А.ГАЙШТУТ

МАТЕМАТИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

В ПОМОЩЬ ПОВТОРЯЮЩИМ МАТЕМАТИКУ ПО СПРАВОЧНИКАМ

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Часть 2. Содержание

Обратные тригонометрические функции

Из определения обратных тригонометрических функций следует:

- $\sin(\arcsin x) = x$, если $|x| \le 1$.
- $\cos(\arccos x) = x$, если $|x| \le 1$.
- $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, для любого действительного числа x.
- $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, для любого действительного числа x.

Обратный порядок этих операций дает тот же результат:

- $\arcsin(\sin x) = x$ в том случае, когда $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
- $\arccos(\cos x) = x$ в том случае, когда $0 \le x \le \pi$.
- $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ в том случае, когда $|x| < \frac{\pi}{2}$.
- $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ в том случае, когда $0 < x < \pi$.

Основные тождества

1. При всех допустимых значениях x справедливы тождества:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Докажем одно из них, например (2).

Переписав его в виде $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$, вычислим $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$.

Так как

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi,$$

то

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, два числа arctg x и $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$, заключенные в одном интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, имеют равные значения тангенса:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right).$$

Отсюда следует равенство этих чисел, то есть

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x \quad \text{или} \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Отметим еще несколько тождеств.

2. При всех допустимых значениях аргумента x справедливы тождества:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \tag{3}$$

Справочный отдел

Функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает и непрерывна; следовательно, она имеет обратную функцию, возрастающую и непрерывную.

*Функция, обратная для функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, называется **арксинусом** и обозначается* arcsin.

Согласно определению обратной функции, областью определения арксинуса будет отрезок $[-1; 1]$, а множеством значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ убывает и непрерывна; следовательно, она имеет обратную функцию, убывающую и непрерывную.

Функция, обратная для функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$, ***называется арккосинусом** и обозначается* arccos.

Областью определения арккосинуса будет отрезок $[-1; 1]$, а множеством значений — отрезок $[0; \pi]$.

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \tag{4}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \tag{5}$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \tag{6}$$

Докажем одно из них, например, (5).

Имеем $\cos(\arccos(-x)) = -x$ и

$$\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x, \text{ т.е.}$$

$$\cos(\arccos(-x)) = \cos(\pi - \arccos x).$$

Так как $0 \le \arccos a \le \pi$ для любого $|a| \le 1$, то

$$0 \le \arccos(-x) \le \pi \quad \text{и} \quad 0 \le \pi - \arccos x \le \pi.$$

Таким образом, числа $\arccos(-x)$ и $\pi - \arccos x$, заключенные в одном промежутке $[0; \pi]$, имеют равные значения косинуса. Следовательно, эти числа одинаковы:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Справочный отдел

Функция тангенс непрерывная и возрастающая на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, следовательно, она имеет обратную функцию, которая непрерывна и возрастает.

Функция, обратная для фучкции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, называется ***арктангенсом*** *и обозначается* arctg.

Областью определения арктангенса будет интервал $(-\infty; \infty)$, а множество значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

На интервале $(0; \pi)$ функция котангенс убывает, кроме того, она непрерывна в каждой точке интервала $(0; \pi)$, следовательно, на интервале $(0; \pi)$ эта функция имеет обратную функцию, которая является убывающей и непрерывной.

Функция, обратная для функции $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0; \pi)$, называется ***арккотангенсом*** *и обозначается* arcctg.

Согласно определению обратной функции, областью определения арккотангенса будет интервал $(-\infty; \infty)$, а множеством значений — интервал $(0; \pi)$.

Вычислить:

2.300. *а*) $\arcsin \frac{1}{2}$; *ж*) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; *з*) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$;

в) $\operatorname{arctg} 1$; *и*) $\operatorname{arctg} (-\sqrt{3})$;

г) $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$; *к*) $\operatorname{arcctg} (-1)$;

д) $\arcsin 1$; *л*) $\arccos (-1)$;

е) $\arccos 0$; *м*) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.301. $\operatorname{tg} \left(5 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.302. $\sin \left(3 \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2 \arccos \frac{1}{2}\right)$.

2.303. $\cos \left(3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

2.304. $\cos \left(\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2.305. $\sin \left(\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) - \arccos \frac{1}{2}\right)$.

Доказать равенства:

2.306. *а*) $\sin (\arcsin m) = m$ $(|m| \le 1)$;

б) $\cos (\arcsin m) = \sqrt{1 - m^2}$ $(|m| \le 1)$;

в) $\operatorname{tg} (\arcsin m) = \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$ $(|m| < 1)$;

г) $\operatorname{ctg} (\arcsin m) = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m}$

$(m \in [-1; 0) \cup (0; 1])$.

2.307. *а*) $\cos (\arccos m) = m$ $(|m| \le 1)$;

б) $\sin (\arccos m) = \sqrt{1 - m^2}$ $(|m| \le 1)$;

в) $\operatorname{tg}(\arccos m)=\dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m}$

$(m\in[-1;\,0)\cup(0;\,1])$;

г) $\operatorname{ctg}(\arccos m)=\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$ $(|m|<1)$.

2.308. *а*) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} m)=m$;

б) $\sin(\operatorname{arctg} m)=\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$;

в) $\cos(\operatorname{arctg} m)=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$;

г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} m)=\dfrac{1}{m}$ $(m\neq 0)$.

2.309. *а*) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} m)=m$;

б) $\sin(\operatorname{arcctg} m)=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$;

в) $\cos(\operatorname{arcctg} m)=\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$;

г) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} m)=\dfrac{1}{m}$.

Вычислить:

2.310. $\sin\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right)$.

2.311. $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$.

2.312. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{4}{7}\right)\right)$.

2.313. $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{2}+\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$.

2.314. $\sin\left(\arcsin\dfrac{2}{3}+\arccos\dfrac{1}{4}\right)$.

2.315. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}\right)$.

2.316. $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{3}{4}+\arccos\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$.

2.317. $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)$.

2.318. $\cos\left(2\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

Доказать тождество:

2.319. $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)=\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$.

2.320. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\operatorname{arctg}\frac{32}{43}$.

2.321. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

2.322. $\operatorname{ctg}(\arcsin x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

2.323. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

Решить уравнения:

2.324. $4\operatorname{arctg}(x^2-3x-3)-\pi=0$.

2.325. $6\arcsin(x^2-6x+8{,}5)=\pi$.

2.326. $\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}(x+1)=\frac{\pi}{4}$.

2.327. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{4}$.

2.328. $\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}}-\arcsin\sqrt{1-x}=\arcsin\frac{1}{3}$.

2.329. $\arcsin 3x=\arccos 4x$.

2.330. $2\arcsin x=\arcsin\frac{10x}{3}$.

2.331. $\arcsin x+\arcsin 2x=\arcsin 3x$.

Решение тригонометрических уравнений

Пример 2.332. Решить уравнение
$\sin\left(30^\circ - \frac{3x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Запишем это уравнение в виде

$$\sin\left(\frac{3x}{2} - 30^\circ\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Справочный отдел

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, ***где*** a ***— некоторое число.***

Очевидно, уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ имеют решения только при $|a| \le 1$, а уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ — при любых значениях a.

Решение простейших тригонометрических уравнений

1. Если $\sin x = a$, где $|a| \le 1$, то

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,}$$

где n — произвольное целое число.

Частные случаи:

$\sin x = -1$, $\quad \boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},}$

$\sin x = 0$, $\quad \boxed{x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z},}$

$\sin x = 1$, $\quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.}$

2. Если $\cos x = a$, где $|a| \le 1$, то

$$\boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi k,}$$

k — произвольное целое число.

Частные случаи:

$\cos x = -1$, $\quad \boxed{x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z},}$

$\cos x = 0$, $\quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z},}$

$\cos x = 1$, $\quad \boxed{x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.}$

3. Если $\operatorname{tg} x = a$, то $\quad \boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi f,\ f \in \mathbf{Z}.}$

4. Если $\operatorname{ctg} x = a$, то $\quad \boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi l,\ l \in \mathbf{Z}.}$

Решим его относительно $\frac{3x}{2} - 30^\circ$. Получим

$$\frac{3x}{2} - 30^\circ = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 180^\circ k,$$

откуда $x = (-1)^{k+1} \cdot 30^\circ + 120^\circ k + 20^\circ$, где k — произвольное целое число.

В случае необходимости, заменяя k четным или нечетным числом, формулу $x = (-1)^{k+1} \cdot 30^\circ + 120^\circ k + 20^\circ$ можно записать в виде двух формул:

- при $k = 2n$

$$x = -30^\circ + 120^\circ \cdot 2n + 20^\circ = -10^\circ + 240^\circ n;$$

- при $k = 2n + 1$

$$x = 30^\circ + 120^\circ (2n + 1) + 20^\circ = 170^\circ + 240^\circ n.$$

Пример 2.333. Решить уравнение $\cos \frac{2x - \pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Решение. Решая это уравнение относительно $\frac{2x - \pi}{3}$,

находим: $$\frac{2x - \pi}{3} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,$$

$$\frac{2x - \pi}{3} = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, \quad \frac{2x - \pi}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$$

откуда $x = \pm\pi + \frac{\pi}{2} + 3\pi k$, где k — произвольное целое число.

Если это необходимо, полученную формулу $x = \pm\pi + \frac{\pi}{2} + 3\pi k$ можно записать в виде двух формул:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi k \quad \text{и} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 3\pi k.$$

Пример 2.334. Решить уравнение $\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$.

Решение. $$\frac{1 + \cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{3}{4}, \ \cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

откуда $6x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{18} \pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Полученную формулу можно записать в виде двух формул: $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$ и $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Решение уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

Пример 2.335. Решить уравнение

$$3 \sin^2 x - 10 \sin x + 3 = 0.$$

Решение. Пусть $\sin x = y$. Данное уравнение примет следующий вид: $3y^2 - 10y + 3 = 0$. Решив его, найдем $y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = 3$. Значение $y_2 = 3$ не удовлетворяет условию, так как $|\sin x| \le 1$. Следовательно,

$$\sin x = \frac{1}{3}, \quad x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2.336. Решить уравнение $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = 2{,}5$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{5}{2}.$$

Пусть $\operatorname{tg} 2x = y$. Данное уравнение примет следующий вид: $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$, или $2y^2 - 5y + 2 = 0$. Решив его, найдем $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Тогда:

$\operatorname{tg} 2x = 2$, $2x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $x_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$;

$\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 2.337. Решить уравнение $\sqrt{2} \sin^2 x = \cos x$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{2}(1 - \cos^2 x) = \cos x$ или $\sqrt{2} \cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0$, откуда $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\cos x = -\sqrt{2}$. Второе из полученных уравнений не имеет решения. Решением первого уравнения является $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где k — произвольное целое число.

Пример 2.338. Решить уравнение

$$\sin x - \cos x = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}.$$

Решение. $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$,

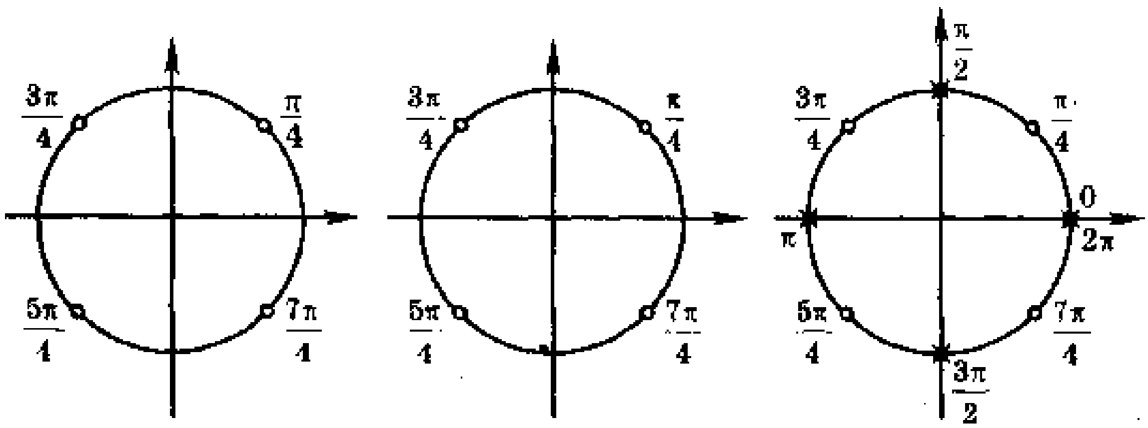
*Справочный отдел**

При решении уравнений форма записи не однозначна. Поэтому перед самостоятельным решением уравнений следует ознакомиться со следующими замечаниями.

Замечание 1. Один и тот же ответ, полученный при решении уравнения, может быть записан по-разному. Например:

$$\pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \qquad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}; \qquad \begin{cases} x = \frac{\pi f}{4},\ f \in \mathbf{Z}, \\ x \neq \frac{\pi l}{2},\ l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Обнаружить идентичность этих ответов легко следующим приемом. Чертим окружность и на ней кружочками обозначаем решения, принадлежащие данному множеству решений, записанных в общем виде, а крестиками — решения, ему не принадлежащие (рис. 2.1).



$$\pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}; \qquad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}; \qquad \begin{cases} x = \frac{\pi f}{4},\ f \in \mathbf{Z}, \\ x \neq \frac{\pi l}{2},\ l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Рис. 2.1

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

$$x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbf{Z},$$

$$x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Однако полученное решение можно преобразовать, получив более простое множество решений:

$$x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{12}+\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Действительно,

$$\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\arcsin\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=\arcsin\frac{\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}{2\sqrt{2}}=$$

$$=\arcsin\frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}}=\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=$$

$$=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin 60^\circ-\sin 30^\circ)\right)=$$

Справочный отдел

Замечание 2. Различная форма записи решений может объясняться и различными методами, при помощи которых решалось данное уравнение. В таком случае идентичность полученного и данного ответов можно доказать при помощи тождественных преобразований (см. пример 2.338).

Замечание 3. Очень часто множество решений тригонометрических уравнений записывается при помощи нескольких формул. Иногда их можно объединить и получится более простая запись ответа. Бывает так, что одно и то же множество решений повторяется несколько раз. В таких случаях необходимо в окончательной форме эти записи исключить. Как и в замечании 1, находить возможность объединения множества решений или исключить повторяющиеся помогает окружность, на которой отмечаются кружочками решения, принадлежащие одному множеству решений, а крестиками — не принадлежащие ему (см. пример 2.338).

$$= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{12}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Последнее равенство основано на том, что $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{12} \le \frac{\pi}{2}$.

Пример 2.339. Решить уравнение

$$\sin 2x \operatorname{tg} 3x \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Решение. Из решения совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \operatorname{tg} 3x = 0, \\ \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{array}\right.$$

получим

$$\left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}, & \text{(I)} \\ x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}, & \text{(II)} \\ x = \frac{5\pi}{6} + \pi m,\ m \in \mathbf{Z}. & \text{(III)} \end{array}\right.$$

Изобразим найденные решения на круге, исключая из полученных те, при которых $\operatorname{tg} 3x$ или $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ утрачивают смысл, т.е.

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi f}{3}, \qquad \text{(IV)}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi l. \qquad \text{(V)}$$

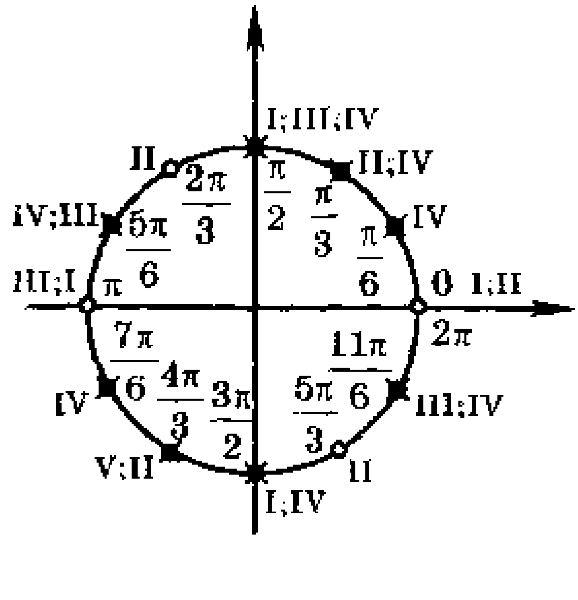


Рис. 2.2

Итак, как следует из рис. 2.1, решением данного уравнения является

$$x = \pi k,\ \ k \in \mathbf{Z} \ \text{ и}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + n\pi,\ \ n \in \mathbf{Z}.$$

Равенство одноименных функций и их использование при решении уравнений

К простейшим уравнениям примыкают уравнения вида $\sin\alpha = \sin\beta$, $\cos\alpha = \cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$, где некоторые или все α и β содержат неизвестное.

Пример 2.340. Решить уравнение $\sin 3x = \cos 2x$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos 2x.$$

Из условия равенства косинусов получим

$$3x - \frac{\pi}{2} \pm 2x = 2\pi k,\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

$$3x - \frac{\pi}{2} + 2x = 2\pi k,\ \ k \in \mathbf{Z},$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbf{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

$$3x - \frac{\pi}{2} - 2x = 2\pi k,\ \ k \in \mathbf{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Объединяя полученные решения, будем иметь

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2\pi k}{5},\ k \in \mathbf{Z}$.

Справочный отдел

Из условия равенства одноименных тригонометрических функций следуют определенные соотношения между их аргументами. Доказать самостоятельно утверждения:

1. Если $\sin\alpha = \sin\beta$, то $\alpha + \beta = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ или $\alpha - \beta = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
2. Если $\cos\alpha = \cos\beta$, то $\alpha \pm \beta = 2\pi l$, $l \in \mathbf{Z}$.
3. Если $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, то $\alpha - \beta = \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$;

   при $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ $\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi f$, $f \in \mathbf{Z}$.
4. Если $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$, то $\alpha - \beta = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;
   при $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ $\beta \neq \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Пример 2.341. Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$.

Решение. Из условия равенства тангенсов имеем

$$3x - x = \pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

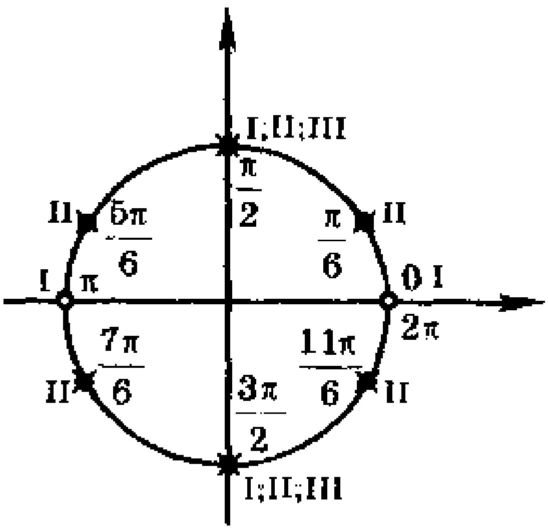


Рис. 2.3

$$\text{при } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi f, \; f \in \mathbf{Z};$$

$$3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Итак,

$$x = \frac{\pi k}{2}, \; k \in \mathbf{Z}, \qquad \text{(I)}$$

$$x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \; n \in \mathbf{Z}, \qquad \text{(II)}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi f, \; f \in \mathbf{Z}$$

(рис. 2.3). (III)

О т в е т: πl, $l \in \mathbf{Z}$.

Решение однородных или сводящихся к ним уравнений

Пример 2.342. Решить уравнение $2\sin 5x + 7\cos 5x = 0$.

Решение. Делим обе части данного уравнения на $\cos 5x$ и получаем равносильное уравнение

$$2 \operatorname{tg} 5x + 7 = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} 5x = -3{,}5,$$

Справочный отдел

Уравнения вида

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \ldots +$$
$$+ a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— действительные числа, называются* ***однородными*** *относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$.

Разделив обе части данного уравнения на $\cos^n x$ (убедившись предварительно, что решения уравнения $\cos x = 0$ не являются решениями исходного уравнения), получим уравнение вида

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + a_2 \operatorname{tg}^{n-2} x + \ldots + a_n = 0.$$

откуда $5x = -\operatorname{arctg} 3{,}5 + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ и

$$x = -\frac{1}{5}\operatorname{arctg} 3{,}5 + \frac{\pi k}{5},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2.343. Решить уравнение

$$\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 7\cos^2 x = 0.$$

Решение. Поскольку $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю, то из условия примера следует, что $\cos x \neq 0$. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x + 7 = 0,$$

которое, в свою очередь, равносильно совокупности уравнений $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{tg} x = 7$, откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathbf{Z};\ \ x = \operatorname{arctg} 7 + \pi n,\ \ n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2.344. Решить уравнение

$$8\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 4.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$8\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

откуда $4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Так как $\cos x \neq 0$, то, разделив на $\cos^2 x$, получим $4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$ и $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$.

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathbf{Z};\ \ x = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + k\pi.$$

Пример 2.345. Решить уравнение

$$2\sin^4 x + 1{,}25\sin^2 2x - \cos^4 x = \cos 2x.$$

Решение. Исходное уравнение можно записать так:

$$2\sin^4 x + 1{,}25 \cdot 4\sin^2 x\cos^2 x - \cos^4 x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

или $2\sin^4 x + 5\sin^2 x\cos^2 x - \cos^4 x = \cos^4 x - \sin^4 x$.

Получили однородное уравнение четвертой степени. Разделив обе части уравнения на $\cos^4 x$ ($\cos x \neq 0$), получим

$$3\operatorname{tg}^4 x + 5\operatorname{tg}^2 x - 2 = 0,$$

откуда $\mathrm{tg}^2 x = -2$ (нет решений),

или $\quad \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{3}$, $\mathrm{tg}\, x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \pm \dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Решение уравнений разложением на множители

Пример 2.346. Решить уравнение

$$2 \sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$2 \sin^2 x (\sin x + \cos x) - \cos^2 x (\sin x + \cos x) = 0,$$

$$(\sin x + \cos x)(2 \sin^2 x - \cos^2 x) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух однородных уравнений

$$\sin x + \cos x = 0 \;\; \text{и} \;\; 2 \sin^2 x - \cos^2 x = 0,$$

решая которые, получим

$$\mathrm{tg}\, x = -1, \;\; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \;\; k \in \mathbf{Z} \;\; \text{или}$$

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{2}, \;\; x = \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n, \;\; n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2.347. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

Решение. Сгруппируем первый член с третьим, второй с четвертым, и каждую группу свернем в произведение. Имеем $(\sin x + \sin 2x) + (\cos x + \cos 2x) = 0$,

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0,$$

$$2 \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2} \right) = 0,$$

$$2 \cos \frac{x}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) + \cos \frac{3x}{2} \right) = 0,$$

$$4 \cos \frac{x}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений:

1) $\cos\frac{x}{2}=0,\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z};$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=0,\ \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z};$

3) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0,\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ x=\frac{3\pi}{4}+\pi l,\ l\in\mathbf{Z}.$

Ответ: $\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z};\ \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z};$

$\frac{3\pi}{4}+\pi l,\ l\in\mathbf{Z}.$

Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

Пример 2.348. Решить уравнение

$$\sin x\sin 2x-\cos 4x\cos 5x=0.$$

Решение. $\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)-\frac{1}{2}(\cos 9x+\cos x)=0,$

$$\cos 3x+\cos 9x=0,\ \ 2\cos 6x\cos 3x=0.$$

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\cos 6x=0,\\ \cos 3x=0,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6},\ k\in\mathbf{Z},\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Получили две совокупности чисел. Проверим, нет ли чисел, которые принадлежат обеим совокупностям одновременно. Для этого решим уравнение

$$\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ \ 1+2k=2+4n,\ \ k,n\in\mathbf{Z}.$$

Полученное уравнение не имеет решений в целых числах, так как его левая часть — нечетное число, а правая — четное.

Ответ: $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6},\ k\in\mathbf{Z};\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}.$

Пример 2.349. Решить уравнение

$$\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x + \sin 2x.$$

Решение. После преобразования произведений тригонометрических функций в суммы получим

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x) + \sin 2x$$

или
$$\frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin 4x + \sin 2x,$$

$$\sin 4x + \sin 2x = 0, \;\; 2\sin 3x \cos x = 0.$$

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0,\\ \cos x = 0,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi k}{3},\; k \in \mathbf{Z},\\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\; n \in \mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Самостоятельно убедитесь в том, что полученные две совокупности не имеют общих чисел.

О т в е т: $\dfrac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$; $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 2.350. Решить уравнение

$$\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} + \sin 2x \cos 7x = 0.$$

Решение. $\dfrac{1}{2}(\sin 5x + \sin 2x) + \dfrac{1}{2}(\sin 3x - \sin 2x) +$

$$+\frac{1}{2}(\sin 9x - \sin 5x) = 0,$$

$$\sin 3x + \sin 9x = 0, \;\; 2\sin 6x \cos 3x = 0.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l}\sin 6x = 0,\\ \cos 3x = 0,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{k\pi}{6},\; k \in \mathbf{Z},\\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\; n \in \mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Совокупность чисел вида $\dfrac{\pi k}{6}$ содержит совокупность чисел вида $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$.

О т в е т: $\dfrac{\pi k}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Решение уравнений с применением формул понижения степени

Пример 2.351. Решить уравнение

$$\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x.$$

Решение. Понижая вторые степени и приводя подобные члены, получим

$$\frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} = \frac{1-\cos 10x}{2} + \frac{1-\cos 12x}{2},$$

$$\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x,$$

$$2\cos 7x \cos x = 2\cos 11x \cos x,$$

$$\cos x\,(\cos 7x - \cos 11x) = 0,$$

$$\cos x \sin 9x \sin 2x = 0,$$

откуда

1) $\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z};$

2) $\sin 2x = 0,\ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z};$

3) $\sin 9x = 0,\ x = \frac{\pi l}{9},\ l \in \mathbf{Z}.$

Множество чисел $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ содержит множество $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Найдем общие числа множеств $x = \frac{\pi n}{2}$ и $x = \frac{\pi l}{9}$.

$$\frac{\pi n}{2} = \frac{\pi l}{9},\quad n = \frac{2l}{9},\quad l = 9r,\quad r \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z};\ \ \frac{\pi l}{9},\ l \in \mathbf{Z};\ l \neq 9r,\ r \in \mathbf{Z}.$

Уравнения, линейные относительно sin$x$ *и* cos$x$

Пример 2.352. Решить уравнение $3\sin x + 4\cos x = 5$.

Решение. I способ. Сводим данное уравнение к однородному относительно $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$.

$$6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 5\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right),$$

$$9\sin^2\frac{x}{2} - 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0,$$

откуда $9\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 6\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0$, $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$,

$$\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi n, \quad x = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Справочный отдел

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$, *где* a, b *и* c *— постоянные коэффициенты, называются* ***линейными относительно*** $\sin x$ *и* $\cos x$.

Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, так как в случаях $a = 0$ или $b = 0$, или $c = 0$ уравнения решаются с помощью методов, рассмотренных выше.

Рассмотрим способы решения данного уравнения.

I способ. Сводим данное уравнение к однородному второй степени относительно $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$, записав его в виде

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = c\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right),$$

откуда $(b + c)\sin^2\frac{x}{2} - 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + (c - b)\cos^2\frac{x}{2} = 0$.

II способ. Если данное уравнение не имеет решения $x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$, то его можно свести к квадратному относительно $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, используя формулы

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

II способ. Используем формулы

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Уравнение примет вид $\frac{6\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{4-4\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 5.$

Обозначим $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, предварительно убедившись, что числа вида $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ не являются корнями исходного уравнения. Имеем $\frac{6z}{1+z^2} + \frac{4-4z^2}{1+z^2} = 5$, откуда

$$9z^2 - 6z + 1 = 0, \quad z = \frac{1}{3}.$$

Тогда $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Справочный отдел

III способ. Данное уравнение можно решить с помощью введения дополнительного аргумента. Разделим обе части уравнения на $a \neq 0$. Получим: $\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$.

Пусть $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Тогда $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$ и уравнение примет вид $\sin x + \operatorname{tg}\varphi\cos x = \frac{c}{a}$, откуда $\sin x\cos\varphi + \sin\varphi\cos x = \frac{c}{a}\cos\varphi$ или $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$.

Если $\left|\frac{c}{a}\cos\varphi\right| \le 1$, то уравнение имеет решение

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin\left(\frac{c}{a}\cos\varphi\right) + k\pi$$

и

$$x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{c}{a}\cos\varphi\right) - \varphi + k\pi, \quad \text{где } k \in \mathbf{Z}.$$

III способ. Запишем уравнение в виде

$$\sin x + \frac{4}{3}\cos x = \frac{5}{3}.$$

Пусть $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Тогда $\frac{4}{3} = \operatorname{tg}\varphi$ и уравнение примет вид

$$\sin x + \operatorname{tg}\varphi\cos x = \frac{5}{3}$$

или $\sin x\cos\varphi + \sin\varphi\cos x = \frac{5}{3}\cos\varphi$, $\sin(x+\varphi) = \frac{5}{3}\cos\varphi$.

Так как

$$\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{3}{5},$$

то $\sin(x+\varphi) = 1$, $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} - \varphi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

$x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ или $x = \operatorname{arcctg}\frac{4}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Еще раз обратим внимание на тот факт, что при решении уравнения разными способами получили два различных на первый взгляд ответа. На самом же деле эти ответы совпадают.

Покажем, что $\operatorname{arcctg}\frac{4}{3} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Ясно, что

$$0 < \operatorname{arcctg}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 < 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}.$$

Кроме того, $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.

1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4}$;

2) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \dfrac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$.

Таким образом, получили следующий ответ:

$$x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi k,\quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{или}$$

$$x = \operatorname{arcctg}\frac{4}{3} + 2\pi n,\quad n \in \mathbf{Z}.$$

Уравнения, симметричные относительно $\sin x$ *и* $\cos x$

Пример 2.353. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

Решение. Пусть $\sin x + \cos x = u$, тогда

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = u^2,$$

откуда $\sin x \cos x = \frac{u^2 - 1}{2}$. Из исходного уравнения получаем $u + \frac{u^2 - 1}{2} = 1$ или $u^2 + 2u - 3 = 0$.

Решая данное уравнение, получим $u_1 = 1$, $u_2 = -3$. Поэтому данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\sin x + \cos x = 1 \quad \text{и} \quad \sin x + \cos x = -3,$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Очевидно, второе из этих уравнений не имеет решений. Решая первое уравнение, получим

$$x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2.254. Решить уравнение

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x + \cos x - 2} = \frac{4 (\sin x + \cos x)}{9 - 3 \sin 2x}.$$

Решение. Заменой $\sin x + \cos x = u$ сводим данное уравнение к рациональному: $\frac{u - 1}{u - 2} = \frac{4u}{9 + 3 (1 - u^2)}$.

Решая полученное уравнение, находим $u_1 = \frac{2}{3}$ и $u_2 = -3$ (не удовлетворяет условию). Итак, данное уравнение равносильно уравнению $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$ или $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, откуда находим

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Уравнения, решаемые заменой аргумента

Пример 2.355. Решить уравнение $\cos x = \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right)$.

Решение. Обозначив $\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3} = y$, найдем $x = \frac{\pi}{2} - 3y$ и перепишем уравнение в виде

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3y\right) = \sin^2 y, \quad \sin 3y = \sin^2 y.$$

Используя формулу $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, получим

$$3\sin y - 4\sin^3 y = \sin^2 y,$$

$$4\sin^3 y + \sin^2 y - 3\sin y = 0,$$

$$\sin y\,(\sin y + 1)(4\sin y - 3) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений $\sin y = 0$, $\sin y = -1$, $\sin y = \frac{3}{4}$, решая которые, находим $y = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi f$, $f \in \mathbf{Z}$; $y = \pm(-1)^k \arcsin\frac{3}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Возвращаясь к подстановке, имеем

$$x = \frac{\pi}{2} - 3\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{2} - 3\cdot(-1)^k \arcsin\frac{3}{4} + 3\pi k,\ k \in \mathbf{Z},$$

$$x = 2\pi - 6\pi f,\ f \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2.356. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Решение. Обозначая $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = y$, перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) = \operatorname{tg}^3 y,$$

или

$$\operatorname{ctg} 2y = \operatorname{tg}^3 y\ (2y \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}).$$

Переходя к функции $\operatorname{tg} y$, получаем биквадратное уравнение $2\operatorname{tg}^4 y + \operatorname{tg}^2 y - 1 = 0$, решая которое, находим $\operatorname{tg} y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $y = \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Возвращаясь к x, получаем

$$x = \frac{\pi}{2} \mp 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k,\quad k \in \mathbf{Z}.$$

Уравнения, решаемые с помощью универсальной подстановки

Пример 2.357. Решить уравнение $\sin 4x + \operatorname{tg} 2x = 2$.

Решение. I способ. Выражая $\sin 4x$ через $\operatorname{tg} 2x$, получаем уравнение $\dfrac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x} + \operatorname{tg} 2x = 2$, равносильное данному, которое после очевидных упрощений приводится к кубическому уравнению относительно $\operatorname{tg} 2x$:

$$\operatorname{tg}^3 2x - 2 \operatorname{tg}^2 2x + 3 \operatorname{tg} 2x - 2 = 0.$$

Левая часть этого уравнения раскладывается на множители: $(\operatorname{tg} 2x - 1)(\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x + 2) = 0$.

Справочный отдел

Все тригонометрические функции аргумента α рационально выражаются через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},\quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},\quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

При использовании универсальной подстановки можно потерять корни уравнения, поскольку может произойти сужение области определения уравнения. Поэтому при решении уравнения этим методом необходимо проверять, являются ли числа $\pi + 2\pi k$ корнями данного уравнения.

Решая уравнение $\operatorname{tg} 2x - 1 = 0$, находим

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Второе уравнение не имеет действительных корней.

Следует заметить, что общий метод рационализации не всегда является приемлемым, а часто приводит к рациональным уравнениям высоких степеней. Только что решенное уравнение можно решать и иначе.

II способ. Запишем уравнение в виде

$$\operatorname{tg} 2x - 1 = 1 - \sin 4x,$$

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x}{\cos 2x} = (\sin 2x - \cos 2x)^2,$$

$$(\sin 2x - \cos 2x)\left(\frac{1}{\cos 2x} - \sin 2x + \cos 2x\right) = 0,$$

и данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: однородного $\sin 2x - \cos 2x = 0$ и сводящегося к однородному: $\dfrac{1}{\cos 2x} - \sin 2x + \cos 2x = 0$.

Упражнения

Решить уравнение:

2.358. *а*) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *д*) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *е*) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\operatorname{tg} x = 1$; *ж*) $\operatorname{tg} x = -1$;

г) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; *з*) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

2.359. *а*) $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$;

б) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$;

в) $\cos^2 x + \cos x - 6 = 0$.

2.360. *а*) $2\cos^2 x = 3\sin x$; *в*) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = 2$

б) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x$;

2.361. *а*) $5\sin^2 x = 2\sin x$;

б) $\sin^3 2x - \sin 2x = 0$;

в) $\sin 2x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$.

2.362. *а*) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 2 = 0$;

б) $1 - \cos x = \operatorname{tg} x - \sin x$;

в) $2 \sin x \operatorname{tg} x - \sin x - 2 \operatorname{tg} x + 1 = 0$.

2.363. *а*) $\sin x - 2 \cos x = 0$;

б) $\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0$;

в) $3 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x = 0$.

2.364. *а*) $\sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x = 0$;

б) $2 \sin^4 2x - 9 \sin^3 2x \cos 2x + 7 \sin^2 2x \cos^2 2x = 0$;

в) $3 \sin^2 x \cos x - 4 \sin x \cos^2 x + \cos^3 x = 0$.

2.365. *а*) $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0$;

б) $8 \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 4$.

2.366. Найдите зависимость между α и β, если

а) $\sin \alpha = \cos \beta$; *в*) $\cos \alpha = -\cos \beta$.

б) $\sin \alpha = -\sin \beta$;

Решить уравнение:

2.367. *а*) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$; *в*) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x = 0$.

б) $\sin 3x = \cos 2x$;

2.368. $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3} (\cos x - \sin 3x)$.

2.369. $7 + 4 \sin x \cos x + 1{,}5 (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$.

2.370. $\dfrac{4 \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} + \sin^2 2x + 1 = 0$.

2.371. $\dfrac{\sin^2 2x - 4 \sin^2 x}{\sin^2 2x + 4 \sin^2 x - 4} + 1 = 2 \operatorname{tg}^2 x$.

2.372. $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x - 4 \sin x = 0$.

2.373. $\cos^{-1} 3x - 6 \cos 3x = 4 \sin 3x$.

2.374. $\operatorname{ctg} x - \sin x = 2 \sin^2 \dfrac{x}{2}$.

2.375. $\sin \left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) \operatorname{ctg} 3x + \sin (\pi + 2x) - \sqrt{2} \cos 5x = 0$.

2.376. $\sin x \cos 2x + \cos x \cos 4x = \sin \left(\dfrac{\pi}{4} + 2x\right) \sin \left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right)$.

2.377. $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.

2.378. $(1 + \cos 4x) \sin 2x = \cos^2 2x$.

2.379. $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$.

2.380. $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x = 0$.

2.381. $1 - \sin 3x = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2$.

2.382. $2 \sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x -$
$- \cos^3 x = 0$.

2.383. $\sin 7x + \sin 9x = 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right)$.

2.384. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$

2.385. $\cos^{-1} x + \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} \frac{3x}{2}$.

2.386. $2 \operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0$.

2.387. $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x$.

2.388. $\sin 2x \sin 6x - \cos 2x \cos 6x =$
$= \sqrt{2} \sin 3x \cos 8x$.

2.389. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$.

2.390. $\sin 3x \cos 3x = \sin 2x$.

2.391. $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$.

2.392. $2\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right) = \cos x$.

2.393. $8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x - \cos x + 1 = 0$.

2.394. $\cos 3x = 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

2.395. $\cos 4x + 2 \sin^2 x = 0$.

2.396. $3 \sin 5z - 2 \cos 5z = 3$.

2.397. $1 - \cos 6x = \operatorname{tg} 3x$.

2.398. $\sin 9x = 2 \sin 3x$.

2.399. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

2.400. $\cos 2x = \sqrt{2} (\cos x - \sin x)$.

2.401. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x.$

2.402. $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\cos 3x$

2.403. $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2.$

2.404. $\cos 7x+\sin 8x=\cos 3x-\sin 2x.$

2.405. $\sin z-\sin^2 z=\cos^2 z-\cos z.$

2.406. $\sin z+\sin 2z+\sin 3z=\cos z+\cos 2z+\cos 3z.$

2.407. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-0{,}5.$

2.408. $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cos 2x.$

2.409. $2\cos 2x+3\,\mathrm{tg}^2 x=5.$

2.410. $\frac{\mathrm{ctg}\,2x}{\mathrm{ctg}\,x}+\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\mathrm{ctg}\,2x}+2=0.$

2.411. $\mathrm{tg}\,3x+\mathrm{tg}\,x=2\sin 4x$

2.412. $\cos 9x-2\cos 6x=9.$

2.413. $\sin 2x+2\,\mathrm{ctg}\,x=3.$

2.414. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}.$

2.415. $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,50^\circ+\mathrm{tg}\,70^\circ=\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,50^\circ\,\mathrm{tg}\,70^\circ.$

2.416. $\cos x-\sin x=4\cos x\sin^2 x.$

2.417. $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}+2\cdot\frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x}-3=0.$

2.418. $\frac{1-\sin^6 x-\cos^6 x}{1-\sin^4 x-\cos^4 x}=2\cos^2 3x$

2.419. $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-\sin 4x=0.$

2.420. $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=\cos 2x.$

2.421. $\mathrm{tg}\,z\,\mathrm{tg}\,2z=\mathrm{tg}\,z+\mathrm{tg}\,2z.$

2.422. $\sin 2z-\sin 6z+2=0$

2.423. $\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{2\cos x-\sin z}=\cos 2x.$

2.424. $4\cos x=\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x+1.$