МАТЕМАТИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

В ПОМОЩЬ ПОВТОРЯЮЩИМ МАТЕМАТИКУ ПО СПРАВОЧНИКАМ

Тема 8. Искусственные приёмы решения уравнений

Содержание

.

Биквадратные уравнения.

Решить уравнения:

628. 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $x^4-13x^2+36=0$;
3) $x^4-29x^2+100=0$; 4) $x^4-5x^2+4=0$.

629. 1) $x^4-17x^2+16=0$; 2) $x^4-37x^2+36=0$;
3) $x^4-50x^2+49=0$; 4) $x^4-25x^2+144=0$.

630. 1) $4x^4-5x^2+1=0$; 2) $3x^4-28x^2+9=0$;
3) $2x^4-19x^2+9=0$; 4) $3x^4-7x^2+2=0$.

632. Решить уравнения способом введения вспомогательного неизвестного:

1) $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$;

2) $(6x^2-7x)^2-2(6x^2-7x)-3=0$;

3) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\frac{x-1}{x}\right)-4=0$;

4) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4{,}5\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$.

634. Разложить на множители:

1) x^4-5x^2+4; 2) x^4-13x^2+36;
3) x^4-125x^2+484; 4) $4x^4-5x^2+1$.

635. Сократить дроби:

1) $\frac{x^4-10x^2+9}{x^4-13x^2+36}$; 2) $\frac{x^4-9x^2+20}{x^4-10x^2+24}$;

3) $\frac{x^4-17x^2+16}{x^4-50x^2+49}$; 4) $\frac{a^4-4a^2+3}{a^4-12a^2+27}$.

636. Составить биквадратное уравнение по данным его корням:

1) ± 2; ± 3; 2) ± 1; ± 6;
3) $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{2}$; 4) $\pm\frac{2}{3}$; ± 4.

637. Один из корней биквадратного уравнения равняется 3, а другой корень 4. Составить уравнение.

Иррациональные уравнения.

Решить уравнения:

639. 1) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[3]{x+2}=3\sqrt[3]{x-1}$;

3) $\sqrt[3]{2x+7}=\sqrt[3]{3x-3}$; 4) $\sqrt[5]{25+\sqrt{x-4}}=2$.

640. 1) $\sqrt{x}-\dfrac{4}{\sqrt{2+x}}+\sqrt{2+x}=0$;

2) $\sqrt{x-9}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}-\sqrt{x}$;

3) $3\sqrt{2x-1}-\sqrt{8x+17}=\dfrac{2(x-3)}{\sqrt{2x-1}}$;

4) $5\sqrt{2x+3}-\sqrt{18x-5}=\dfrac{4(x+3)}{\sqrt{2x+3}}$.

641. 1) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-7}$; 2) $\dfrac{2\sqrt{x}-1}{3(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{2\sqrt{x}-3}{3\sqrt{x}-2}$;

16 3) $\dfrac{3\sqrt{x}-4}{4(\sqrt{x}-2)}=\dfrac{3\sqrt{x}-5}{4\sqrt{x}-9}$; 4) $\dfrac{9\sqrt{x}+1}{6(6\sqrt{x}-1)}=\dfrac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}-1}$.

643. 1) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+6}=x+3$;

2) $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x+2}=x+1$;

3) $\sqrt{4x-3}=\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x-5}}$; 4) $\dfrac{7x-2}{\sqrt{3x-8}}=3\sqrt{2x+3}$.

644. 1) $\dfrac{15}{\sqrt{10-x}}-\sqrt{3x+5}=\sqrt{10-x}$;

2) $\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}$;

3) $\sqrt{3x-1}+\dfrac{2}{\sqrt{3x-1}}=\sqrt{5x+3}$;

4) $\sqrt{2x+15}-\dfrac{10}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2x-1}$.

645. 1) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$;

2) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$;

3) $\sqrt{x+7}+\sqrt{3x-2}-9=0$;

4) $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0$.

646. 1) $\sqrt{x+7}=\sqrt{3x+19}-\sqrt{x+2}$;

2) $\sqrt{5x+4}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}$;

3) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{5x+4}$;

648. 1) $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}=-2$;

2) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x^2}$;

3) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}=\dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$;

3.

4) $\dfrac{x}{\sqrt{1+\frac{x}{3}}+\sqrt{\frac{x}{3}}}-\dfrac{x}{\sqrt{1+\frac{x}{3}}-\sqrt{\frac{x}{3}}}+6=0.$

При решении следующих уравнений использовать формулы:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b);$$
$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab\,(a-b).$$

650. 1) $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$;

2) $\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{5-x}=\sqrt[3]{5}$;

3) $\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{76-\sqrt{x}}=8$;

4) $\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{5-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{5}.$

При решении следующих уравнений использовать введение вспомогательного неизвестного:

651. 1) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$;

2) $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$;

3) $x^2+\sqrt{x^2-9}=21.$

Указание. $(x^2-9)+\sqrt{x^2-9}-12=0.$

4) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2.$

Указание. $3x^2+15x+3+2\sqrt{x^2+5x+1}-5=0.$

652. 1) $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+5}=7$;

2) $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24$;

3) $x^2+3x+4\sqrt{x^2+3x-6}=18$;

4) $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$.

653. Не решая следующих уравнений, объяснить, почему каждое из них не может иметь корней:

1) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}=0$; 2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=0$;

3) $\sqrt{x-7}-\sqrt{5-x}=3$; 4) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{6x+7}=-4$

Искусственные приемы решения уравнений

Рассмотрим некоторые методы решения уравнений третьей и выше степеней. Применение этих методов поможет при решении нестандартных и сложных задач.

Введение вспомогательной неизвестной (общий случай)

Пример 1.358. Решить уравнение

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1.$$

Решение. Понизим степень уравнения подстановкой $x^2 - x + 1 = y$. Уравнение примет вид

$$\frac{y - 1}{y} - \frac{y + 1}{y - 3} = 1,$$

или после преобразований получим: $y^2 + 2y - 3 = 0$, откуда $y_1 = -3$, $y_2 = 1$. Возвращаясь к подстановке, решаем уравнения: $x^2 - x + 1 = 1$ и $x^2 - x + 1 = -3$, откуда $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

Ответ: 0; 1.

Пример 1.359. Решить уравнение

$$\frac{2x^2 - x + 3}{3} - \frac{2x^2}{2x^2 - 4x + 3} = \frac{x}{6}.$$

Решение. Проверкой убеждаемся, что $x = 0$ не является корнем уравнения. Разделив обе части уравнения на x, получим

$$\frac{2x^2 - x + 3}{3x} - \frac{2x}{2x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{6}.$$

Числители и знаменатели левой части уравнения разделим на x почленно:

$$\frac{2x - 1 + \frac{3}{x}}{3} - \frac{2}{2x - 4 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{6}.$$

Теперь подставим $2x - 4 + \frac{3}{x} = y$.

При разложении многочлена на множители следует указать то числовое множество, на котором задача должна быть решена. При этом необходимо заметить, что многочлен можно разложить на множители на данном числовом множестве, если все коэффициенты, входящие в сомножитель, а также допустимые значения переменных принадлежат этому числовому множеству.

Пример 1.349. Разложить многочлен $a^4 + 4b^4$ на множители на множестве рациональных чисел.

Решение. $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2 b^2 + 4b^4 - 4a^2 b^2 =$

$$= (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2 b^2 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab).$$

Пример 1.350. Разложить многочлен $x^5 + x + 1$ на множители на множестве рациональных чисел.

Решение. $x^5 + x + 1 = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1) =$

$$= x^2 (x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) = x^2 (x - 1)(x^2 + x + 1) +$$

$$+ (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).$$

Пример 1.351. Разложить многочлен $x^8 + x^4 + 1$ на множители на множестве действительных чисел.

Решение. Выделим сначала полный квадрат, а затем разложим на множители, используя формулу разности квадратов: $x^8 + x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 =$

$$= (x^4 + 1)^2 - x^4 = (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2) =$$

$$= ((x^4 + 2x^2 + 1) - 3x^2)((x^4 + 2x^2 + 1) - x^2) =$$

$$= ((x^2 + 1)^2 - 3x^2)((x^2 + 1)^2 - x^2) =$$

$$= (x^2 + 1 + x\sqrt{3})(x^2 + 1 - x\sqrt{3})(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x).$$

Упражнения

Разложить многочлены на множители на множестве действительных чисел:

11.352. $x^4 - x^2 + 1$. **1.353.** $x^{10} + x^5 + 1$.

Разложить многочлены на множители на множестве рациональных чисел:

1.354. $a^2b + ab^2 + a^2c + b^2c + bc^2 + 2abc + ac^2$.

1.355. $a^2 + 2ac + 2bc - b^2$.

1.356. $(ab + ac + bc)(a + b + c) - abc$.

1.357. $a^2 (b - c) + b^2 (c - a) + c^2 (a - b)$.

Искусственные приемы решения уравнений

Рассмотрим некоторые методы решения уравнений третьей и выше степеней. Применение этих методов поможет при решении нестандартных и сложных задач.

Введение вспомогательной неизвестной (общий случай)

Пример 1.358. Решить уравнение

$$\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1.$$

Решение. Понизим степень уравнения подстановкой $x^2-x+1=y$. Уравнение примет вид

$$\frac{y-1}{y}-\frac{y+1}{y-3}=1,$$

или после преобразований получим: $y^2+2y-3=0$, откуда $y_1=-3$, $y_2=1$. Возвращаясь к подстановке, решаем уравнения: $x^2-x+1=1$ и $x^2-x+1=-3$, откуда $x_1=0$; $x_2=1$.

Ответ: 0; 1.

Пример 1.359. Решить уравнение

$$\frac{2x^2-x+3}{3}-\frac{2x^2}{2x^2-4x+3}=\frac{x}{6}.$$

Решение. Проверкой убеждаемся, что $x=0$ не является корнем уравнения. Разделив обе части уравнения на x, получим

$$\frac{2x^2-x+3}{3x}-\frac{2x}{2x^2-4x+3}=\frac{1}{6}.$$

Числители и знаменатели левой части уравнения разделим на x почленно:

$$\frac{2x-1+\frac{3}{x}}{3}-\frac{2}{2x-4+\frac{3}{x}}=\frac{1}{6}.$$

Теперь подставим $2x-4+\dfrac{3}{x}=y$.

Уравнение примет вид $\frac{y+3}{3} - \frac{2}{y} = \frac{1}{6}$, или, после преобразований, $2y^2 + 5y - 12 = 0$.

Имеем: $y_1 = -4$, $y_2 = \frac{3}{2}$ и, возвращаясь к подстановке, решаем совокупность уравнений

$$2x - 4 + \frac{3}{x} = -4 \text{ и } 2x - 4 + \frac{3}{x} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $2; \frac{3}{4}$.

Пример 1.360. Решить уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат и сгруппируем квадрат первого и квадрат второго выражений: $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2-x^2}\right) + \frac{2}{x\sqrt{2-x^2}} = 4$;

$$\frac{2}{x^2(2-x^2)} + \frac{2}{x\sqrt{2-x^2}} = 4; \quad \frac{1}{x^2(2-x^2)} + \frac{1}{x\sqrt{2-x^2}} = 2.$$

Произведем подстановку $\frac{1}{x\sqrt{2-x^2}} = y$, тогда уравнение примет вид $y^2 + y - 2 = 0$, корни которого $y_1 = -2$, $y_2 = 1$. Возвращаясь к подстановке, решаем совокупность уравнений: $\frac{1}{x\sqrt{2-x^2}} = -2$ и $\frac{1}{x\sqrt{2-x^2}} = 1$.

Ответ: $1; -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$.

Упражнения

Решить уравнения:

1.361. $\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-3x+3} = \frac{6}{x^2-3x+4}$.

1.362. $\frac{9x^2-3x+2}{9x^2-3x-1} + 2 + 3x - 9x^2 = 0$.

1.363. $(x^2-5x+7)^2 - (x-2)(x-3) = 1$.

1.364. $\left(x+\frac{8}{x}\right)^2+x=42-\frac{8}{x}.$

1.365. $x(x-2)(x^2-1)=24.$

1.366. $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x}+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}=2.$

1.367. $\frac{x}{x^2+3x+2}-\frac{x}{x^2+5x+2}=\frac{1}{24}.$

1.368. $(2x^2+3x-1)^2-5(2x^2+3x+3)+24=0.$

1.369. $\frac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3}=4+2x+x^2.$

1.370. $(x^2+3x+5)^2-x^2-3x-11=0.$

1.371. $\left(x-\frac{6}{x}\right)^2+x=2+\frac{6}{x}.$

1.372. $\frac{3}{1+x+x^2}=3-x-x^2.$

1.373. $(2x-3)(2x-1)(x+1)(x+2)=36.$

1.374. $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}=-\frac{1}{5}.$

1.375. $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}.$

1.376. $\frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+7}=\frac{7}{\sqrt{x+1}}.$

1.377. $5x^2+35x-\sqrt{x^2+7x-2}=86.$

1.378. $2\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}=3.$

1.379. $x\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x^2}=4.$

1.380. $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}.$

1.381. $(x-3)^2=3\sqrt{x^2-5x+7}-x.$

1.382. $x^2+5x+4=5\sqrt{x^2+5x+28}.$

1.383. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

1.384. $6x^2-9x-20=8\sqrt{2x^2-3x+5}.$

1.385. $x+\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^2-2}}=4.$

1.386. $\frac{1}{2x} + \frac{1}{\sqrt{5 - 4x^2}} = \frac{3}{2}$.

1.387. $\frac{x}{x^2 - x + 2} + \frac{x}{x^2 + x + 2} = \frac{3}{4}$.

1.388. $\frac{x^2 - 3x + 1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{7}{2}$.

Уравнения однородные и сводящиеся к однородным

Пример 1.389. Решить уравнение

$$(2x^2 - x + 1)^2 + x^2 (2x^2 - x + 1) - 6x^4 = 0.$$

Справочный отдел

Уравнение вида

$$A_0 f^n (x) + A_1 f^{n-1} (x) g (x) + \ldots + A_{n-1} f (x) g^{n-1} (x) + + A_n g^n (x) = 0, \qquad (*)$$

где $n > 1$ *— натуральное число,* $A_0 \neq 0$, $A_n \neq 0$, $f (x)$ *и* $g (x)$ *— некоторые функции, называется* ***однородным*** *относительно функций* $f (x)$ *и* $g (x)$.

Уравнение (*) равносильно уравнению

$$A_0 \left(\frac{f (x)}{g (x)}\right)^n + A_1 \left(\frac{f (x)}{g (x)}\right)^{n-1} + \ldots + A_{n-1} \frac{f (x)}{g (x)} + A_n = 0, \quad g(x) \neq 0, \qquad (**)$$

или уравнению

$$A_n \left(\frac{g (x)}{f (x)}\right)^n + A_{n-1} \left(\frac{g (x)}{f (x)}\right)^{n-1} + \ldots + A_1 \frac{g (x)}{f (x)} = 0, \quad f(x) \neq 0. \qquad (***)$$

Подставляя $\frac{f (x)}{g (x)} = y$ в формулу (**) или $\frac{g (x)}{f (x)} = y$ в формулу (***), получим рациональное уравнение вида

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_{n-1} y + A_n = 0$$

или

$$A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \ldots + A_1 y + A_1 = 0.$$

Решение. Очевидно, что $x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на x^4 и получим

$$\frac{(2x^2 - x + 1)^2}{x^2} + \frac{2x^2 - x + 1}{x^2} - 6 = 0.$$

Обозначим $\frac{2x^2 - x + 1}{x^2} = y$. Уравнение примет вид $y^2 + y - 6 = 0$. Отсюда $y_1 = -3$, $y_2 = 2$. При этом исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\frac{2x^2 - x + 1}{x^2} = -3 \text{ и } \frac{2x^2 - x + 1}{x^2} = 2.$$

Первое уравнение не имеет действительных корней. Решением второго будет $x = 1$.

Пример 1.390. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{2x - 3}}{\sqrt[4]{(2x - 1)(2x - 3)}} = \frac{8}{3}.$$

Решение. Разделив почленно числитель на знаменатель, получим:

$$\sqrt[4]{\frac{2x - 1}{2x - 3}} - \sqrt[4]{\frac{2x - 3}{2x - 1}} = \frac{8}{3}.$$

Делаем замену $\sqrt[4]{\frac{2x - 1}{2x - 3}} = y$. Уравнение примет вид $y - \frac{1}{y} = \frac{8}{3}$, или после преобразований: $3y^2 - 8y - 3 = 0$. Отсюда находим $y_1 = 3$, $y_2 = -\frac{1}{3}$ (не удовлетворяет). Возвращаемся к подстановке $\sqrt[4]{\frac{2x - 1}{2x - 3}} = 3$.

О т в е т: $\frac{121}{80}$.

Пример 1.391. Решить уравнение

$$\sqrt{3x + 6} - \sqrt{x - 9} = \frac{5}{6} \sqrt[4]{3x^2 - 21x - 54}.$$

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$6 \sqrt[4]{(3x + 6)^2} - 6 \sqrt[4]{(x - 9)^2} = 5 \sqrt[4]{(3x + 6)(x - 9)}.$$

Получим однородное уравнение. Поскольку $x \neq -2$, то, разделив обе части уравнения на $\sqrt[4]{(3x+6)^2}$, получим

$$6 - 6\sqrt[4]{\left(\frac{x-9}{3x+6}\right)^2} = 5\sqrt[4]{\frac{x-9}{3x+6}}.$$

Делаем подстановку $\sqrt[4]{\frac{x-9}{3x+6}} = y$ $(y \geq 0)$. Уравнение примет вид $6y^2 + 5y - 6 = 0$. Отсюда $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = -\frac{3}{2}$ (не удовлетворяет). Возвращаясь к подстановке, получим $\sqrt[4]{\frac{x-9}{3x+6}} = \frac{2}{3}$, откуда $x = 25$.

Ответ: 25.

Обратим внимание на условие и ответ, который получили после решения уравнений вида

$$x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a} \text{ и } x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a}.$$

Уравнение $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ имеет корни $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{a}$.

Уравнение $x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a}$ имеет корни $x_1 = a$, $x_2 = -\frac{1}{a}$.

Итак, если правую часть уравнения вида $\frac{f(x)}{\varphi(x)} + \frac{\varphi(x)}{f(x)} = a$ записать в виде суммы взаимно обратных чисел, то слагаемые левой части можно находить устно без введения вспомогательной неизвестной.

Пример 1.392. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}} + \sqrt[3]{\frac{x+3}{x-2}} = \frac{10}{3}.$$

Решение. Записав правую часть уравнения в виде суммы $3 + \frac{1}{3}$, получим совокупность двух уравнений:

$$\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}} = 3, \qquad \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}} = \frac{1}{3}.$$

Решив эти уравнения, получим корни $-\frac{83}{26}$ и $\frac{57}{26}$.

Ответ: $-\frac{83}{26}; \frac{57}{26}$.

Пример 1.393. Решить уравнение $\frac{x^2-x}{x+5}+\frac{x+5}{x^2-x}=\frac{13}{6}$.

Решение. Правую часть уравнения можно записать в виде суммы $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}$, тогда получим совокупность уравнений: $\frac{x^2-x}{x+5}=\frac{2}{3}$ и $\frac{x^2-x}{x+5}=\frac{3}{2}$. Решение этих уравнений дает корни $\frac{5\pm\sqrt{145}}{6}$; $\frac{5\pm\sqrt{145}}{4}$.

Ответ: $\frac{5\pm\sqrt{145}}{6}$; $\frac{5\pm\sqrt{145}}{4}$.

Пример 1.394. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-x}}-\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2+2}}=\frac{8}{3}.$$

Решение. Записав правую часть уравнения в виде разности $3-\frac{1}{3}$, получим совокупность уравнений: $\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-x}}=3$ и $\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-x}}=-\frac{1}{3}$. Решаем эти уравнения. Второе уравнение не имеет решений.

Ответ: $\frac{9\pm\sqrt{145}}{16}$.

Упражнения

Решить уравнения:

1.395. $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$.

1.396. $x-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{a}$.

1.397. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\frac{17}{4}$.

1.398. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$.

1.399. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=2{,}5$.

1.400. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}} = 2.$

1.401. $\sqrt[5]{\dfrac{16z}{z-1}} + \sqrt[5]{\dfrac{z-1}{16z}} = 2{,}5.$

1.402. $\sqrt[n]{(x+1)^2} + \sqrt[n]{(x-1)^2} = 2\sqrt[n]{x^2-1}.$

1.403. $2\sqrt{5x+1} - 2\sqrt{2x-5} = 3\sqrt[4]{(2x-5)(5x+1)}.$

1.404. $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-9} = \dfrac{3}{2}\sqrt[4]{x^2-3x-54}.$

1.405. $\sqrt{\dfrac{x}{x^3+3}} + \sqrt{\dfrac{x^3+3}{x^5}} = \dfrac{5}{2x}.$

Дополнение до полного квадрата

Пример 1.406. Решить уравнение

$$\frac{1}{(x^2-2)^2} + \frac{1}{(x^2+2)^2} = \frac{40}{9x^4}.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на x^4 ($x \neq 0$).

Имеем: $\dfrac{x^4}{(x^2-2)^2} + \dfrac{x^4}{(x^2+2)^2} = \dfrac{40}{9},$

или

$$\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)^2 = \frac{40}{9}.$$

Дополним левую часть уравнения до полного квадрата суммы двух выражений, прибавив к обеим частям уравнения по $\dfrac{2x^4}{x^4-4}$. Имеем:

$$\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^2 + \frac{2x^4}{x^4-4} + \left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)^2 = \frac{40}{9} + \frac{2x^4}{x^4-4}.$$

Отсюда $\left(\dfrac{x^2}{x^2-2} + \dfrac{x^2}{x^2+2}\right)^2 = \dfrac{40}{9} + \dfrac{2x^4}{x^4-4}$

или

$$\left(\frac{2x^4}{x^4-4}\right)^2 = \frac{40}{9} + \frac{2x^4}{x^4-4}.$$

Делаем подстановку $\frac{2x^4}{x^4 - 4} = y$. Уравнение принимает вид: $y^2 = \frac{40}{9} + y$. Решив его, получим $y_1 = \frac{8}{3}$, $y_2 = -\frac{5}{3}$. Таким образом, имеем совокупность уравнений

$$\frac{2x^4}{x^4 - 4} = \frac{8}{3}, \quad \frac{2x^4}{x^4 - 4} = -\frac{5}{3}.$$

О т в е т: $\pm 2; \pm \sqrt[4]{\frac{20}{11}}$.

Пример 1.407. Решить уравнение $x^2 + \frac{9x^2}{(x + 3)^2} = 7$.

Решение. Дополним левую часть уравнения до полного квадрата разности, прибавив к обеим частям $-\frac{6x^2}{x + 3}$.

Имеем:
$$x^2 - \frac{6x^2}{x + 3} + \frac{9x^2}{(x + 3)^2} = 7 - \frac{6x^2}{x + 3},$$

$$\left(x - \frac{3x}{x + 3}\right)^2 = 7 - \frac{6x^2}{x + 3}.$$

Отсюда $\left(\frac{x^2}{x + 3}\right)^2 = 7 - \frac{6x^2}{x + 3}$. Делаем подстановку: $\frac{x^2}{x + 3} = y$. Уравнение принимает вид: $y^2 = 7 - 6y$. Отсюда $y_1 = -7$, $y_2 = 1$. Решаем совокупность уравнений:

$$\frac{x^2}{x + 3} = -7 \text{ и } \frac{x^2}{x + 3} = 1.$$

О т в е т: $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Пример 12. Решить уравнение $x^4 - 8x - 7 = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $x^4 + 1 = 8x + 8$. Дополним левую часть уравнения до полного квадрата суммы, прибавив к обеим частям $2x^2$. Имеем

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 8x + 8.$$

Получим $(x^2 + 1)^2 = 2\,(x + 2)^2$. Отсюда

$$x^2 + 1 = \pm\sqrt{2}\,(x + 2).$$

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$x^2 - \sqrt{2}\,x + 1 - 2\sqrt{2} = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + \sqrt{2}\,x + 1 + 2\sqrt{2} = 0.$$

О т в е т: $\dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}$.

Пример 1.409. Решить уравнение

$$x^4 + 10x^3 - 125x - 54 = 0.$$

Решение. Дополним первые два члена уравнения до полного квадрата суммы:

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 - 25x^2 - 125x - 54 = 0,$$

или после группировки $(x^2 + 5x)^2 - 25\,(x^2 + 5x) - 54 = 0$.

Делаем подстановку $x^2 + 5x = y$. Уравнение приобретет вид $y^2 - 25y - 54 = 0$. Отсюда $y_1 = 27$, $y_2 = -2$. Решаем совокупность уравнений:

$$x^2 + 5x = 27 \quad \text{и} \quad x^2 + 5x = -2.$$

О т в е т: $\dfrac{-5 \pm \sqrt{133}}{2}$; $\dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Упражнения

Решить уравнения:

1.410. $x^2 + \dfrac{x^2}{(1 + x)^2} = 3$.

1.411. $\left(\dfrac{x}{x - 1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^2 = \dfrac{10}{9}$.

1.412. $x^4 - 12x + 323 = 0$.

1.413. $x^4 + 4x^2 - 4x + 15 = 0$.

1.414. $x^4 + 6x^3 - 27x - 10 = 0$.

1.415. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 3 = 0$.

1.416. $x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 5x - 6 = 0$.

1.417. $x^4 - 8x + 63 = 0$.

1.418. $x^4 - 8x^3 + 64x - 57 = 0$.

1.419. $x^4 - 2x^3 + x - 30 = 0$.

Возвратно-симметричные уравнения

Симметричным *называется целое рациональное уравнение вида*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Симметричное уравнение третьей степени имеет вид $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ и решается группировкой:

$$a\,(x^3 + 1) + bx\,(x + 1) = 0,$$

откуда $(x + 1)\,(ax^2 - (a - b\,)x + a) = 0$. Решаем совокупность уравнений: $x + 1 = 0$ и $ax^2 - (a - b)\,x + a = 0$.

Рассмотрим обобщенные обратные уравнения четвертой и шестой степени, содержащие в себе симметричные уравнения.

Возвратно-симметричным *уравнением четвертой степени назовем уравнение вида* $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, *в котором выполняется зависимость между коэффициентами* $\dfrac{a}{e} = \left(\dfrac{b}{d}\right)^2$.

Решение. Разделим обе части уравнения на x^2 и сгруппируем первый член уравнения с пятым, второй — с четвертым: $\left(ax^2 + \dfrac{e}{x^2}\right) + \left(bx + \dfrac{d}{x}\right) + c = 0,$

$$e\left(\frac{a}{e}\,x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + d\left(\frac{b}{d}\,x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Используя зависимость между коэффициентами уравнения, запишем его в виде

$$e\left(\frac{b^2}{d^2}\,x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + d\left(\frac{b}{d}\,x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \qquad (*)$$

Вводим вспомогательную неизвестную:

$$\frac{b}{d}\,x + \frac{1}{x} = y. \qquad (**)$$

Возведем обе части уравнения (**) в квадрат и выделим квадрат первого и квадрат второго выражения:

$$\frac{b^2}{d^2}\,x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{2b}{d}. \qquad (***)$$

Подставив значения (**) и (***) в уравнение (*), получим уравнение $ey^2 + dy + c - \frac{2be}{d} = 0$, которое и решим. Затем возвращаемся к подстановке.

Пример 1.420. Решить уравнение

$$4x^4 - 16x^3 + 7x^2 - 32x + 16 = 0.$$

Решение. Убеждаемся, что уравнение возвратное: $\frac{4}{16} = \left(\frac{-16}{-32}\right)^2$ — равенство выполняется. Разделим обе части уравнения на x^2 $(x \neq 0)$. После группировки получим

$$4\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 16\left(x + \frac{2}{x}\right) + 7 = 0.$$

Обозначим $x + \frac{2}{x} = y$, откуда

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4. \qquad (*)$$

Подставив (*) в уравнение, получим

$$4\,(y^2 - 4) - 16y + 7 = 0, \quad \text{или} \quad 4y^2 - 16y - 9 = 0.$$

Отсюда $y_1 = \frac{9}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Решаем совокупность уравнений $x + \frac{2}{x} = \frac{9}{2}$ и $x + \frac{2}{x} = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $4; \frac{1}{2}$.

Таким образом, если возвратно-симметричное уравнение четной степени

$$a_0\,x^{2k} + a_1\,x^{2k-1} + \ldots + a_{2k-1}\,x + a_{2k} = 0,$$

то делим на x^k $(x^k \neq 0)$. Подготовим введения вспомогательной неизвестной, сгруппировав члены, равноудаленные от начала и конца левой части уравнения.

Если возвратно-симметричное уравнение нечетной степени, то оно всегда имеет корень $x = -1$, причем частное от деления левой части уравнения на $x + 1$ является возвратно-симметричным многочленом четной степени.

Упражнения

Решить уравнения:

1.421. $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0.$

1.422. $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0.$

1.423. $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0.$

1.424. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = 5.$

1.425. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{5}{4}.$

1.426. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{18}{x^2} - 3\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{x}\right) = 8.$

1.427. $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0.$

1.428. $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 1 = 0.$

1.429. $x^4 + x^3 - 6x^2 + 3x + 9 = 0.$

1.430. $9x^4 - 18x^3 - 7x^2 + 12x + 4 = 0.$

1.431. $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0.$

1.432. $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0.$

1.433. $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0.$

1.434. $2x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 6x + 8 = 0.$

Метод производной пропорции

Две тождественно равные алгебраические дроби мож-
о рассматривать как пропорцию $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, где a, b, c, d —
ногочлены относительно $x, y, \dots, z$, в частности, $b \neq 0$,
$\neq 0$.

Теорема. *Если задана пропорция* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ $(b \neq 0$,
$\neq 0)$, *то справедливы равенства*

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}; \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}; \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d},$$

$$(a \neq b, \quad c \neq d),$$

Доказательство. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$,

откуда
$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad (*)$$

или $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$,

откуда
$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}. \qquad (**)$$

Разделим пропорцию (*) на пропорцию (**) (при $a \neq b$, $c \neq d$). Имеем:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}. \qquad (***)$$

Пример 1.435. Решить уравнение

$$\frac{2x^2-x-2+x\sqrt{x^2-x-2}}{2x^2-x-2-x\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{19}{7}.$$

Решение. Составим производную пропорцию (***)

$$\frac{4x^2-2x-4}{2x\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{26}{12};\quad \frac{2x^2-x-2}{2x\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{13}{12}.$$

Запишем полученное уравнение в виде

$$\frac{\sqrt{(x^2-x-2)^2}+x^2}{2x\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{13}{12}.$$

Еще раз составим производную пропорцию (***). Имеем:

$$\frac{(\sqrt{x^2-x-2}+x)^2}{(\sqrt{x^2-x-2}-x)^2}=25;\quad \frac{\sqrt{x^2-x-2}+x}{\sqrt{x^2-x-2}-x}=\pm 5.$$

Решим совокупность уравнений

$$\frac{\sqrt{x^2-x-2}+x}{\sqrt{x^2-x-2}-x}=5 \ \text{ и } \ \frac{\sqrt{x^2-x-2}+x}{\sqrt{x^2-x-2}-x}=-5.$$

В каждом из этих случаев еще раз составим производную пропорцию (***). Имеем:

1) $\dfrac{2\sqrt{x^2-x-2}}{2x}=\dfrac{6}{4};$

$\dfrac{x^2-x-2}{x^2}=\dfrac{9}{4};$

$5x^2+4x+8=0.$

Нет действительных корней.

2) $\dfrac{2\sqrt{x^2-x-2}}{2x}=\dfrac{-4}{-6};$

$\dfrac{x^2-x-2}{x^2}=\dfrac{4}{9};$

$5x^2-9x-18=0.$

$x_1=3,\ x_2=-1{,}2.$

Проверкой определяем, что $x_2=-1{,}2$ не удовлетворяет уравнению.

Ответ: 3.

Заметим, что механическое применение метода производной пропорции может привести к потере корней. Чтобы избежать этого, надо помнить, что из пропорции $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ $(b\neq 0,\ d\neq 0)$ следует существование производной пропорции $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$ при дополнительном условии $a\neq b$ и $c\neq d$ $\left(\text{то есть если } \dfrac{a}{b}\neq 1 \text{ и } \dfrac{c}{d}\neq 1\right)$.

Аналогично, из пропорции $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ $(b\neq 0,\ d\neq 0)$ следует правильность пропорции $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{c-d}{c+d}$ при дополнительном условии $a\neq -b$ и $c\neq -d$ $\left(\text{то есть } \dfrac{a}{b}\neq -1 \text{ и } \dfrac{c}{d}\neq -1\right)$. Итак, решение уравнений методом производной пропорции основывается на таких теоремах:

Теорема 1. *Уравнение*

$$\frac{f_1(x)+f_2(x)}{f_1(x)-f_2(x)}=\frac{\varphi_1(x)+\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)}\qquad (*)$$

является следствием уравнения

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)},\qquad (**)$$

если при значениях x, являющихся корнями уравнения (**), обе части этого уравнения не равны единице.

Теорема 2. *Уравнение*

$$\frac{f_1(x) - f_2(x)}{f_1(x) + f_2(x)} = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)} \qquad (*')$$

является следствием уравнения

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}, \qquad (**')$$

если при значениях x, являющихся корнями уравнения (**), *обе части этого уравнения не равны* -1.

Пример 1.436. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2}}.$$

Решение. Выясним, в каких случаях левая и правая части данной пропорции равны единице.

Левая часть данной пропорции равна 1, когда $x = 2$; правая часть равна 1, когда $x = 2$. Итак, делаем вывод, что $x = 2$ — корень данного уравнения.

Чтобы найти другие корни (если они существуют), нужно учесть, что, поскольку обе части уравнения равны 1, то нельзя пользоваться теоремой 1, то есть уравнение

$$\frac{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2}) + (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2}) - (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2}) + (\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2}) - (\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2})},$$

или
$$\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x+5}}{-\sqrt{x-2}}$$

не является следствием данного уравнения. (Полученное уравнение не имеет корней и, если не провести предварительный анализ, можно потерять корень $x = 2$).

Выясним, как нужно решать уравнение.

Отмечаем, что обе части данного уравнения ни при каких значениях x не равны -1. Таким образом, используя теорему 2, получим

$$\frac{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2})}$$

или
$$\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}=-\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+5}}.$$

Полученное уравнение является следствием данного уравнения, а оно имеет единственный корень $x=2$.

Ответ: 2.

Упражнения

Решить уравнение:

1.437. $\dfrac{2x^2-3x+x\sqrt{x^2-3x}}{2x^2-3x-x\sqrt{x^2-3x}}=\dfrac{7}{3}.$

1.438. $\dfrac{\sqrt{8+x+x^2}+\sqrt{4-x+x^2}}{\sqrt{8+x+x^2}-\sqrt{4-x+x^2}}=\dfrac{\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}-2}.$

1.439. $\dfrac{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-5}}=3.$

Решение уравнений относительно коэффициентов

Пример 1.440. Решить уравнение

$$(x^2-1)^2+(\sqrt{3}+1)(4x-\sqrt{3}-1)=0.$$

Решение. Преобразуем левую часть данного уравнения:

$$x^4-2x^2+1+4\sqrt{3}\,x-3-\sqrt{3}+4x-\sqrt{3}-1=0,$$

$$x^4-2x^2+4\sqrt{3}\,x+4x-3-2\sqrt{3}=0.$$

Введем вспомогательный параметр, обозначив $\sqrt{3}=a$. Уравнение принимает вид:

$$x^4-2x^2+4ax+4x-a^2-2a=0.$$

Решим это уравнение как квадратное относительно коэффициента a:

$$a^2 - 2\,(2x - 1)\,a - (x^4 - 2x^2 + 4x) = 0.$$

$$a_{1,2} = 2x - 1 \pm \sqrt{4x^2 - 4x + 1 + x^4 - 2x^2 + 4x} =$$

$$= 2x - 1 \pm \sqrt{(x^2 + 1)^2} = 2x - 1 \pm (x^2 + 1).$$

Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $a = x^2 + 2x$ и $a = -x^2 + 2x - 2$.

Вернемся к подстановке:

$$\sqrt{3} = x^2 + 2x. \quad \sqrt{3} = -x^2 + 2x - 2.$$

Решаем найденные уравнения относительно x:

1) $x^2 + 2x - \sqrt{3} = 0.$
$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}}.$

2) $x^2 - 2x + 2 + \sqrt{3} = 0.$
Нет действительных корней.

Ответ: $-1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

Упражнения

Решить уравнение:

1.441. $x^3 + 2ax^2 + a^2x + a - 1 = 0.$

1.442. $x^3 + 2\sqrt{7}\,x^2 + 7x + 4\sqrt{7} + 8 = 0.$

1.443. $4x^3 - 4\sqrt{5}\,x^2 + 5x - 2\sqrt{5} + 4 = 0.$

Теорема Безу и ее следствия

Если коэффициенты приведенного уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a^n = 0,$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — целые числа, то целые корни уравнения следует искать среди делителей свободного члена.

Если целый корень x_1 подбором найден, то делим многочлен на $x - x_1$. Частное от деления — многочлен $(n - 1)$-й степени. Аналогично ищем его корень.

Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не получим после деления многочлен второй степени. Приравняв его к нулю, получаем уравнение второй степени, корни которого находим, решая квадратное уравнение.

Пример 1.444. Решить уравнение

$$x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6 = 0.$$

Решение. Целые корни ищем среди чисел ±1; ±2; ±3; ±6. Подставляя эти числа в уравнение, находим корень $x_1 = -1$. Делим данный многочлен на $x + 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6 & x + 1 \\ \underline{x^4 + x^3 \qquad\qquad\quad} & \overline{x^3 - x - 6.} \\ -x^2 - 7x & \\ \underline{-x^2 - x} & \\ -6x - 6 & \\ \underline{-6x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

Решаем полученное уравнение $x^3 - x - 6 = 0$. Находим корень среди делителей свободного члена методом подбора. Имеем $x_2 = 2$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} x^3 \qquad - x - 6 & x - 2 \\ \underline{x^3 - 2x^2 \qquad\quad} & \overline{x^2 + 2x + 3.} \\ 2x^2 - x & \\ \underline{2x^2 - 4x} & \\ 3x - 6 & \\ \underline{3x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

Решая уравнение $x^2 + 2x + 3 = 0$, находим, что оно не имеет действительных корней.

Ответ: −1; 2.

Деление может быть упрощено по правилу, которое имеет название ***схемы Горнера***:

Уравнение, имеющее рациональные корни

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — целые числа, сводится к уравнению, имеющему целые корни.

Умножим почленно обе части уравнения на a_0^{n-1}. Получим

$$a_0^n x^n + a_1 a_0^{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} a_0^{n-1} x + a_0^{n-1} a_n = 0.$$

Обозначим

$$a_0 x = y. \qquad (*)$$

После такой подстановки уравнение принимает вид

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} a_0^{n-2} y + a_0^{n-1} a_n = 0.$$

Если данное уравнение имело рациональные корни, то полученное имеет целые корни, которые, как и в предыдущем случае, следует искать среди делителей свободного члена.

Решив полученное уравнение, возвращаемся к подстановке (*) и находим корни данного уравнения.

Пример 1.445. Решить уравнение

$$5x^3 - 6x^2 + 11x - 2 = 0.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на 5^2. Имеем: $5^3 x^3 - 6 \cdot 5^2 x^2 + 55 \cdot 5x - 50 = 0$. Обозначим

$$5x = y, \qquad (**)$$

тогда уравнение примет вид

$$y^3 - 6y^2 + 55y - 50 = 0.$$

Целые корни его ищем среди делителей числа 50 (т.е. среди чисел ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, ± 25, ± 50). Имеем: $y_1 = 1$.

Частное от деления многочлена $y^3 - 6y^2 + 55y - 50$ на $y - 1$ дает трехчлен $y^2 - 5y + 50$, не имеющий действительных корней.

Возвращаясь к подстановке (**), получим $x = \frac{1}{5}$.

Упражнения

Найти остаток от деления:

1.446. $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 2) : (x - 1)$.

1.447. $(x^5 + x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 6) : (x + 1)$.

1.448. $(2x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x - 5) : (x - 2)$.

1.449. При каком значении a многочлен $x^3 - 3x^2 + 5x + a$ при делении на $x + 1$ дает остаток, равный 4?

1.450. При каком значении a многочлен $2x^5 - 3x^3 + 11x^2 - x + a$ при делении на $x + 2$ дает остаток, равный 3?

1.451. Дан многочлен $2x^3 - 3x^2 - ax + b$. Какие числовые значения должны принять a и b, чтобы многочлен при делении на $x + 1$ давал остаток, равный 7, а при делении на $x - 1$ — остаток, равный 5?

1.452. Определить, при каком значении k многочлен $x^4 - 4x^3 + kx^2 - 13x + 6$ делится без остатка на $x - 2$.

1.453. При каких значениях a и b многочлен $ax^2 + bx^2 - 37x + 14$ делится на $x^2 + x - 2$?

Разложить на множители:

1.454. $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$.

1.455. $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$.

1.456. $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$.

1.457. $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$.

Решить уравнения:

1.458. $x^3 - 8x^2 + 13x - 6 = 0$.

1.459. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

1.460. $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$.

1.461. $x^3 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$.

1.462. $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$.

1.463. $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0$.

1.464. $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$.

1.465. $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0$.

1.466. $x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x = 0$.

1.467. $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$.

Метод неопределенных коэффициентов

Среди способов разложения многочленов на множители заслуживает внимания метод неопределенных коэффициентов. Его суть основывается на свойстве тождественного равенства двух многочленов.

Два многочлена могут быть тождественно равными тогда и только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях x равны между собой, то есть при $a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = b_1x^n + b_2x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$ имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1, \\ a_2 &= b_2, \\ &\ldots \\ a_n &= b_n. \end{aligned}$$

Пусть известно, что в результате некоторых преобразований получается некоторый многочлен, коэффициенты которого неизвестны. Эти коэффициенты обозначают буквами и рассматривают как неизвестные. Далее для определения этих неизвестных коэффициентов составляется система уравнений.

Объясним это на примере.

Пример 1.468. При каких значениях a и b многочлен $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ делится без остатка на трехчлен $x^2 - 3x + 4$?

Решение. Представим многочлен четвертой степени в виде произведения двух квадратных трехчленов:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b = (x^2 - 3x + 4)(x^2 + px + q),$$

или после преобразования имеем

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b =$$

$$= x^4 + (p - 3)x^3 + (q - 3p + 4)x^2 + (4p - 3q)x + 4q.$$

Приравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x и свободные члены, получаем систему:

$$\begin{cases} p - 3 = -3, \\ q - 3p + 4 = 3, \\ 4p - 3q = a, \\ 4q = b, \end{cases}$$

откуда $p = 0$, $q = -1$, $a = 3$, $b = -4$.

Ответ: $a = 3$, $b = -4$.

Упражнения

1.469. При каком значении a многочлен $x^3 + 6x^2 + ax + 5$ делится без остатка на $x^2 + x + 1$?

1.470. При каких значениях a и b многочлен $x^4 - x^3 - 9x^2 + ax - 10$ делится без остатка на $x^2 + 2x + b$?

1.471. При каких значениях a и b многочлен $x^4 - 2x^3 + ax^2 - 3x + b$ делится без остатка на $x^2 - 3x + 3$?

Решение иррациональных уравнений

Понятно, что решение иррациональных уравнений состоит в приведении их к соответствующим рациональным уравнениям, которые являются следствиями данных иррациональных уравнений. Одним из стандартных способов решения иррациональных уравнений есть освобождение их от корней при помощи последовательного возведения обеих частей уравнений в соответствующую степень.

Заметим, что когда при решении иррациональных уравнений обе его части возводятся в четную степень, возможно нарушение равносильности и появление посторонних корней, которые исключаются при помощи проверки.

Пример 1.472. Решить уравнение:

$$\sqrt{9 - 5x} - \sqrt{3x - 2} = \sqrt{x}.$$

Решение. 1-й способ. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$9 - 5x + 3x - 2 - 2\sqrt{27x - 18 - 15x^2 + 10x} = x,$$

откуда

$$7 - 3x = 2\sqrt{-15x^2 + 37x - 18}.$$

Снова возведем в квадрат:

$$49 + 9x^2 - 42x = -60x^2 + 148x - 72,$$

Справочный отдел

*Уравнение $f(x) = \varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — алгебраические функции, причем хотя бы одна из них иррациональная функция, называется **иррациональным уравнением**.*

то есть

$$69x^2 - 190x + 121 = 0,$$

откуда $x_1 = \frac{121}{69}$, $x_2 = 1$. Делаем проверку и убеждаемся, что x_1 — посторонний корень, а x_2 удовлетворяет данному уравнению.

Ответ: 1.

2-й способ. Запишем уравнение в виде:

$$\sqrt{9-5x} = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x}.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 9 - 5x \ge 0, \\ 3x - 2 \ge 0, \\ x \ge 0, \\ (\sqrt{9-5x})^2 = (\sqrt{3x-2} + \sqrt{x}\,)^2, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \le x \le \frac{9}{5}, \\ 11 - 9x = 2\sqrt{3x^2 - 2x}. \end{cases}$$

Правая часть уравнения при любом значении x неотрицательна, то есть дополняем систему еще одним дополнительным условием:

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \le x \le \frac{9}{5}, \\ 11 - 9x \ge 0, \\ (11 - 9x)^2 = 4\,(3x^2 - 2x), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \le x \le \frac{11}{9}, \\ 69x^2 - 190x + 121 = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \le x \le \frac{11}{9}, \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{2}{3} \le x \le \frac{11}{9}, \\ x = \frac{121}{69}. \end{cases}$$

Система (*) имеет одно решение $x = 1$, которое и является корнем уравнения.

Ответ: 1.

Метод составления смешанных систем уравнений и неравенств (присоединение к области допустимых значений условия совпадения знаков обеих частей уравнения) часто дает возможность, не решая иррационального уравнения, определить, что оно не имеет действительных корней.

Пример 1.473. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{x}+1.$$

Решение. Найдем область допустимых значений этого уравнения, присоединив к ней условие совпадения знаков обеих частей:

$$\begin{cases} x-2\ge 0, \\ 2x-3\ge 0, \\ x\ge 0, \\ \sqrt{x-2}-\sqrt{2x-3}\ge 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x\ge 2, \\ x-2\ge 2x-3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x\ge 2, \\ x\le 1. \end{cases}$$

Система несовместна. Таким образом, данное уравнение не имеет корней.

Пример 1.474. Решить уравнение

$$\sqrt{2+x-x^2}=\sqrt{x}-2.$$

Решение. Присоединив к области допустимых значений уравнения условие совпадения знаков обеих частей уравнения, получим:

$$\begin{cases} 2+x-x^2\ge 0, \\ x\ge 0, \\ \sqrt{x}-2\ge 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x^2-x-2\le 0, \\ x\ge 0, \\ x\ge 4, \end{cases} \quad \text{имеем} \quad \begin{cases} -1\le x\le 2, \\ x\ge 4. \end{cases}$$

Эта система несовместна, то есть данное уравнение

Пример 1.475. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{5x+2}-\sqrt[3]{5x-2}=2.$$

Решение. Уравнение такого вида решается возведением обеих частей в третью степень по формуле

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab\,(a-b).$$

Получим $5x+2-(5x-2)-$

$$-3\sqrt[3]{25x^2-4}\,(\underbrace{\sqrt[3]{5x+2}-\sqrt[3]{5x-2}}_{2})=8.$$

Учитывая, что по условию $\sqrt[3]{5x+2}-\sqrt[3]{5x-2}=2$, имеем:

$$4-6\sqrt[3]{25x^2-4}=8,\quad \sqrt[3]{25x^2-4}=-\frac{2}{3},$$

откуда $25x^2-4=-\frac{8}{27}$, $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

В некоторых случаях целесообразно заменить иррациональное уравнение равносильной рациональной системой при помощи введения нескольких вспомогательных неизвестных.

Пример 1.476. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1.$$

Решение. Обозначим $2-x=a^3$; $x-1=b^2$. Сложим левые и правые части этих уравнений и введем их в условие уравнения. Получим систему уравнений, которую решаем:

$$\begin{cases}a^3+b^2=1,\\ a+b=1,\end{cases}\qquad \begin{cases}b=1-a,\\ a^3+(1-a)^2=1.\end{cases}$$

Решив второе уравнение системы, найдем $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=-2$ и, возвращаясь к подстановке, получим $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=10$.

Ответ: 1, 2, 10.

Иногда стандартный способ решения иррациональных уравнений приводит к громоздким преобразованиям, которые можно упростить введением вспомогательной неизвестной.

Пример 1.477. Решить уравнение

$$\sqrt{7x-6}+\sqrt{x+3}=9.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x+3}=y$, $y \geq 0$, тогда $x=y^2-3$ и уравнение принимает вид $\sqrt{7y^2-27}+y=9$. Решая его, имеем $y^2+3y-18=0$, $y_1=-6$ (не удовлетворяет), $y_2=3$.

Возвращаясь к подстановке, находим $x=6$.

Ответ: 6.

Пример 1.478. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+59}-\sqrt[3]{x-4}=3.$$

Решение. Пусть $\sqrt[3]{x-4}=y$, тогда $y=y^3+4$ и уравнение примет вид

$$\sqrt[3]{y^3+63}-y=3, \text{ или } \sqrt[3]{y^3+63}=y+3.$$

Отсюда $y^2+3y-4=0$. Решая это уравнение, получаем $y_1=-4$, $y_2=1$. Возвращаясь к подстановке, имеем $x_1=-60$, $x_2=5$.

Ответ: −60; 5.

Упражнения

Решить уравнение:

1.479. $\sqrt{7-3x}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{x}$.

1.480. $\sqrt{4x+1}-\sqrt{5-2x}=\sqrt{x+2}$.

1.481. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-2}$.

1.482. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$.

1.483. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

1.484. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

1.485. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.

1.486. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0$.

Решение уравнений различными методами

Упражнения

Решить уравнения:

1.487. $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0.$

1.488. $\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{12}.$

1.489. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4.$

1.490. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6.$

1.491. $(x+3)^3-(x+1)^3=56.$

1.492. $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=47.$

1.493. $\dfrac{(x-a)^2+x(x-a)+x^2}{(x-a)^2-x(x-a)+x^2}=\dfrac{19}{7}.$

1.494. $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x.$

1.495. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2.$

1.496. $\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+4\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^{\frac{1}{2}}=4.$

1.497. $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0.$

1.498. $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3.$

1.499. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2.$

1.500. $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4.$

1.501. $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56.$

1.502. $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-18=0.$

1.503. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3.$

1.504. $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$.

1.505. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$.

1.506. $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$.

1.507. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{10}{9}$.

1.508. $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.

1.509. $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

1.510. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$.

1.511. $\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$.

1.512. $(x+\sqrt{x^2-1})^5\cdot(x-\sqrt{x^2-1})^3=1$.

1.513. $\frac{\sqrt{(a-x)^2}+\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}{\sqrt{(a-x)^2}-\sqrt{(a-x)(b-x)}+\sqrt{(b-x)^2}}=\frac{7}{3}$.

1.514. $x^2+\frac{81x^2}{(9+x)^2}=40$.

1.515. $\frac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\frac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16$.

1.516. $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{3}$.