А.ГАЙШТУТ

МАТЕМАТИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

В ПОМОЩЬ ПОВТОРЯЮЩИМ МАТЕМАТИКУ ПО СПРАВОЧНИКАМ

ГЕОМЕТРИЯ

Тема 6. ПЛАНИМЕТРИЯ

Содержание

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Решение задач на построение

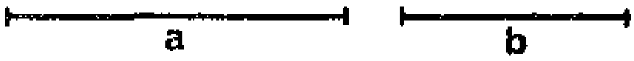
Греки времен Евклида считали прямую линию и окружность основными линиями в геометрии и потому требовали, чтобы всякое геометрическое построение выполнялось при помощи лишь тех инструментов, которые вычерчивают эти линии.

В дальнейшем все построения будут выполняться лишь при помощи циркуля и линейки.

Простейшие геометрические построения

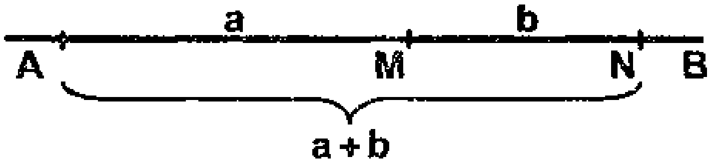
677. Построить отрезок, равный данному.

678. Построить отрезок, равный сумме двух данных отрезков a и b.

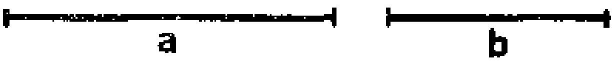


Решение.

На произвольной прямой AB отложим от точки A отрезок $AM = a$, затем отложим отрезок $MN = b$ в ту же сторону от M, тогда $AN = a + b$.

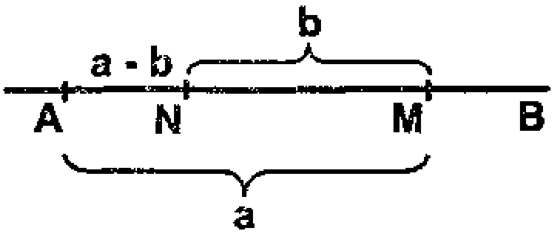


679. Построить отрезок, равный разности двух данных отрезков a и b.



Решение.

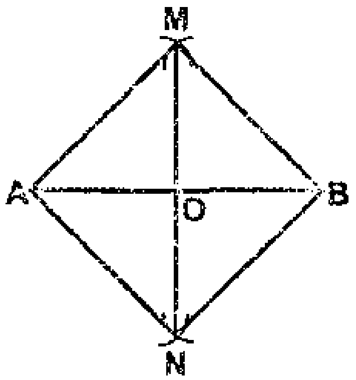
На произвольной прямой AB отложим от точки A отрезок $AM = a$, затем отложим отрезок $MN = b$ в противоположную сторону от M, тогда $AN = a - b$.



680. Данный отрезок разделить пополам.

Решение.

Из концов A и B, как из центров, радиусом, большим половины AB, опишем две окружности, которые пересекутся в точках M и N; соединив M и N, в пересечении AB и MN найдем искомую точку O.



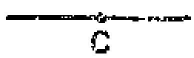
Фигура $AMBN$ есть ромб, и поэтому $AO = OB$.

681. Разделить данный отрезок на 4, 8, 16, ... 2^n равных частей.

Решение.

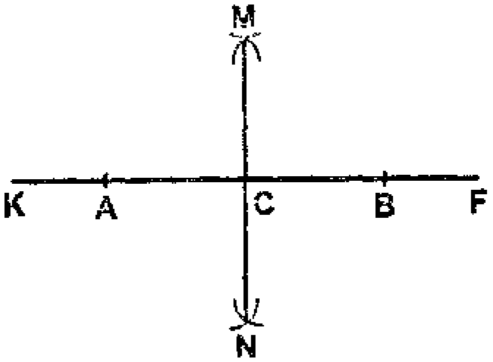
Разделив отрезок AB пополам, каждую половину делим пополам, каждую четверть опять пополам и т.д.

682. К прямой KF восставить перпендикуляр в данной его точке C.



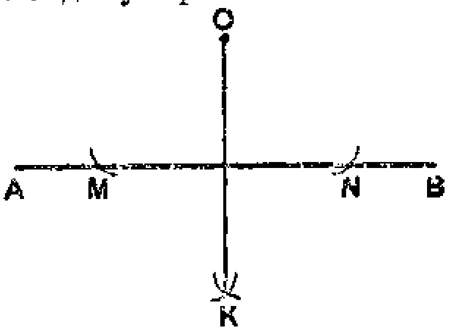
Решение.

Отложим от точки C на прямой KF отрезок $CA = CB$ так, чтобы точка C приходилась между точками A и B.



Из концов A и B, как из центров, радиусом, большим половины AB, опишем две окружности, которые пересекутся в точках M и N; соединим M и N. Фигура $AMBN$ есть ромб, и поэтому $CM \perp AB$.

683. Из данной точки O, лежащей вне прямой AB, опустить на эту прямую перпендикуляр.

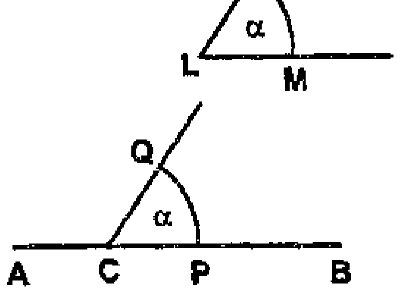


Решение.

Из центра O опишем произвольным радиусом дугу, пересекающую AB в точках M и N; из центров M и N описываем дуги тем же радиусом.

OK — искомый перпендикуляр, потому что фигура $OMKN$ есть ромб.

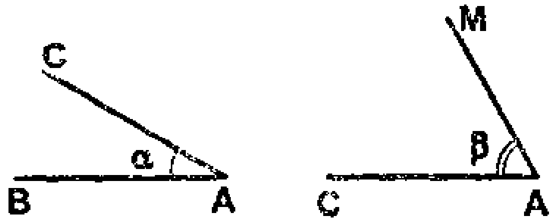
684. При точке C прямой AB построить угол, равный данному α.



Решение.

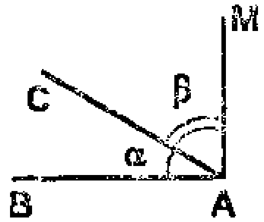
Произвольным радиусом из вершины угла α очертим дугу, пересекающую его стороны в точках M и N; тем же радиусом очертим из центра C дугу, пересекающую AB в точке P. Из центра P радиусом, равным MN, очертим дугу, пересекающую прежнюю дугу в точке Q. Соединим точки Q и C. Треугольники LNM и CQP имеют по три равные стороны и поэтому равны. Следовательно, $\angle QCP = \angle NLM = \alpha$.

685. Построить угол, равный сумме двух данных углов.

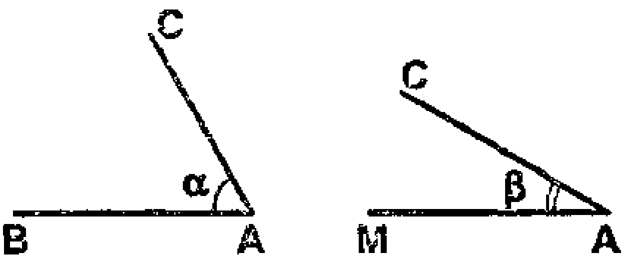


Решение.

Построим $\angle CAB = \alpha$. На стороне AC угла CAB построим $\angle MAC = \beta$ так, чтобы сторона MA лежала вне $\angle CAB$; тогда $\angle MAB = \angle\alpha + \angle\beta$.



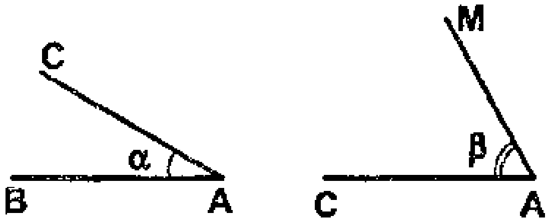
686. Построить угол, равный разности двух данных углов.



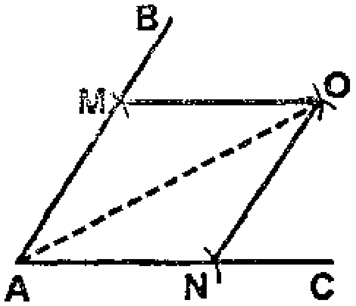
Решение.

Построим $\angle BAC = \alpha$ $(\alpha > \beta)$. На стороне AC угла CAB построим $\angle MAC = \beta$ так, чтобы сторона MA лежала внутри $\angle CAB$; тогда

$$\angle MAB = \angle\alpha - \angle\beta.$$



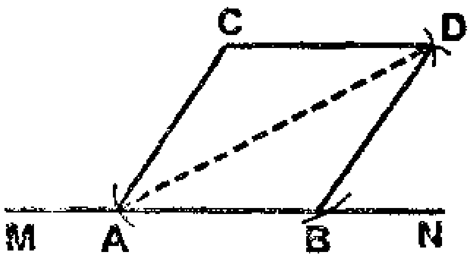
687. Разделить данный угол пополам.



Решение.

Произвольным радиусом из вершины A данного угла BAC опишем дугу, пересекающую его стороны в точках M и N; из центров M и N опишем дуги равными радиусами, большими половины MN; AO делит $\angle BAC$ пополам ($\Delta AOM = \Delta AON$).

688. Через данную точку C провести прямую, параллельную данной прямой MN.

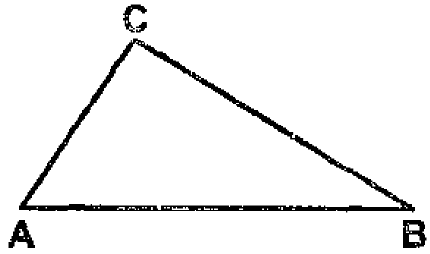


Решение.

Из данной точки C произвольным радиусом проводим дугу, пересекающую данную прямую. Пусть A и B — точки пересечения. Из точек C и B тем же радиусом проводим дуги до их пересечения в точке D.

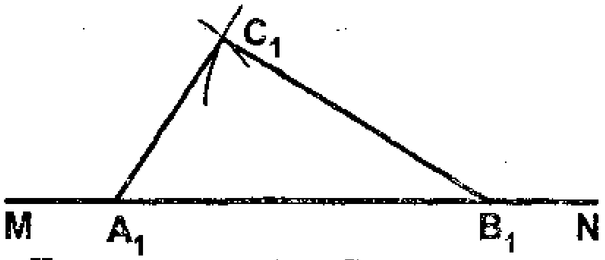
Соединяя точки C и D, получим искомую прямую, так как $CABD$ есть ромб.

689. Построить треугольник, равный данному треугольнику ABC.



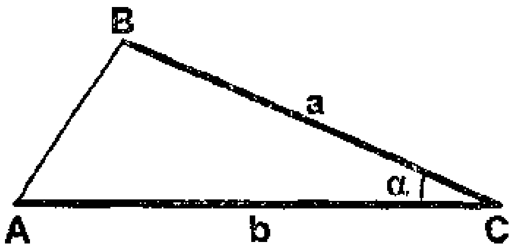
Решение.

На произвольной прямой MN от произвольной точки откладываем отрезок A_1B_1, равный AB. Из точки A_1 как из центра описываем дугу радиусом, равным AC, а из точки B_1 описываем дугу радиусом, равным BC. Точку их пересечения C_1 соединяем с концами отрезка A_1B_1.



Треугольник $A_1B_1C_1$ — искомый.

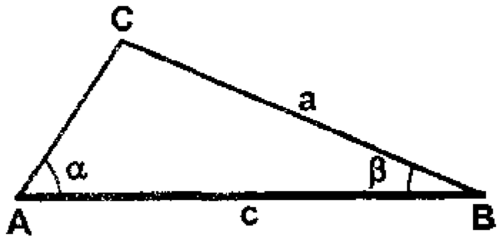
690. Построить треугольник по двум сторонам a и b и углу между ними C.



Решение.

Строим угол, равный данному, и откладываем на его сторонах от вершины отрезки, равные данным. Соединяя их концы, получаем искомый треугольник.

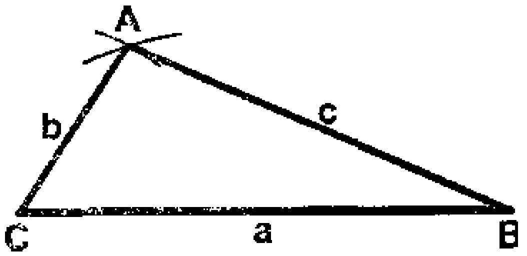
691. Построить треугольник по стороне c и двум прилежащим к ней углам A и B.



Решение.

Отложив на произвольной прямой отрезок $AB = c$, строим на его концах A и B данные углы и продолжаем их стороны (не совпадающие с AB) до их пересечения в точке C. Треугольник ABC — искомый.

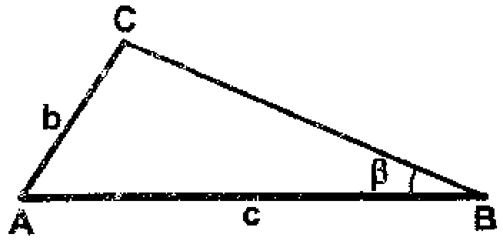
692. Построить треугольник по трем данным его сторонам: a, b, c.



Решение.

Отложив на произвольной прямой одну из заданных сторон, например, a, проводим из ее концов радиусами, равными отрезкам b и c, две дуги. Точку их пересечения соединяем с концами.

693. Построить треугольник по двум сторонам c и b и углу против одной из них B.



Решение.

Строим угол B, равный данному, и откладываем на его стороне от вершины B данный отрезок $AB = c$. Из точки A как из центра описываем дугу радиусом, равным b, до пересечения с продолжением второй стороны данного угла в точке C. Задача имеет одно решение, если дуга касается BC, два решения, если она пересекает BC в двух точках, или не имеет решения, если дуга не имеет с BC ни одной общей точки.

Общая схема решения задач на построение

Решение более сложных задач на построение состоит из этапов:

1. Анализ

Предположив, что задача решена, делают от руки чертеж искомой фигуры, стремясь свести задачу к простейшим, решение которых известно.

2. Построение

Используя составленный при анализе план решения, следует построение искомой фигуры.

3. Синтез

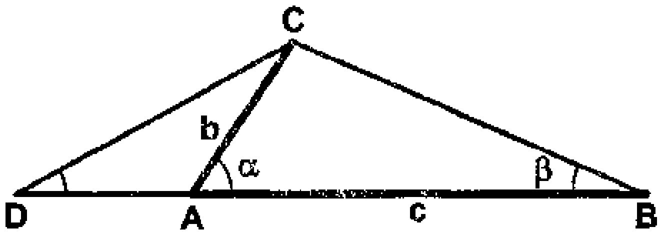
Доказательство, что полученная фигура удовлетворяет всем требованиям задачи на основании известных теорем.

4. Исследование

Определение числа решений и тех условий, при которых задача становится возможной и невозможной.

Рассмотрим пример более сложной задачи на построение.

694. Построить треугольник, если даны два угла A и B и сумма двух его сторон c и b.



Анализ.

Чтобы отыскать способ решения задачи или, как говорят, выполнить анализ задачи, предположим, что задача решена и что ΔABC — искомый. Найдем связь между искомыми элементами треугольника и данными задачи.

Отложим на продолжении стороны AB за точку A отрезок $AD = AC$ и соединим точки C и D; ΔACD — равнобедренный.

$$\angle CAB = \angle CDA + \angle DCA = 2\angle CDA.$$

Следовательно, $\angle CDA = \frac{1}{2}\angle CAB$.

Треугольник BCD можно построить по стороне $BD = b + c$ и двум прилежащим углам D и B. Таким образом, найдены две вершины B и C искомого треугольника. Третья A служит вершиной равнобедренного треугольника ACD, в котором известны основание CD и углы при основании.

Построение.

На произвольной прямой откладываем отрезок DB, равный данному отрезку $b + c$. На стороне BD при вершине D строим угол BDC, равный $\frac{a}{2}$. При вершине B строим угол DBC, равный β. Получили треугольник BCD. Перпендикуляр к середине отрезка DC пересекает BD в точке A.

Доказательство.

Угол B построенного треугольника равен данному $\angle B$ по построению. Угол CAB построенного треугольника как внешний угол треугольника ACD равен

$$\angle ACD + \angle ADC = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle A = \angle A.$$

Далее, треугольник ACD — равнобедренный, так как по построению

$$\angle DCA = \angle CDA = \frac{1}{2}\angle A,$$

и, следовательно, $AC = AD$. Поэтому

$$AC + AB = DA + AB = DB.$$

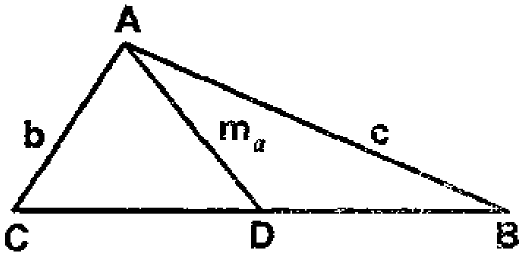
Треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование.

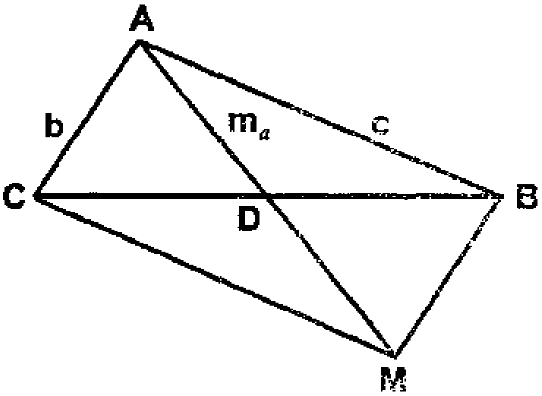
Задача имеет единственное решение при условии, что сумма двух данных углов меньше 180°.

Примечание. В дальнейшем при решении задач на построение мы будем ограничиваться анализом.

695. Построить треугольник, зная b, c, m_a.



Предположим, что задача решена, т.е. что найден такой ΔABC, у которого $AC = b$, $AB = c$ и $AD = m_a$. Рассмотрим рисунок и попробуем разбить задачу на несколько известных элементарных задач. Но ни один из треугольников ABD, ADC, ABC по предложенным данным строить нельзя.



Продолжим медиану AD на такой же отрезок и полученную точку M соединим с точками B и C.

$\Delta ABD = \Delta CDM$ по первому признаку равенства треугольников;

$BD = DC$ по условию;

$AD = DM$ по построению;

$\angle ADB = \angle CDM$ как вертикальные.

Треугольник AMC можно построить по трем сторонам: $AM = 2m_a$, $AC = b$, $CM = c$. D — середина отрезка AM.

На продолжении отрезка CD отложим $DB = CD$. ΔABC — искомый.

696. Построить равнобедренный треугольник по высоте и боковой стороне.

697. Построить равнобедренный треугольник по высоте и углу при основании.

698. Построить равнобедренный треугольник по основанию и перпендикуляру, опущенному из конца основания на боковую сторону.

699. Построить равнобедренный треугольник по основанию и высоте, проведенной на основание.

700. Построить прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной на другой катет.

701. Построить прямоугольный треугольник по острому углу и его биссектрисе.

702. Построить прямоугольный треугольник по катету и высоте, опущенной на гипотенузу.

703. Построить треугольник, зная b, c, h_b.

704. Построить треугольник, зная b, $\angle A$, h_b.

705. Построить треугольник, зная b, $\angle A$, l_a.

706. Построить треугольник, зная m_a, $\angle C$, h_b.

707. Построить треугольник, зная b, m_b, h_b.

708. Построить треугольник, зная b, $\angle A$, m_b.

709. Построить треугольник, зная $\angle C$, $\angle A$, l_b.

710. Построить треугольник, зная b, a, m_b.

711. Построить треугольник, зная $\angle C$, $\angle B$, h_b.

712. Построить треугольник, зная b, a, h_a.

713. Построить треугольник, зная a, l_c, h_b.

Метод спрямления

714. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме катетов.

715. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и разности катетов.

716. Построить прямоугольный треугольник по сумме катетов и острому углу.

717. Построить прямоугольный треугольник по разности катетов и острому углу.

718. Построить прямоугольный треугольник по катету и разности гипотенузы и другого катета.

719. Построить прямоугольный треугольник по сумме гипотенузы и катета $b + c$ и острому углу A.

720. Построить прямоугольный треугольник по периметру и острому углу.

721. Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

722. Построить треугольник по сумме сторон a и b, стороне c и углу A.

723. Построить треугольник по разности сторон a и b, стороне c и углу B.

724. Построить треугольник, если даны два его угла A и B и сумма двух его сторон a и b.

725. Построить треугольник, если даны два его угла A и B и разность двух его сторон a и b.

726. Построить треугольник, если даны его периметр и два угла A и B.

Алгебраический метод

727. Построить треугольник, зная a, $b+c$, $b-c$.

728. Построить треугольник, зная $a+b$, $a+c$, $a+b+c$.

729. Построить треугольник, зная $a+b$, $b+c$, $a+c$.

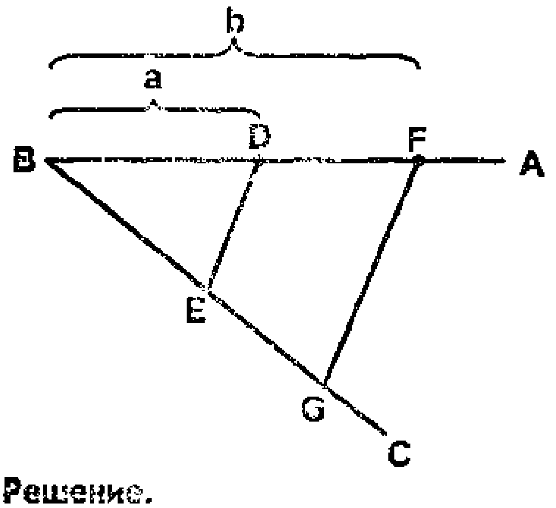
730. Построить треугольник, зная $a+b+c$, $a-b$, $a-c$.

731. Построить треугольник, зная c, b, $\angle A+\angle B$.

732. Построить треугольник, зная a, $\angle A+\angle B$, $\angle B-\angle C$.

733. Построить треугольник, зная a, $\angle A$, $\angle B-\angle C$.

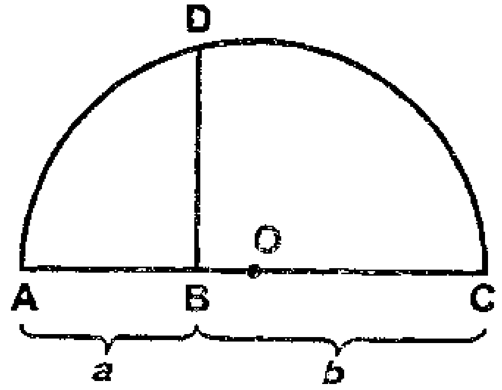
734. К трем данным отрезкам a, b, c найти четвертый пропорциональный, т.е. найти такой отрезок x, который удовлетворял бы пропорции $a:b=c:x$ (найти отрезок, выраженный формулой $x=\frac{bc}{a}$).



Решение.

$\frac{a}{c}=\frac{b}{x}$. На сторонах произвольного угла ABC откладываем отрезки $BD=a$, $BF=b$, $BE=c$. Точки D и E соединим. Построим $FG \parallel DE$. Отрезок BG будет искомым.

735. Построить отрезок, выраженный формулой $x=\sqrt{a\cdot b}$.



Решение.

Имеем $x^2=a\cdot b$. x находится способом построения средней пропорциональной.

На произвольной прямой откладываем отрезки $AB=a$ и $BC=b$; на отрезке AC как на диаметре описываем полуокружность. Из B восставляем до пересечения с окружностью перпендикуляр BD. Этот перпендикуляр и есть искомая средняя пропорциональная между a и b.

736. Построить отрезок, выраженный формулой $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

Решение.

Находим гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого a и b — катеты.

737. Построить отрезок, выраженный формулой $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

Решение.

Находим катет прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза a, а другой катет b.

Метод геометрических мест

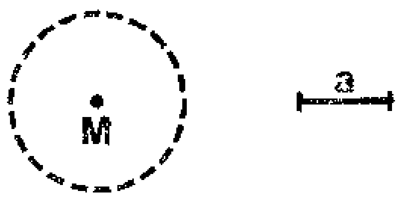
Геометрическое место точек (ГМТ) — это совокупность всех точек, каждая из которых удовлетворяет одному определенному заданному условию.

На понятии о геометрическом месте точек основан прием решения задач на построение. Он заключается в следующем.

Задача на построение обычно сводится к определению положения на плоскости одной или нескольких точек, которые должны удовлетворять двум условиям. Если мы отбросим одно из условий, то оставшемуся условию будут удовлетворять бесчисленное множество точек, образующих некоторое геометрическое место. Восстановим отброшенное условие и отбросим другое. Оставшемуся условию опять будет удовлетворять бесчисленное множество точек, образующих новое геометрическое место. Искомая точка должна удовлетворять обоим условиям задачи и, значит, должна принадлежать обоим геометрическим местам. Если построить каждое из найденных геометрических мест, то точка их пересечения и будет искомой. Задача будет иметь столько решений, сколько общих точек имеют найденные геометрические места.

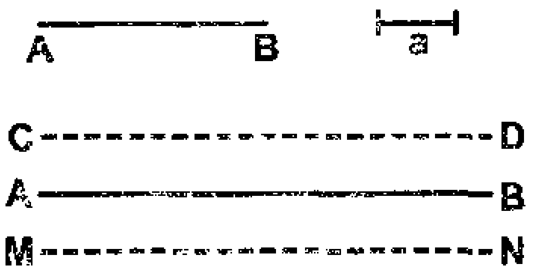
Основные задачи на метод геометрических мест

738. Найти точку, находящуюся от данной точки A на заданном расстоянии a.



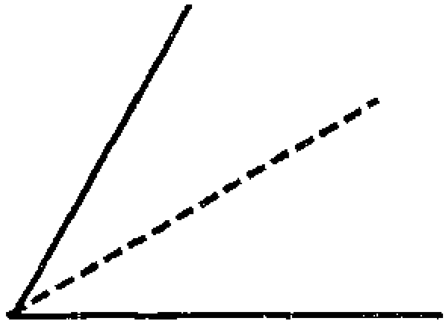
Геометрическое место точек, отстоящих на расстоянии, равном a, от данной точки M, есть окружность, описанная из центра M радиусом a.

739. Найти точку, находящуюся от данной прямой на заданном расстоянии.



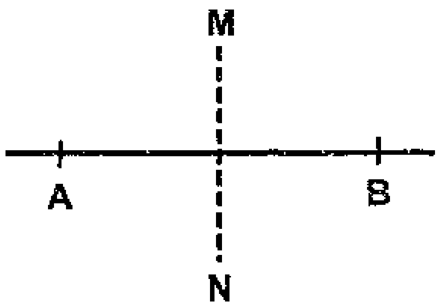
Геометрическое место точек, отстоящих на заданном расстоянии a от прямой AB, составляют две параллельные прямые CD и MN, отстоящие от AB на расстоянии a.

740. Найти точку, находящуюся на одинаковом расстоянии от сторон угла.



Геометрическое место точек, находящихся на равном расстоянии от сторон угла, есть биссектриса этого угла.

741. Найти точку, находящуюся на одинаковом расстоянии от концов отрезка.



Геометрическое место точек, находящихся на одинаковом расстоянии от концов отрезка, есть перпендикуляр к отрезку, восстановленный из его середины.

Задачи

742. Найти точку, находящуюся на расстоянии a от прямой AB и на расстоянии b от прямой CD.

743. Найти точку, отстоящую от данной точки A на расстоянии, равном a, и от данной точки B на расстоянии, равном b.

744. Найти точку, находящуюся на равных расстояних от двух данных точек M и N, и на равном расстоянии от сторон данного угла BAC.

745. Найти точку, находящуюся на данном расстоянии a от точки C и на равном расстоянии от точек A и B.

746. На данной прямой AB найти точку, равноотстоящую от двух пересекающихся прямых MN и PQ.

747. На стороне треугольника найти точку, равноотстоящую от двух других сторон треугольника.

748. Найти точку, равноотстоящую от трех вершин данного треугольника.

749. Найти точку, равноотстоящую от трех сторон данного треугольника.

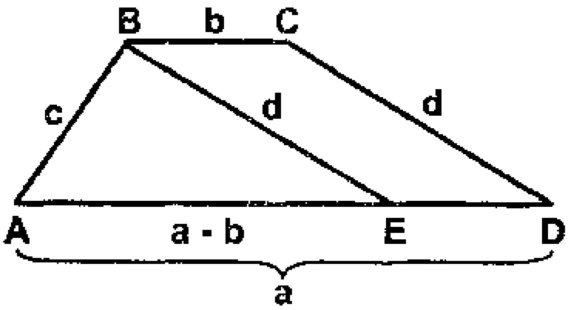
750. Построить окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

751. Разделить пополам угол между двумя прямыми, не пересекающимися в пределах чертежа.

Метод параллельного перемещения

Сущность параллельного перемещения заключается в следующем: после перемещения какого-либо отрезка параллельно своему первоначальному положению, его новое положение вместе с первоначальным будет составлять пару противоположных сторон параллелограмма, чем удобно пользоваться при решении некоторых задач.

752. Построить трапецию по четырем сторонам a, b, c, d.



Анализ.

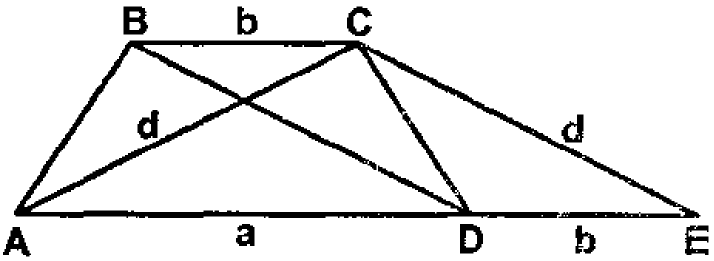
Пусть $ABCD$ — искомая трапеция. Перенесем CD параллельно самой себе в BE.

В полученном после перемещения треугольнике ABE

$$AE = a - b,\ BE = d,\ AB = c.$$

Следовательно, этот треугольник может быть построен по трем сторонам. Построив его, легко найти оставшиеся точки C и D.

753. Построить равнобедренную трапецию по двум основаниям и диагонали.



Анализ.

Пусть $ABCD$ — искомая трапеция. Перенесем BD параллельно самой себе в CE.

В полученном после перемещения треугольнике ACE

$$AE = a + b,\ CE = BD = d,\ AC = d.$$

Следовательно, этот треугольник может быть построен по трем сторонам. Построив его, легко найти оставшиеся точки D и B.

Задачи

754. Построить треугольник по основанию c и медианам p и q его боковых сторон.

755. Построить параллелограмм по двум смежным сторонам и одной диагонали.

756. Построить параллелограмм по двум диагоналям и стороне.

757. Построить параллелограмм по двум смежным сторонам и одному из углов.

758. Построить параллелограмм по двум диагоналям и высоте.

759. Построить параллелограмм по диагонали, стороне и высоте, опущенной на эту сторону.

760. Построить параллелограмм по диагонали, стороне и высоте, опущенной на другую сторону.

761. Построить прямоугольник по смежным сторонам.

762. Построить прямоугольник по стороне и диагонали.

763. Построить прямоугольник по диагонали и углу между диагоналями.

764. Построить ромб по стороне и одному из углов.

765. Построить ромб по диагонали и одному из углов.

766. Построить ромб по двум диагоналям.

767. Построить ромб по диагонали и высоте.

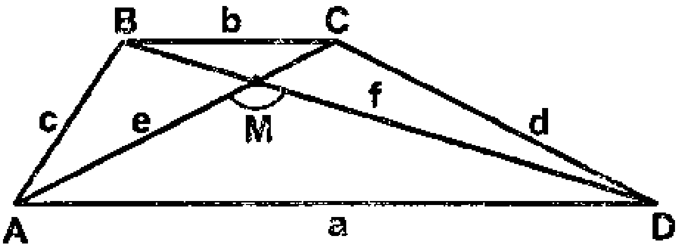
768. Построить ромб по высоте и одному из углов.

769. Построить квадрат по его диагонали.

770. Построить трапецию, если даны ее диагонали, угол между ними и боковая сторона.

771. Построить трапецию по двум параллельным сторонам и двум диагоналям.

772. Построить трапецию по одному ее углу, двум диагоналям и средней линии.



Принятые обозначения в трапеции $ABCD$:

основания — $AD = a$, $BC = b$

боковые стороны — $AB = c$, $CD = d$

диагонали — $AC = e$, $BD = f$

углы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$

угол между диагоналями — $\angle M$

высота трапеции — h,

средняя линия — m.

Построить трапецию, если даны:

773. a, b, c, e.

774. a, c, d, e.

775. a, c, d, h.

776. a, e, f, h.

777. a, b, c, h.

778. a, b, e, h.

779. a, c, d, $\angle A$.

780. a, b, c, $\angle B$.

781. a, c, e, $\angle M$.

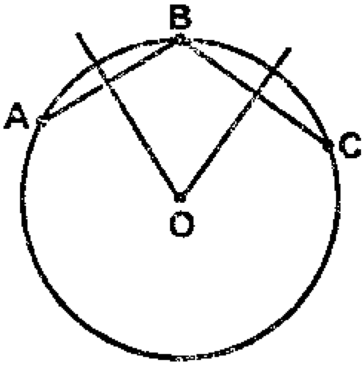
782. a, h, $\angle A$, $\angle D$.

783. a, b, $\angle A$, $\angle D$.

784. a, c, m, $\angle A$.

Задачи на окружность

785. Определить центр данной окружности.



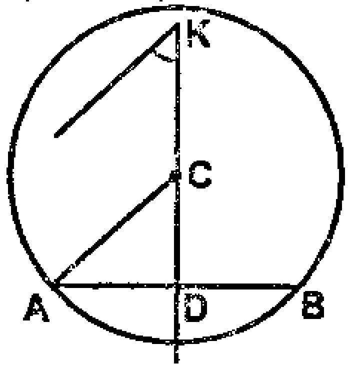
Анализ.

Возьмем на окружности три произвольные точки A, B и C. Будем искать центр окружности, проходящий через эти точки. Геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек A и B, есть перпендикуляр, проходящий через середину отрезка AB.

Аналогично, центр окружности лежит на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка BC.

Итак, искомый центр лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к серединам хорд AB и BC.

786. На отрезке AB как на хорде построить дугу окружности так, чтобы вписанный угол, опирающийся на эту дугу, был равен данному.



Анализ.

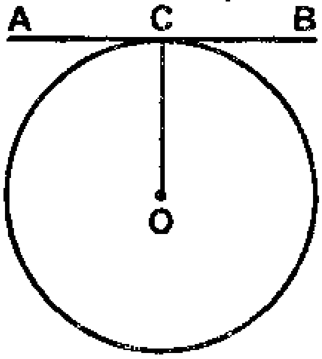
Предположим, что задача решена и C есть центр искомой дуги. Так как отрезок AB служит хордой искомой дуги, то точка C лежит на перпендикуляре CD к прямой AB, восставленном из середины отрезка AB. $\angle ACB$, как центральный, должен быть в два раза больше данного вписанного угла, а $\angle ACD$ должен быть равен данному. Отсюда следует построение.

Построение.

Из середины D отрезка AB восставляем к нему перпендикуляр и при какой-нибудь его точке K строим угол, равный данному, одной стороной которого служит KD. Из точки A проводим прямую, параллельную второй стороне построенного угла. Она пересечет прямую KD в точке C.

Из точки C как из центра радиусом CA описываем дугу.

787. Через данную точку, лежащую на окружности, провести к данной окружности касательную.



Анализ.

Предположим, C — точка касания прямой AB с окружностью. Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Откуда следует построение.

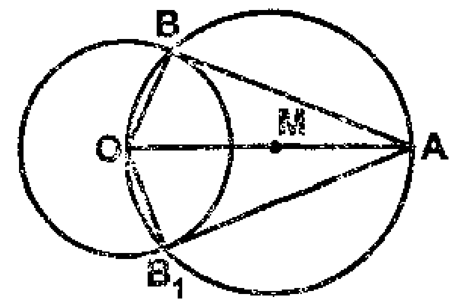
Построение.

Проведем радиус окружности OC и через конец его C строим перпендикуляр AB к этому радиусу.

788. Через данную точку A, лежащую вне окружности центра O, провести к окружности касательную.

Анализ.

Допустим, задача решена. B — точка касания искомой касательной AB. ΔABO — прямоугольный.



Построение.

Соединим точки O и A. Разделим AO пополам. Из полученной точки M радиусом MO описываем окружность. Через точки B и B_1, в которых эта окружность пересекается с данной, проводим прямые AB и AB_1. Эти прямые и будут касательными, так как углы ABO и AB_1O, как опирающиеся на диаметр, — прямые.

Следствие. Две касательные, проведенные к окружности из точки вне ее, равны и образуют равные углы с прямой, соединяющей эту точку с центром.

789. К двум окружностям O и O_1 провести общую внешнюю касательную.

Анализ.

Предположим, задача решена. Пусть AB будет общая касательная, A и B — точки касания. Проведем радиусы OA

и O_1B. Эти радиусы, будучи перпендикулярными к общей касательной, параллельны между собой; поэтому, если из O_1 проведем $O_1C \parallel BA$, то треугольник OCO_1 будет прямоугольный с прямым углом при вершине C. Значит, если опишем с центром в точке O радиусом OC окружность, то она будет касаться прямой O_1C в точке C.

Радиус этой вспомогательной окружности равен разности радиусов данных окружностей.

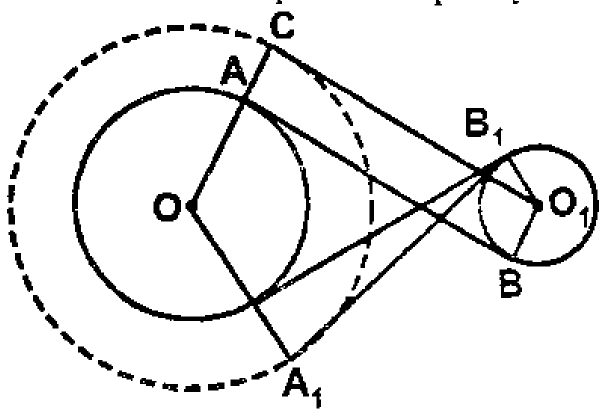
Построение.

Описываем окружность с центром в точке O и радиусом, равным разности данных радиусов. Из O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C; через точку касания C проводим радиус OC и продолжаем его до встречи с данной окружностью в точке A. Затем из точки A проводим AB параллельно CO_1.

790. К двум окружностям O и O_1 провести общую внутреннюю касательную.

Анализ.

Предположим, задача решена. Пусть AB будет общая касательная, A и B — точки касания. Проведем радиусы OA



и O_1B. Эти радиусы, будучи перпендикулярными к общей касательной, параллельны между собой. Поэтому, если из O_1 проведем $O_1C \parallel BA$ и продолжим OA до пересечения с O_1C в точке C, то $OC \perp O_1C$; вследствие этого окружность, описанная радиусом OC с центром в точке O, будет касаться прямой O_1C в точке C. Радиус этой вспомогательной окружности известен: он равен $OA + AC = OA + O_1B$, т.е. равен сумме радиусов данных окружностей.

Построение.

Описываем окружность с центром в точке O и радиусом, равным сумме данных радиусов. Из O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C. Точку касания C соединяем с O. Наконец, через точку A, в которой OC пересекается с данной окружностью, проводим AB параллельно CO_1.

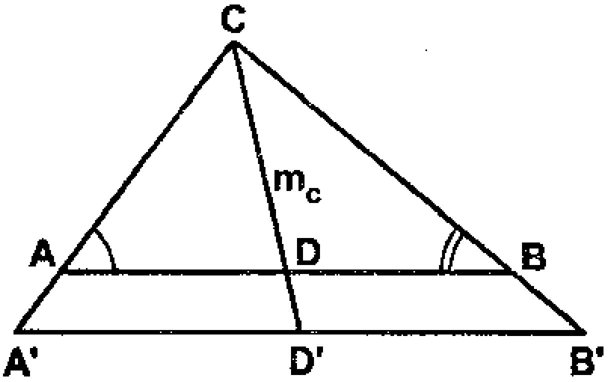
Подобным образом можно построить и другую общую внутреннюю касательную.

Метод подобия

Во многих задачах на построение условие задачи удается разделить на две такие части, что одна часть условий вполне определяет форму искомой фигуры, а другая определяет ее размер.

Применение метода подобия состоит в том, что сначала по тем элементам, которые определяют форму фигуры, строят фигуру, подобную искомой, а затем при помощи подобного преобразования придают ей тот размер, который соответствует второй части задачи.

791. Построить треугольник по двум углам A и B и медиане m_c.



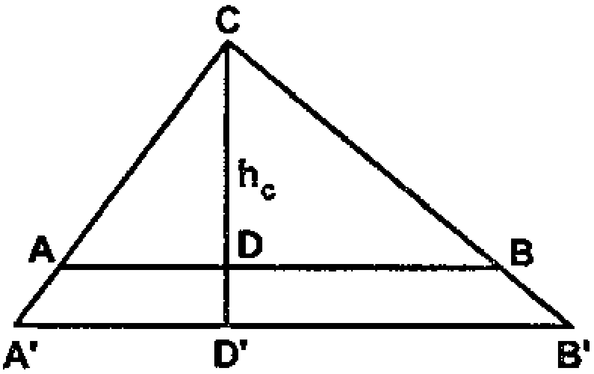
Решение.

По двум углам A и B можно построить треугольник A_1B_1C подобный данному. Если за центр подобия взять вершину C, то подобное преобразование можно выполнить так: на медиане CD_1 построенного треугольника откладываем отрезок CD, равный заданной длине m_c, и через точку D проведем прямую, параллельную A_1B_1, пересекающую прямые CA_1 и CB_1 в точках A и B. Треугольник ACB — искомый.

792. Построить треугольник, если даны $a:b$, $\angle C$ и h_c.

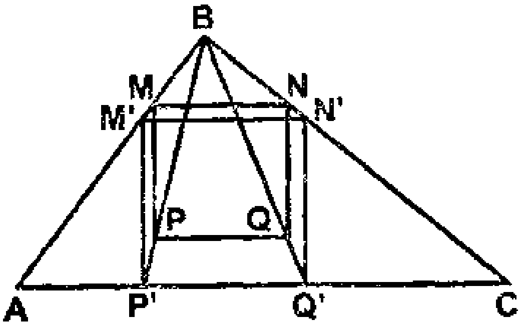
Решение.

Первые два данных условия $a:b$ и $\angle C$ вполне определяют форму искомого треугольника. Возьмем какие-либо два отрезка a_1 и b_1, отношение которых равно $a:b$, и построим треугольник $A'B'C$ по двум сторонам a_1 и b_1 и углу между ними C. Этот треугольник будет подобен искомому.



За центр подобия удобно взять вершину C. На высоте CD' треугольника $A'B'C$ или на ее продолжении откладываем отрезок $CD = h$ и через точку D проводим прямую, параллельную $A'B'$ до пересечения со сторонами CA' и CB' (или их продолжениями) в некоторых точках A и B. Треугольник ABC — искомый.

793. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы две его вершины лежали на основании треугольника, а две другие — на его боковых сторонах.



Решение.

В данном треугольнике ABC проводим отрезок $MN \parallel AC$ и на отрезке MN строим квадрат $MNPQ$. Приняв за центр подобия вершину B, проводим прямые BP и BQ и продолжаем их до пересечения в точках P' и Q' со стороной AC. Квадрат $M'N'Q'P'$ — искомый.

Задачи

794. Построить треугольник, если даны $\angle A$, $\angle B$, l_a.

795. Построить треугольник, если даны $\angle A$, $\angle B$, h_c.

796. Построить треугольник, если даны $\angle A$, $\angle B$, r.

797. Построить треугольник, если даны $a : b$, $\angle C$, m_a.

798. Построить треугольник, если даны $a : b$, $\angle C$, l_a.

799. Построить треугольник, если даны $h_c : l_c$, $\angle A$, m_c.

800. Построить параллелограмм, если даны: отношение двух его сторон, угол и одна из диагоналей.

801. Построить параллелограмм, если даны: высота, отношение диагоналей и угол между ними.

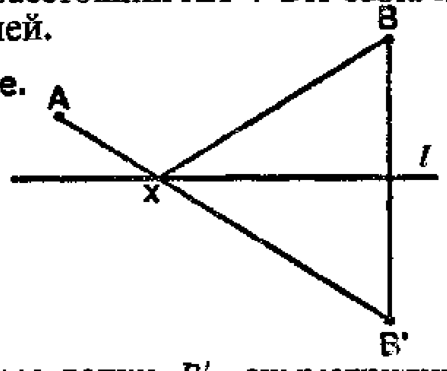
802. В данный ромб вписать квадрат, вершины которого лежат на сторонах ромба.

Метод симметрии

Иногда, производя анализ задачи, бывает удобно для всей фигуры или ее части построить фигуру, ей симметричную относительно какой-либо оси. После такого построения иногда обнаруживается такая зависимость между элементами фигур, которую раньше трудно было заметить.

804. Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на прямой такую точку X, чтобы сумма расстояний $AX + BX$ была наименьшей.

Решение.



Построим точку B', симметричную точке B относительно прямой l.

Пусть X — искомая точка, тогда $BX = B'X$ и $AX + XB = AX + XB'$; следовательно, задача сводится к нахождению точки X такой, что сумма $AX + XB'$ имеет наименьшую величину. Этому условию, очевидно, удовлетворяет X — точка пересечения данной прямой l и прямой AB'.

805. На бесконечной прямой AB найти такую точку C, чтобы прямые CM и CN, проведенные из точки C к данным точкам M и N, расположенным по одну сторону от AB, составляли с прямыми CA и CB равные углы.

806. Даны две окружности с центрами в точках O и O_1 и не пересекающая их прямая AB. Найти на прямой AB точку X такую, чтобы касательные из нее к данным окружностям были наклонены к AB под равными углами.

807. Дан угол ABC и точка M внутри него. Найти на одной стороне угла точку X и на другой — точку Y так, чтобы периметр треугольника MXY был наименьшим.

Задачи на построение

917. Построить треугольник, если даны середины его сторон.
918. Построить треугольник по двум медианам и углу между ними.
919. Построить треугольник по высоте, опущенной на основание, и медианам боковых сторон.
920. Построить треугольник по основанию и медианам боковых сторон.
921. Построить параллелограмм, если даны периметр, одна диагональ и угол между диагональю и стороной.
922. Построить параллелограмм, если даны две высоты, проведенные из одной вершины, и угол.
923. Построить прямоугольник по стороне и сумме диагоналей.
924. Построить прямоугольник по диагонали и сумме двух неравных сторон.
925. Построить прямоугольник по диагонали и разности двух неравных сторон.
926. Построить прямоугольник по стороне и сумме диагонали с другой стороной.
927. Построить прямоугольник по стороне и разности диагонали с другой стороной.
928. Построить ромб по стороне и диагонали.
929. Построить ромб по углу и диагонали, проходящей через вершину этого угла.
930. Построить ромб по сумме диагоналей и углу, образованному диагональю со стороной.
931. Построить ромб, если даны сумма стороны и диагонали и один из углов.
932. Построить ромб, если даны разность стороны и диагонали и один из углов.
933. Построить ромб, если даны сторона и сумма диагоналей.
934. Построить ромб, если даны сторона и разность диагоналей.
935. Построить ромб, если даны сумма диагоналей и угол между стороной и диагональю.
936. Построить равносторонний треугольник по радиусу описанной окружности.

937. Построить равносторонний треугольник по радиусу вписанной окружности.

938. Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и радиусу описанной окружности.

939. Построить равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.

940. Построить равнобедренный треугольник по высоте, проведенной на основание, и радиусу описанной окружности.

941. Построить равнобедренный треугольник по высоте, проведенной на основание, и радиусу вписанной окружности.

942. Построить равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанной окружности.

943. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и радиусу вписанной окружности.

944. Построить прямоугольный треугольник по катету и радиусу вписанной окружности.

945. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и радиусу вписанной окружности.

946. Построить прямоугольный треугольник, если даны радиусы вписанной и описанной окружностей.

947. Построить прямоугольный треугольник по острому углу и радиусу описанной окружности.

948. Построить треугольник по основанию, высоте, проведенной к основанию, и радиусу описанной окружности.

949. Построить треугольник по стороне, углу, прилежащему к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

950. Построить треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

951. Построить треугольник, если даны высота, проведенная к основанию, угол при основании и радиус описанной окружности.

952. Построить треугольник, если даны боковая сторона, высота, проведенная к основанию, и радиус описанной окружности.

953. Построить треугольник по высоте и биссектрисе, проведенных из вершины одного из углов, и радиусу описанной окружности.

954. Построить треугольник по стороне, углу, прилежащему к этой стороне, и радиусу вписанной окружности.

955. Построить треугольник по боковой стороне, высоте, проведенной к основанию, и радиусу вписанной окружности.