. Найти точку пересечения прямых K_1B и KF (точка P). Найти точки пересечения прямой PE с прямыми CB и AD. **59.** *Указание.* Пусть точки H_1 и M_1 — ортогональные проекции точек H и M на плоскость ABC соответственно. Найти точку пересечения прямых HM и H_1M_1 (точка F). Через точки F и E провести прямую и найти точки пересечения этой прямой с прямыми AB и CD. **61.** 104 см^2. **62.** $3\sqrt{7}$ см. **63.** 12 см, 15 см, 18 см. **66.** 6 см, 10 см, 8 см. *Указание.* Большая диагональ грани параллелепипеда проектируется на большую сторону основания. **67.** $2d^2\sin\alpha\,(\sin\beta + \sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta})$. **69.** 192 см^2 **70.** 20 см^2. *Указание.* Пусть d_1 и d_2 — диагонали ромба, h — высота параллелепипеда. Тогда $S_б = 2h\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 2\sqrt{d_1^2h^2 + d_2^2h^2} = 2\sqrt{36 + 64} = 20(\text{см}^2)$. **71.** $2\sqrt{3}$ см. *Указание.* Поскольку боковое ребро образует равные углы по 45° со сторо-

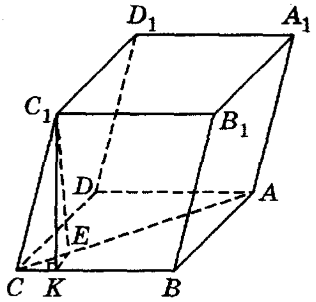

Рис. 40

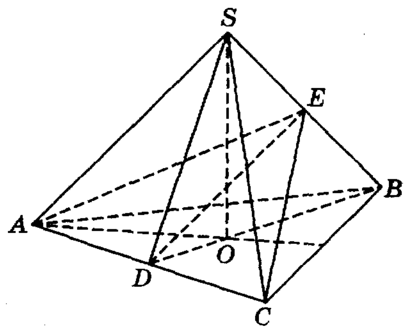

Рис. 41

нами острого угла, то оно ортогонально проектируется на луч, содержащий биссектрису этого угла. Пусть C_1E — высота параллелепипеда (рис. 40). Проведем $C_1K \perp CD$. Тогда из ΔC_1CK: $CK = 3\sqrt{2}$ см, из ΔCEK: $CE = 2\sqrt{6}$ см, из $\Delta\, C_1CE$: $C_1E = 2\sqrt{3}$ см. **72.** 4,5 см. *Указание.* Точка, равноудаленная от вершин квадрата, ортогонально проектируется в центр квадрата. **73.** *6 см.* **75.** Нет. *Указание.* Количество ребер какой-либо пирамиды — четное число. **77.** Остроугольный. **78.** Меньше 120°. **79.** Нет. **87.** 162 см^2. **88.** 0,5. *Указание.* $S_{осн} = S_б \cdot \cos 60°$. **91.** $36\sqrt{7}$ см^2. **92.** $(12 + 4\sqrt{3})$ см^2. **96.** $9\sqrt{39}$ см^2. **97.** 7,5 см, $0{,}5\sqrt{209}$ см. **98.** $6m^2\sqrt{3}\,\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **99.** $R^2\sin\alpha\left(6\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sqrt{3}\sin\alpha\right)$. *Указание.* Пусть a — сторона основания пирамиды, а b — ее боковое ребро. Тогда $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$. **100.** $\frac{b\sqrt{2}}{\sin\alpha}$, $\frac{2b}{\sin 2\alpha}$. **101.** 1) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; 2) 60°; 3) $2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$. **102.** 1) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$; 2) $2\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cos\alpha)$; 3) $2\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right)$. *Указание* (рис. 41). $OB = 2OD$, тогда $\operatorname{tg}\angle SBO = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\angle SDO$, $\angle SBO = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. Пусть $OD = a$, тогда $SD = \frac{a}{\cos\alpha}$, $CD = a\sqrt{3}$, $\angle ASC = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\cos\alpha)$. Пусть $\angle SBD = \beta$, тогда $DE = 3a\sin\beta$, $\operatorname{ctg}\angle CED = \sqrt{3}\sin\beta$, $\angle AEC = 2\operatorname{arcctg}(\sqrt{3}\sin\beta)$, где $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta}}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}$

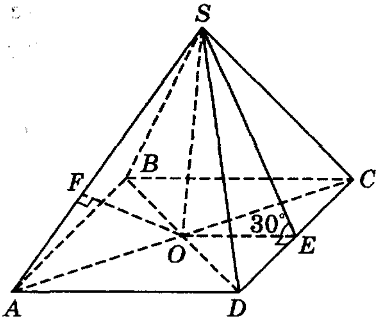

Рис. 42

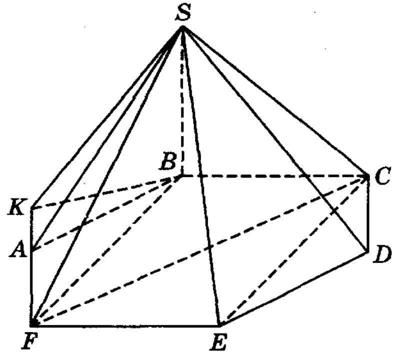

Рис. 43

103. $336\sqrt{3}$ см^2. *Указание* (рис. 42). Пусть $OE = a$, тогда $AO = a\sqrt{2}$, $SO = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} \angle SAO = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $AF = 6\sqrt{6}$ см, $AO = 6\sqrt{7}$ см, $AD = 6\sqrt{14}$ см, $S_{ABCD} = 504$ см^2, $S_б = \frac{S_{ABCD}}{\cos 30^\circ}$. **104.** $2l^2\sqrt{3}\sin\frac{\beta}{2}\times$ $\times\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\beta}{2}\right)$. **105.** *Указание.* Соединить точку S с точкой пересечения диагоналей параллелограмма. Доказать, что $SO \perp AC$ и $SO \perp BD$. **106.** $(88 + 24\sqrt{2})$ см^2. **107.** $8\sqrt{3}\,(1+\sqrt{2})$ см^2. **108.** $\frac{a^2 \operatorname{ctg}\alpha \cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$. **109.** $2\sqrt{3}$ см. **110.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. **111.** $72\sqrt{2}$ см^2. *Указание.* Поскольку все боковые грани образуют с основанием пирамиды равные углы, то ее высота проектируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды. Боковая сторона трапеции равна полусумме ее оснований, а $S_{осн} = S_б \cdot \cos 60^\circ$. **112.** $\frac{2r^2 \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{ctg}^2\alpha \cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$. **114.** 192 см^2. **116.** $48\,(1+\sqrt{3})$ см^2. **117.** $25\sqrt{3}\,(1+\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3})$ см^2. **118.** $30\,(10+\sqrt{41}+\sqrt{61})$ см^2. **119.** $0{,}5a^2\,(6+\sqrt{7})$. *Указание* (рис. 43). Пусть $SB \perp$ пл. ABC. $S_{SAB} = S_{SBC} = 0{,}5a^2$. $BF = a\sqrt{3}$, $SF = 2a$, $\angle SFE = 90^\circ$. $S_{SFE} =$ $= S_{SDE} = a^2$. Проведем $SK \perp AF$. $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SK = \frac{\sqrt{7}}{2}a$. $S_{SAF} =$ $= S_{SCD} = \frac{\sqrt{7}}{4}a^2$. **120.** $0{,}5h^2\left(2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\sin\alpha} + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\beta}\right)$.

121. $3\,(10\sqrt{3}+3\sqrt{7}+\sqrt{39})$ см^2. **122.** $8(3\sqrt{3}+4)$ см^2. **123.** 156 см^2. **124.** 24 см^2. *Указание* (рис. 44). Из ΔABC: $BC = 2\sqrt{3}$ см, $AB = 4\sqrt{3}$ см, $S_{ABC} = 6\sqrt{3}$ см^2. $\angle SCD = \angle SED = 30°$, $S_{ASC} + S_{ASB} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos 30°} = 12$ см^2. AD — биссектриса $\angle BAC$, откуда $\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{AC}{AB}$, $\dfrac{CD}{2\sqrt{3} - DC} = \dfrac{6}{4\sqrt{3}}$, $CD = 6\,(2-\sqrt{3})$ см. Из ΔSCD: $SD = CD\ \mathrm{tg}30°$, $SD = 2\sqrt{3}\,(2-\sqrt{3})$ см. $S_{SCB} = (12 - 6\sqrt{3})$ см^2. **125.** $(120 + 16\sqrt{3} + 4\sqrt{273})$ см^2. **126.** *Указание.* Найти точку D пересечения прямых FB и AC и точку пересечения прямых SD и FE. **127.** *Указание.* Найти точку пересечения прямых MN и AC. **130.** *Указание.* Найти точку T пересечения прямых MP и SC и точку пересечения прямых TK и BC. **131.** $\dfrac{H\sqrt{2}}{2}$. **132.** 5 см. **133.** $\dfrac{a^2}{4\cos\alpha}$. **134.** $12\sqrt{7}$ см^2. **136.** $(100 + 56\sqrt{6})$ см^2. **138.** $\sqrt{6}$ см. **140.** $5\sqrt{61}$ см^2. **142.** 3600°. **145.** $2d^2$. **146.** $2\sqrt{3} : 1$. **149.** 1008 см^2. **150.** $2\sqrt{13}$ см. **151.** 10 см^2. **152.** $\dfrac{2}{3}Q\sqrt{3}$. **154.** $\dfrac{Q\sqrt{3}}{2}$. **155.** $2\sqrt{6}$ см. **156.** 17 см^2. **157.** 3 см, $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **158.** 8 см. *Указание.* Искомое расстояние равно расстоянию от центра основания цилиндра до плоскости, проходящей через образующую цилиндра и проведенный отрезок. **159.** $2\ \mathrm{arcctg}\pi$. *Указание.* Стороны развертки $2\pi R$ и H, откуда $H = 2\pi R$. **160.** $\sqrt{l^2 + m^2\ \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$. **161.** $\sqrt{S\mathrm{tg}\alpha}$, $\dfrac{\sqrt{S\mathrm{ctg}\alpha}}{2\sin\dfrac{\beta}{2}}$.

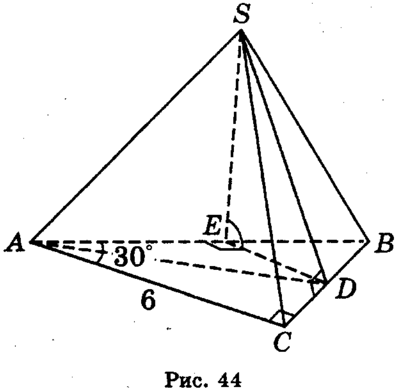

Рис. 44

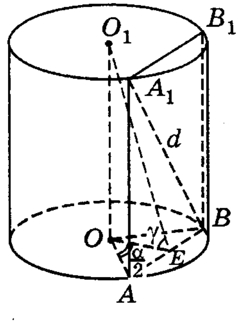

Рис. 45

162. $\dfrac{2d^2 \operatorname{ctg}\gamma \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{4\operatorname{ctg}^2\gamma \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}+1}$. *Указание* (рис. 45). Пусть $OO_1 = h$, тогда $OE = h\operatorname{ctg}\gamma$, $AB = 2h\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. $AB^2 + AA_1^2 = A_1B^2$, $4h^2\operatorname{ctg}^2\gamma \times$ $\times \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} + h^2 = d^2$, $h^2 = \dfrac{d^2}{4\operatorname{ctg}^2\gamma\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}+1}$. $S_{AA_1B_1B} = 2h^2\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

166. Да. **167.** Нет. *Указание.* Сравнить суммы противоположных сторон трапеции. **168.** Нет. **170.** 3 : 4. *Указание.* Отношение площадей боковых поверхностей призм равно отношению периметров оснований призм. Выразить сторону основания каждой из призм через радиус основания цилиндра. **171.** $2(\sqrt{2}-1)$ см. **173.** $\dfrac{3}{2}S\sqrt{3}$. **174.** $16R^2\operatorname{tg}\alpha$. **175.** $\dfrac{S\sqrt{2}}{8H\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. *Указание.* Пусть гипотенуза основания призмы равна c, тогда $R = \dfrac{c}{2} = \dfrac{S}{2H(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}$. **176.** $\dfrac{RH\sqrt{3}}{2}$. **177.** $16R^2\sin\alpha\sin2\alpha \times$ $\times \operatorname{tg}\beta\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. **178.** *Указание.* Через точку A провести прямую l, параллельную MM_1. Она пересекает нижнее основание цилиндра в точке A_1 ($AA_1 = MM_1$). K — точка пересечения прямых A_1B и MN. Искомая точка — точка пересечения прямых AB и KK_1 ($KK_1 \parallel MM_1$). **182.** 60 см^2. **183.** 6 см. **184.** 9π см^2, 36π см^2. **185.** 1) $R < H$; 2) $R = H$; 3) $R > H$. **186.** 3 см. **187.** $2\pi Q\operatorname{ctg}\alpha$. **188.** 30°. **189.** $4{,}8\pi$ см. *Указание* (рис. 46). $A_1O_1 = 6$ см, $AO = 4$ см. Тогда $\dfrac{PK}{A_1O_1} = \dfrac{OK}{OO_1}$, $\dfrac{PK}{AO} = \dfrac{O_1K}{OO_1}$, откуда $\dfrac{PK}{4} + \dfrac{PK}{6} = 1$. **190.** $\dfrac{m\operatorname{tg}\beta}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. **193.** 420 см^2.

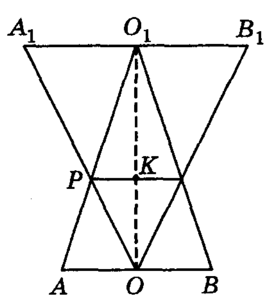

Рис. 46

194. 16 см^2. **195.** 108 см^2. **196.** $2\sqrt{21}$ см. **197.** $38\sqrt{6}$ см^2 или $19\sqrt{119}$ см^2. **198.** $\dfrac{l\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$, $\dfrac{l\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta}$, $l^2\sin^2\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

199. *Указание.* Продлить две образующие до пересечения (точка S). Найти точку пересечения луча SB с окружностью нижнего основания (точка B_1). Через точку B провести прямую, параллельную прямой B_1A. Искомая точка — точка пересечения прямой BA и линии пересечения плоскостей B_1BA и MM_1N_1. **202.** Да. Основание высоты пирамиды — точка пересечения биссектрис углов основания пирамиды. **204.** 24 см^2. **205.** 160 см^2. **206.** $5\sqrt{15 - 4\sqrt{2}}$ см. **207.** $5\sqrt{3}$ см^2. **208.** $\dfrac{Q\,\mathrm{tg}\beta}{2\sin 2\alpha}$. *Указание.* Пусть c — гипотенуза треугольника основания. Тогда $\dfrac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha = Q$, $R = \dfrac{c}{2} = \sqrt{\dfrac{Q}{\sin 2\alpha}}$, $h = R\,\mathrm{tg}\beta$, где R и h — радиус основания и высота конуса соответственно. **210.** 18 см и 2 см. **211.** 13 см. **212.** 27π см^2. **213.** $\sqrt{\dfrac{Q}{2\pi}}$. **214.** 16 : 25. **215.** $4\sqrt{2}$ см. **216.** 20 см. **217.** 8 см. **218.** 5 см. **219.** 8 см. **220.** 10 см или $2\sqrt{7}$ см. **221.** 24π см. **225.** 10 см, 21,125 см. **226.** $l\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{l}{2\sin\alpha}$. **228.** $3\sqrt{3}$ см, 3 см, 9 см. **229.** $\dfrac{\sqrt{(R-r)^2\,\mathrm{tg}^2\alpha + (R+r)^2}}{2\sin\alpha}$. *Указание.* Пусть трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) — осевое сечение усеченного конуса. Тогда радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABD. **230.** $\sqrt{3}$. **231.** $0{,}5\sqrt{30}$ см. **232.** 288 см^2. **233.** $4\sqrt{2}\,R^2 \sin 2\alpha \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \beta\right)$.

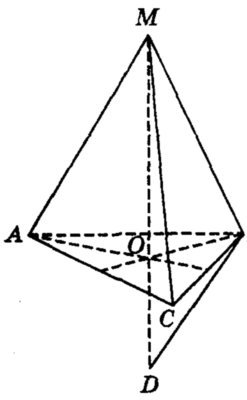

Рис. 47

234. $7\sqrt{3}$ см. **235.** $2(\sqrt{3}-1)$ см. **236.** 12 см^2. **237.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **239.** 12 см. **240.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$. **241.** $\dfrac{8r^2\,\mathrm{ctg}^2\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **242.** 3 см. **243.** 13,5 см.

Указание (рис. 47). Продлим высоту MO образованной правильной пирамиды $BMABC$ до пересечения с поверхностью окружности (точка D). $\angle MBD = 90^\circ$. Пусть R — радиус шара, $MB = a$. Тогда $MD = 2R$,

$OB = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{a^2}{3} + 324 = a^2$, $a = 9\sqrt{6}$ см.

$OB^2 = MO \cdot OD$,

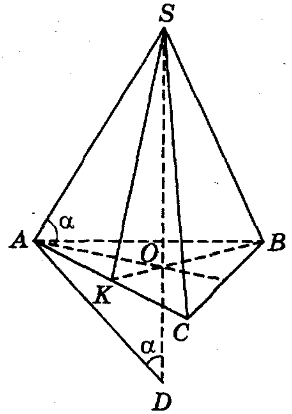

Рис. 48

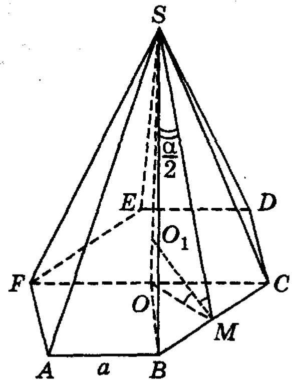

Рис. 49

$OD = \frac{OB^2}{OM} = \frac{162}{18} = 9$ (см), $R = \frac{1}{2}MD = 13{,}5$ см. **244.** $3\sqrt{3}\ R^2 \times$ $\times \sin^3\alpha \cos\alpha\sqrt{3\sin^2\alpha + 1}$. *Указание.* Продлим высоту SO пирамиды до ее пересечения с поверхностью сферы в точке D (рис. 48). $SD = 2R$, $\angle SAD = 90^\circ$. Из ΔSAD: $SA = 2R\sin\alpha$. Из ΔSAO: $SO =$ $= AS\sin\alpha = 2R\sin^2\alpha$, $AO = R\sin 2\alpha$. $AC = R\sqrt{3}\sin 2\alpha$, $OK = \frac{1}{2}R\sin 2\alpha$,

$$SK = \sqrt{4R^2\sin^4\alpha + \frac{1}{4}R^2\sin^2 2\alpha} = R\sin^2\alpha\sqrt{4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha},$$

$$S_6 = 3\sqrt{3}\ R^2\sin^3\alpha\cos\alpha\sqrt{4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 3\sqrt{3}\ R^2\sin^3\alpha\cos\alpha \times$$

$\times\sqrt{3\sin^2\alpha+1}$. **245.** 8 см. *Указание.* Пусть $SABCD$ — данная пирамида, SO — ее высота. Тогда $AB = 8\sqrt{2}$ см, $\sin\angle ASB = \frac{AB}{2\cdot\frac{8\sqrt{6}}{3}} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle ASB = 60^\circ$, откуда $AS = 8\sqrt{2}$ см, $SO = 8$ см.

246. $\frac{a\sqrt{3\left(1 - 3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}}{2\left(1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}$. *Указание* (рис. 49). $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$SM = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $\cos\angle SMO = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\angle O_1MO = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle SMO =$

$$= \frac{\sqrt{1 - 3\,\mathrm{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}, \quad OO_1 = OM\,\mathrm{tg}\,\angle O_1MO.$$ **247.** $\dfrac{a\sqrt{2}\,\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{4\sqrt{-\cos\alpha}}$.

Указание (рис. 50).

$OC = OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $OK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}$,

$\sin\angle SCO = \dfrac{OK}{OC} = \mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}$,

$\cos\angle SCO = \dfrac{\sqrt{-\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$,

$$SC = \frac{OC}{\cos\angle SCO} = \frac{a\sqrt{2}\,\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{-\cos\alpha}},$$

$$R = \frac{SA}{2\sin\angle SCA} = \frac{a\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{4\sqrt{-\cos\alpha}}.$$

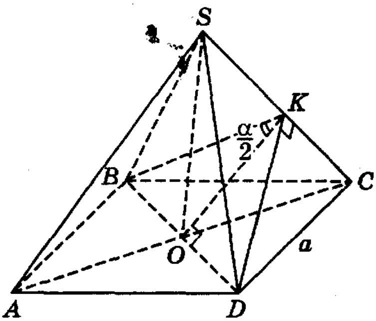

Рис. 50

248. $4\,(2-\sqrt{3})$ см. **253.** $60\sqrt{3}$ см^3. **254.** $512\sqrt{2}$ см^3. **257.** $20\sqrt{14}$ см^3. *Указание.* Четырехугольник AB_1C_1D — квадрат. **258.** 96 см^3. **260.** 47:26. *Указание.* $V_1 = 60x^3$, $V_2 = 24y^3$, $60x^3 = 2{,}5 \cdot 24y^3$, откуда $x = y = 1$. **261.** 1200 см^3. *Указание.* Пусть диагонали ромба равны $2x$ *см* и $5x$ *см*, тогда $289 - 4x^2 = 625 - 25x^2$, откуда $x = 4$. **262.** $ab^2\,\mathrm{tg}\alpha$. **263.** $\sqrt{MNS\,\sin\alpha}$. *Указание.* Пусть стороны основания, принадлежащие граням с площадями M и N, равны a и b соответственно. Тогда $ab\,\sin\alpha = S$, $ah = M$, $bh = N$, $abh^2 = MN$, $h = \sqrt{\dfrac{MN}{ab}} = \sqrt{\dfrac{MN\,\sin\alpha}{S}}$. **264.** 540 см^3. *Указание.* Пусть размеры параллелепипеда a, b и c, тогда $a^2 + b^2 = 169$, $b^2 + c^2 = 225$, $a^2 + c^2 = 106$, $2\,(a^2 + b^2 + c^2) = 500$, откуда $a^2 + b^2 + c^2 = 250$, $c^2 = 81$, $a^2 = 25$, $b^2 = 144$. **265.** 60 см^3. *Указание.* Пусть размеры параллелепипеда a, b и c, тогда $ab = 12$, $bc = 15$, $ac = 20$, $(abc)^2 = 3600$. **266.** $24\sqrt{6}$ см^3. **267.** $8R^3\sin\alpha\,\sin\beta\,\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$. **268.** $54\sqrt{2}$ см^3. **269.** 162 см^3. **270.** $18\sqrt{2}$ см^3. **271.** $6\sqrt{21}$ см^3. *Указа-*

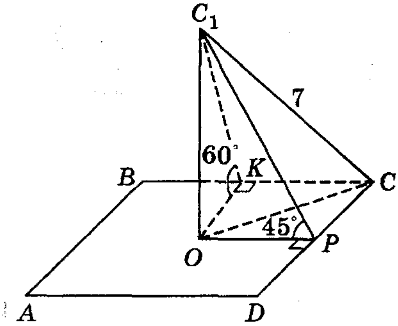

Рис. 51

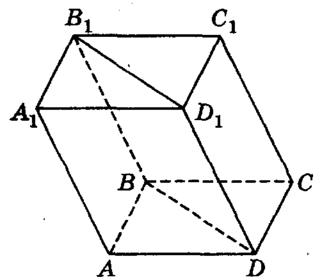

Рис. 52

ние. Проведем высоту C_1O параллелепипеда (рис. 51). Пусть

$C_1O = h$, тогда $OK = \frac{h}{3}$, $OP = h$, $OC = \sqrt{\frac{h^2}{3} + h^2} = \frac{2h}{\sqrt{3}}$.

$OC^2 + OC_1^2 = C_1C^2$, откуда $C_1O = \sqrt{21}$ см. **272.** $32\sqrt{3}$ см^3.

273. $2a^2b \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}$. **274.** mQ. *Указание.* Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный наклонный параллелепипед, $S_{BB_1D_1D} = Q$ (рис. 52). «Разрежем» параллелепипед по плоскости BB_1D_1 и совместим грани AA_1B_1B и DD_1C_1C. Получим параллелепипед, в котором BB_1D_1D — грань, а m — расстояние между гранью BB_1D_1D и параллельной ей гранью. **275.** $640\sqrt{3}$ см^3. **277.** 32 см^3. **278.** $144\sqrt{3}$ см^3. **279.** $1{,}5\sqrt{3}\,l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. **281.** 108 см^2. **282.** $0{,}25c\sqrt{32Q^2 - 2c^4}$. **283.** $160\sqrt{23}$ см^3. **284.** 2 : 3. **285.** $HQ\cos\varphi$. **286.** $0{,}25V$. **287.** $\frac{36d^3\sqrt{7}}{49}$. **288.** $\frac{a^3\operatorname{tg}\beta}{2\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\beta - \operatorname{tg}^2\beta\sin^2\alpha}$. **289.** $\frac{2S^2\sin 2\alpha}{a+b}$. *Указание.* Площадь основания призмы равна $S\cos\alpha$.

290. $\frac{aQ}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$. **291.** 1800 см^3 или 960 см^3. *Указание.* Пусть a — сторона основания призмы, h — ее высота. Тогда $a^2 + h^2 = 289$, $4ah = 480$, откуда $a = 15$ см, $h = 8$ см или $a = 8$ см, $h = 15$ см. **293.** $\frac{1}{64}P^2(2M - P)$ или $\frac{1}{64}M^2(2P - M)$. **294.** $\frac{Q\sqrt{S}}{2\sqrt[4]{12}}$.

295. 168 см^3. *Указание.* Пусть высота призмы h, тогда стороны основания $\frac{26}{h}$, $\frac{28}{h}$, $\frac{30}{h}$, откуда полупериметр основания $p = \frac{42}{h}$, а площадь основания $S=\sqrt{\frac{42}{h}\left(\frac{42}{h}-\frac{26}{h}\right)\left(\frac{42}{h}-\frac{28}{h}\right)\left(\frac{42}{h}-\frac{30}{h}\right)}=\frac{336}{h^2}=84$, тогда $h = 2$ см. **296.** $6r^3\sqrt{3}$. **297.** $48\sqrt{6}$ см^3. *Указание.* Диагональ большего диагонального сечения равна 8 см. Пусть угол между диагоналями диагонального сечения равен α, тогда $\frac{1}{2}\cdot 8^2 \times$ $\times \sin\alpha = 32$, откуда $\alpha = 90^\circ$, т.е. диагональное сечение — квадрат. **300.** $3\sqrt{15}$ см^3. *Указание.* Пусть $ABCD$ — грань призмы, являющаяся ромбом. $AB = 3$ см, $BD = 4$ см, тогда $AC = 2\sqrt{5}$ см. Высота ромба h также является и высотой призмы, $h = \frac{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD}{AB} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ см. **301.** 36 см^3. *Указание.* Воспользуйтесь формулой $V = S_{\text{перп}}\cdot l$, где $S_{\text{перп}}$ — площадь сечения призмы, перпендикулярного боковому ребру, l — боковое ребро. **302.** $\frac{1}{2}\,alm$. *Указание* (рис. 53). Достроим треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ до четырехугольной $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тогда $V=\frac{1}{2}\times$ $\times S_{AA_1D_1D}\cdot m$. **303.** $256\sqrt{2}$ см^3. **307.** $\frac{1}{24}V$. **309.** $6\sqrt{3}$ см^3. **312.** $\frac{2S\sqrt{3}}{3\sqrt[4]{3}}$. **314.** 54 см^3. **315.** $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ см^3. *Указание.* Высота пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания.

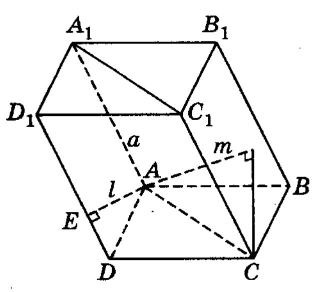

Рис. 53

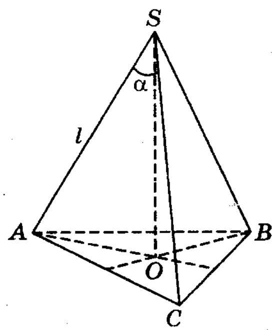

Рис. 54

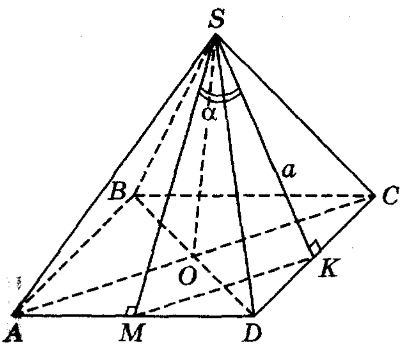

Рис. 55

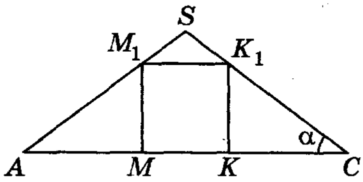

Рис. 56

Радиус этой окружности вычисляется по формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$. **316.** $168\sqrt{3}$ см^3. *Указание.* Высота пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание. Радиус этой окружности вычисляется по формуле $r = \dfrac{S}{p}$. **317.** $\dfrac{32}{3}a^3 \operatorname{tg}\alpha$.

319. $\dfrac{1}{6}S\sqrt{S\sin\alpha}\operatorname{tg}\beta$. **320.** $12\sqrt{3}$ см^3. **321.** 96 см^3. **322.** $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ см^3.

323. $\dfrac{1}{3}l^3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{3-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$. *Указание* (рис. 54). $AC = 2l\sin\dfrac{\alpha}{2}$,

$AO = \dfrac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$. Из ΔSAO: $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{l^2 - \dfrac{4}{3}l^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} =$

$= l\sqrt{\dfrac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}$. **324.** $\dfrac{1}{6}a^3\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi$. **325.** $\dfrac{1}{6}a^3\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\times$ $\times\operatorname{tg}\alpha$. *Указание.* Пусть SO — высота пирамиды. Тогда $\angle SCO = \alpha$, $\angle ABO = \angle OBC = \dfrac{\beta}{2}$. **326.** $\dfrac{8}{3}a^3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$. *Указание* (рис. 55).

Из ΔSMK: $MK = 2a\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $AC = 4a\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $OK = \sqrt{2}a\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Из ΔSOK : $SO = \sqrt{a^2 - 2a^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} = a\sqrt{\cos\alpha}$. **327.** $64\sqrt{3}$ см^3. *Указание.* Пусть SO — высота пирамиды $SABC$ ($AC = BC = 10$ см, $AB = 16$ см), тогда SC — наименьшее боковое ребро, поскольку $OC < OB$ и $OC < OA$. **329.** $\dfrac{4h^3\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **330.** $\dfrac{a^3}{(1+\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)^3}$. *Указа-*

ние (рис. 56). Рассмотрим диагональное сечение пирамиды. $MM_1 = x$ — ребро куба, $AC = a\sqrt{2}$. $KC = x\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $MK = x\sqrt{2}$. Тогда $a\sqrt{2} = x\sqrt{2} + 2x\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $x = \dfrac{a}{1 + \sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$. **332.** $\dfrac{76\sqrt{3}}{9}$ см^3. **333.** $\dfrac{63\sqrt{3}}{4}$ см^3. **334.** $25\,\dfrac{1}{3}$ см^3. **335.** 87,5 см^3. *Указание.* Если R_1 и R_2 — радиусы окружностей, описанных около большего и меньшего оснований усеченной пирамиды соответственно, H — ее высота, то $H = (R_1 - R_2)\,\mathrm{tg}\,45^\circ$. **336.** $784\sqrt{3}$ см^3. *Указание.* Если r_1 и r_2 — радиусы окружностей, вписанных в большее и меньшее основания усеченной пирамиды соответственно, H — ее высота, то $H = (r_1 - r_2)\,\mathrm{tg}\,60^\circ$. **337.** $224\sqrt{3}$ см^3. *Указание.* Если h_1 и h_2 — высоты большего и меньшего оснований, проведенные к средним по величине сторонам оснований, H — высота усеченной пирамиды, то $H = (h_1 - h_2)\,\mathrm{tg}\,30^\circ$. **338.** $63\sqrt{2}$ см^3. *Указание* (рис. 57). Пусть O_1 и O — центры меньшего и большего оснований соответственно, тогда $O_1B_1 = 2\sqrt{3}$ см, $OB = 4\sqrt{3}$ см, $KB = 2\sqrt{3}$ см. Из ΔKPB: $PB = 3$ см. Из ΔB_1PB: $BB_1 = 3\sqrt{2}$ см. Из ΔB_1KB: $B_1K = \sqrt{6}$ см. **339.** 84 см^3. *Указание* (рис. 57). O_1 и O — центры меньшего и большего оснований усеченной пирамиды соответственно, тогда $O_1B_1 = 2\sqrt{3}$ см, $OB = 4\sqrt{3}$ см, $KB = 2\sqrt{3}$ см. $S_б = 9\sqrt{3} + 36\sqrt{3} = 45\sqrt{3}$ (см^2), тогда $S_{CC_1B_1B} = 15\sqrt{3}$ см^2, $B_1P = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ см, $BP = 3$ см, $KP = \sqrt{3}$ см. Из ΔB_1KP: $B_1K = \sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 - (\sqrt{3})^2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ см. **344.** $\dfrac{a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{3b}$. **348.** $228\,\dfrac{2}{3}$ см^3.

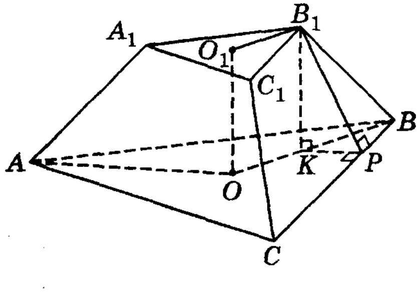

Рис. 57

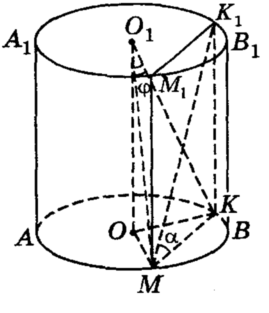

Рис. 58

349. $\frac{117V}{125}$. **350.** 1 : 7 : 19. *Указание.* Если объем наименьшей из полученных пирамид равен V, то объем средней пирамиды $8V$, а объем всей пирамиды $27V$. **351.** $3\sqrt{3}$. **357.** $\frac{m^3}{4\pi}$. **358.** 216π см^3.

359. 288π см^3. **362.** $\dfrac{\pi P^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{32\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^3}$. **363.** $\dfrac{\pi S\sqrt{S}}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} \times$

$\times \left(\operatorname{ctg}\alpha - 4\operatorname{tg}\alpha \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}$. *Указание* (рис. 58). Пусть $OO_1 = H$, тогда $MK = H\operatorname{ctg}\alpha$, $H^2\operatorname{ctg}\alpha = S$, $H = \sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}$, $MK = \sqrt{S\operatorname{ctg}\alpha}$, $O_1M = \dfrac{\sqrt{S\operatorname{ctg}\alpha}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$. Из ΔOO_1M: $R^2 = OM^2 = \dfrac{S\operatorname{ctg}\alpha}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} - S\operatorname{tg}\alpha$.

364. $2\sqrt[3]{\dfrac{V^2\operatorname{tg}\varphi}{\pi^2}}$. **365.** $\frac{2V}{\pi S}, \frac{\pi S^2}{4V}$. **367.** $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3. **369.** $768\sqrt{3}$ см^3.

372. $\sqrt{3}$. **373.** 8π см^3. *Указание.* Если ΔSAB — осевое сечение конуса ($SA = SB$), R_1 — радиус окружности, описанной около ΔSAB, то $\sin\angle SAB = \frac{AS}{2R_1} = 0{,}5$, откуда $\angle SAB = 30^\circ$. **374.** 27 : 98.

375. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{54\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. *Указание.* $SABC$ — пирамида, вписанная в конус (S — вершина). Тогда $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Проведем высоту SO. $SA = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Из ΔSAO: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$.

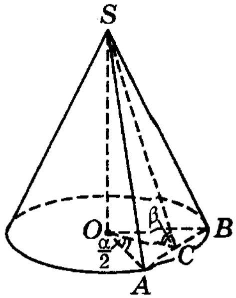

Рис. 59

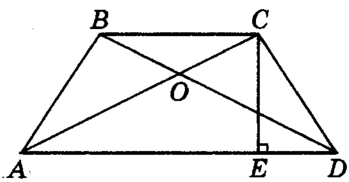

Рис. 60

376. $\frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{2S\cos\beta}{\sin\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} \cos\frac{\alpha}{2}\, \mathrm{tg}\beta$. *Указание* (рис. 59). $S_{OAB} = S_{SAB} \times$ $\times \cos\beta = S\cos\beta$, $\frac{1}{2}OB^2\sin\alpha = S\cos\beta$, $OB = \sqrt{\frac{2S\cos\beta}{\sin\alpha}}$, $OC = OB\cos\frac{\alpha}{2}$, $SO = OC\,\mathrm{tg}\beta$. **377.** $9\pi\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см^3. *Указание.* Пусть угол при вершине осевого сечения α ($\alpha > 90^\circ$), тогда $\frac{1}{2}\cdot 6^2 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6^2\sin\alpha$, $\sin\alpha = 0{,}5$, $\alpha = 150^\circ$, $R = 6\cos15^\circ$, $H = 6\sin15^\circ$, $V = \frac{1}{3}\pi\cdot 36\cos^2 15^\circ \times$ $\times\, 6\sin15^\circ = 36\pi\cdot 2\sin15^\circ\cos^2 15^\circ = 18\pi\cos15^\circ = 18\pi\cdot\sqrt{\frac{1+\cos30^\circ}{2}} =$ $= 9\pi\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **380.** $\frac{\pi}{3}(R^3 - r^3)\,\mathrm{tg}\alpha$. **381.** $\frac{448\sqrt{3}}{3}\pi$ см^3. **382.** $\frac{7}{8}V$. **383.** 474π см^3. *Указание* (рис. 60). $ABCD$ — осевое сечение усеченного конуса. $BO : OD = BC : AD = 3 : 7$. $BC = 3x$, $AD = 7x$, $ED = 2x$, $AE = 5x$, $100 - 4x^2 = 289 - 25x^2$, $21x^2 = 189$, $x = 3$ см, $BC = 9$ см, $AD = 21$ см, $CE = 8$ см. **388.** $3\cdot\sqrt[3]{4}$ см. **389.** 8π см. **390.** $\frac{4S\sqrt{\pi S}}{3\pi\cos^3\alpha}$. **391.** $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{9V^2}{16\pi^2}} - \frac{a^2}{3}}$. **392.** $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a^2b^2 + 4m^2(a^2+b^2)}{4(a^2+b^2)}\right)^{\frac{3}{2}}$. **394.** $\frac{416}{3}\pi$ см^3. **396.** $576\pi(2-\sqrt{2})$ см^3. **399.** 1 : 11. **400.** 1 : 1. **401.** 2. **403.** 1 : 3. **404.** 24 см, 6 см. **406.** 2 см. **407.** 180π см^2. **408.** $\left(\frac{24}{\pi} + 16\sqrt{3}\right)$см^2. **409.** $\frac{128\pi}{3}$ см^2. **410.** $\frac{\pi l^2\sin2\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

411. $544\sqrt{3}\pi$ см^2. **412.** $2\sqrt[3]{\pi V^2\,\mathrm{ctg}^2\alpha}\,(1 + \mathrm{tg}\alpha)$. **413.** $2\pi\sqrt{3}$ см^2. *Указание* (рис. 61). Пусть $AB = a$, $AC = b$, тогда

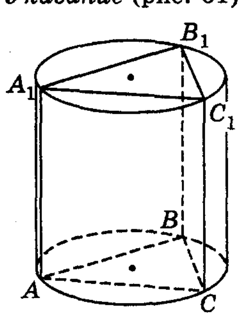

Рис. 61

$BC = \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}}$, $R = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = BC$,

$S = 2\pi RH = 2\pi\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{3}}\;H =$

$= 2\pi\sqrt{a^2H^2 + b^2H^2 - aH\cdot bH\cdot\sqrt{3}} =$

$= 2\pi\sqrt{9+12-18} = 2\pi\sqrt{3}$ (см^2). **418.** 96π см^3. **419.** 320π см^3. **420.** 60°. *Указание.* Пусть R — радиус основания конуса, l — его образующая. Тогда $Rl = 32$, $l^2 - R^2 = 48$. Разделив второе уравнение на первое, имеем: $\left(\frac{l}{R}\right)^2 - \left(\frac{R}{l}\right)^2 = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = \frac{3}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, где α — искомый угол. **421.** 1 : 3. **422.** $\pi S\,(1 + \sqrt{2})$. *Указание.* Если радиус основания конуса R, то его высота также R, откуда $R = \sqrt{S}$. **423.** 9 : 16. **424.** $(\sqrt{3} + 1) : 2$. *Указание.* Площади боковых поверхностей подобных фигур относятся как квадраты соответствующих линейных элементов этих фигур. **425.** $\pi S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. **426.** $\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. **427.** 36π см^2. *Указание.* Если l — образующая конуса, R — радиус его основания, то $\frac{2\pi l}{3} = 2\pi R$, откуда $l = 3R$. **429.** $\dfrac{\pi a^2 \sin\frac{\varphi + \alpha}{4} \cos\frac{\varphi - \alpha}{4}}{2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\varphi}{2}}$.

430. $\dfrac{\pi H^2}{\sin^2\beta \sin^2\frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin^2\beta}\left(\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin^2\beta} + 1\right)$. *Указание* (рис. 62). Из ΔSOD: $SD = \dfrac{H}{\sin\beta}$. Из ΔSAD: $SA = \dfrac{H}{\sin\beta \sin\frac{\alpha}{2}}$.

Из ΔOAS: $OA = \dfrac{H\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin^2\beta}}{\sin\frac{\alpha}{2} \sin\beta}$.

431. $\dfrac{2\pi Q}{\sin\alpha} \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\beta + \sin^2\frac{\alpha}{2}}$. *Указание* (рис. 62).

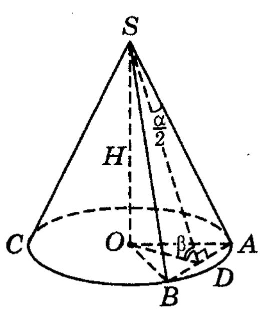

Рис. 62

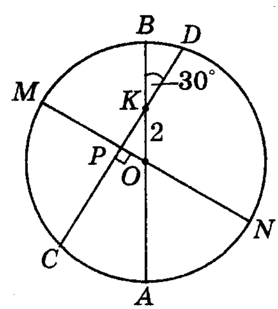

Рис. 63

$\frac{1}{2}SA^2\sin\alpha = Q$, $SA = \sqrt{\frac{2Q}{\sin\alpha}}$. З ΔSAD: $AD = SA\sin\frac{\alpha}{2}$, $SD = SA\cos\frac{\alpha}{2}$. Из ΔSOD : $OD = SD\cos\beta = SA\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta$. Из ΔOAD: $OA = \sqrt{OD^2 + DA^2}$. **433.** 5 см. **434.** 54π см^2. **435.** $\frac{\sqrt{S^2 - (M - N)^2}}{\pi}$.

436. 72π см^2. **437.** $\pi l^2\sin\alpha$. *Указание.* Если диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны, то ее высота равна средней линии. **441.** В 16 раз. **442.** 3. **443.** $S_1 + S_2$. **446.** *а*) 40π см^2; *б*) 280π см^2.

447. 24π см^2, 40π см^2. *Указание* (рис. 63). Проведем через центр O окружности перпендикуляр к указанной плоскости. $OP = OK\sin 30^\circ = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$ (см), откуда $MP = 3$ см, $PN = 5$ см.

449. 1008π см^3, 396π см^2. **450.** $\sqrt{2}\,\pi b^2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\operatorname{tg}\alpha$.

451. $\frac{1}{12}\pi(a - b)^2(a + 2b)\operatorname{tg}^2\alpha$. *Указание.* Тело вращения состоит из двух конусов и цилиндра.

452. $\frac{\pi b^2(1 + \sin\beta + \sin\beta\cos^2\beta + \cos^3\beta)}{\sin^2\beta}$. *Указание* (рис. 64). Поверхность указанного тела вращения состоит из боковой поверхности усеченного конуса с осевым сечением ACC_1A_1, площади его большего основания и боковой поверхности конуса с осевым сечением CBC_1. $AB = \frac{b}{\sin\beta}$, $BC = b\operatorname{ctg}\beta$, $CD = b\operatorname{ctg}\beta\cos\beta$. **453.** $\frac{\pi Q^2}{a}$.

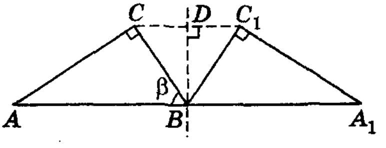

Рис. 64

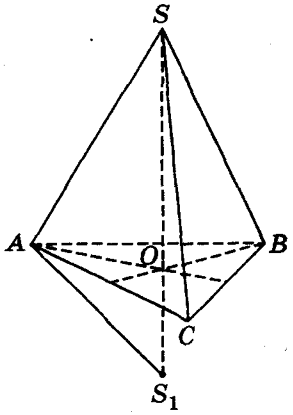

Рис. 65

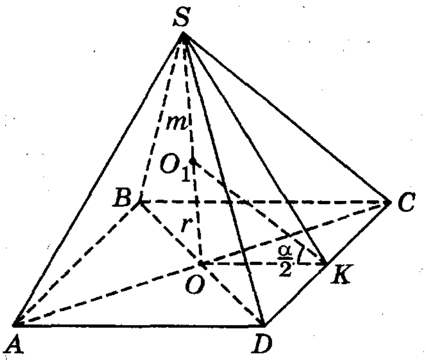

Рис. 66

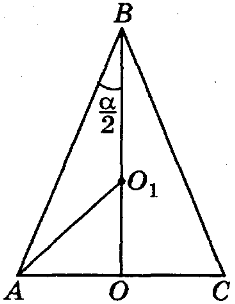

Рис. 67

454. $24\pi(3+\sqrt{3})$ см^2. **455.** $\frac{1}{12}\pi a^2 \operatorname{tg}\alpha \cdot (a \operatorname{tg}\alpha + 6b)$. **458.** $32\sqrt{3}\,\pi$ см^2. **459.** 8π см^3, $4\sqrt{3}\pi\,(2+\sqrt{3})$ см^2. **461.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi l^2 \operatorname{ctg}\alpha$. **462.** $\frac{\pi m^2 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\cos\varphi}$. **464.** $\frac{\pi V\sqrt{3}}{9}$. **465.** $\frac{\pi l^6}{6h^3}$. *Указание* (рис. 65). Продлим высоту SO пирамиды до пересечения с поверхностью шара. Тогда $\angle SAS_1 = 90^\circ$, $SS_1 = 2R$, $l^2 = h \cdot 2R$. **466.** $\frac{4\pi m^3}{3\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha - 1\right)^3}$. *Указание* (рис. 66). Пусть O_1 — центр шара, r — ее радиус. Тогда из ΔO_1OK: $OK = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Из ΔSOK: $SO = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha = m + r$. **468.** Можно. *Указание.* Найти отношение объема конуса к объему вписанного в него шара. **470.** $\sqrt[3]{V^2} = \sqrt[3]{V_1^2} + \sqrt[3]{V_2^2}$, где V — объем шара, диаметр которого — гипотенуза треугольника, а V_1 и V_2 — объемы шаров, диаметры которых — катеты треугольника. **471.** $\frac{3}{8}V$. **472.** $4V\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)$. *Указание* (рис. 67). Рассмотрим ΔABC — осевое сечение конуса. $AO = R$, $OO_1 = r$, $BO = R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $\frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = V$, $R = \sqrt[3]{\frac{3V\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\pi}}$.

Из ΔAOO_1: $r = R\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)$. **473.** *Указание.* Выразить объемы всех тел через радиус шара. **474.** $\frac{2}{3}\pi R^3\left(\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1\right)$. **475.** $1129\frac{1}{3}\pi$ см^3. *Указание.* Искомый объем равен сумме объемов двух шаровых сегментов, радиусы шаров которых 13 см и 15 см, а соответствующие высоты — 8 см и 6 см. **476.** $\frac{1}{4}V$.

СОДЕРЖАНИЕ