МАТЕМАТИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

В ПОМОЩЬ ПОВТОРЯЮЩИМ МАТЕМАТИКУ ПО СПРАВОЧНИКАМ

Тема 12. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Содержание

Решение показательных уравнений

Простейшим показательным уравнением *является уравнение вида* $a^x = b$, *где* $a > 0$ *и* $a \neq 0$. Очевидно, что при $b < 0$ это уравнение корней не имеет (в области действительных чисел), поскольку $a^x > 0$ для всех действительных значений x.

а) Решением уравнения вида $a^{f(x)} = 1$ (по определению степени с нулевым показателем) будет $f(x) = 0$.

Пример 1.760. Решить уравнение $5^{4\sqrt{x-3}-x} = 1$.

Решение. По определению степени с нулевым показателем имеем: $4\sqrt{x-3} - x = 0$, то есть $4\sqrt{x-3} = x$, откуда

$$x^2 - 16x + 48 = 0.$$

Решая полученное уравнение, получим $x_1 = 4$, $x_2 = 12$.

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = 12$.

б) Решением уравнения вида $a^x = a^n$ является $x = n$.

Очевидно, что уравнение $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$.

Пример 1.761. Решить уравнение

$$32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$2^{5 \cdot \frac{x+5}{x-7}} = 2^{7 \cdot \frac{x+17}{x-3} - 2}$$

Тогда уравнение $\dfrac{5x+25}{x-7} = \dfrac{7x+119}{x-3} - 2$ равносильно данному.

Решая полученное уравнение, находим $x = 10$.

Ответ: 10.

в) Если левая и правая части уравнения вида $a^x = b$ не сводятся к одному основанию, то из равенства $x^x = b$ по определению логарифма следует $x = \log_a b$.

Пример 1.762. Решить уравнение $3^{2x-1} = 5^{3-x}$.

Решение. Прологарифмировав обе части уравнения, получим: $\lg 3^{2x-1} = \lg 5^{3-x}$,

$$(2x-1)\lg 3 = (3-x)\lg 5,$$

$$2x\lg 3 + x\lg 5 = 3\lg 5 + \lg 3,$$

$$x(2\lg 3 + \lg 5) = 3\lg 5 + \lg 3,$$

откуда $x = \dfrac{3\lg 5 + \lg 3}{2\lg 3 + \lg 5}$.

О т в е т: $\dfrac{3\lg 5 + \lg 3}{2\lg 3 + \lg 5}$.

Пример 1.763. Решить уравнение $3^{x-3} = 5^{x^2-7x+12}$.

Решение. Переходим к равносильному уравнению

$$x - 3 = (x^2 - 7x + 12)\log_3 5$$

или $$x - 3 = (x-3)(x-4)\log_3 5,$$

откуда или $x = 3$ или $(x-4)\log_3 5 = 1$.

Отсюда $x = 4 + \dfrac{1}{\log_3 5} = 4 + \log_5 3$.

О т в е т: 3, $4 + \log_5 3$.

г) У р а в н е н и я   в и д а

$$A_0 a^{mx+k_0} + A_1 a^{mx+k_1} + \dots A_n a^{mx+k_n} = M,$$

где M, $A_0, A_1, \dots, A_n$, a, m и $k_0, k_1, \dots, k_n$ — постоянные величины, решаются вынесением за скобки общего множителя a^{mx+k_i}, где k_i — наименьшее из чисел $k_0, k_1, \dots, k_n$.

Пример 1.764. Решить уравнение

$$2^{3\sqrt{x}} + 3 \cdot 2^{3\sqrt{x} - 1} = 20.$$

Решение. $2^{3\sqrt{x} - 1}(2 + 3) = 20$, $2^{3\sqrt{x} - 1} = 4$,

$$2^{3\sqrt{x} - 1} = 2^2, \quad 3\sqrt{x} - 1 = 2.$$

Отсюда $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 1.765. Решить уравнение

$$3^{2x - 5} + 3^{2x - 7} + 3^{2x - 9} = 45\frac{1}{2} + 22\frac{3}{4} + 11\frac{3}{8} + \cdots.$$

Решение. Правая часть уравнения является бесконечно убывающей геометрической прогрессией;

$$q = 22\frac{3}{4} : 45\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{45\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 91.$$

Поэтому данное уравнение принимает вид

$$3^{2x - 9}(3^4 + 3^2 + 1) = 91, \quad 3^{2x - 9} \cdot 91 = 91, \quad 3^{2x - 9} = 1,$$

откуда $x = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

Пример 1.766. Решить уравнение

$$4^{2x} - 3^{2x - \frac{1}{2}} = 3^{2x + \frac{1}{2}} - 2^{4x - 1}.$$

Решение. $2^{4x} + 2^{4x - 1} = 3^{2x + \frac{1}{2}} + 3^{2x - \frac{1}{2}}$,

$$2^{4x - 1}(2 + 1) = 3^{2x - \frac{1}{2}}(3 + 1), \quad 2^{4x - 1} \cdot 3 = 3^{2x - \frac{1}{2}} \cdot 2^2.$$

Разделив обе части уравнения на 12, имеем

$$2^{4x - 3} = 3^{2x - \frac{3}{2}}, \quad 4^{2x - \frac{3}{2}} = 3^{2x - \frac{3}{2}}, \quad \left(\frac{4}{3}\right)^{2x - \frac{3}{2}} = 1. \quad \text{Отсюда}$$

$$2x - \frac{3}{2} = 0, \quad x = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

д) Уравнения вида

$$A_0\, a^{2f(x)} + A_1\, a^{f(x)} + A_2 = 0$$

часто называют трехчленными показательными уравнениями.

Уравнение при помощи подстановки $a^{f(x)} = y$ сводится к квадратному уравнению

$$A_0\, y^2 + A_1 y + A_2 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем корни y_1 и y_2. После этого решение исходного уравнения сводится к решению таких двух уравнений:

$$a^{f(x)} = y_1 \quad \text{и} \quad a^{f(x)} = y_2.$$

Пример 1.767. Решить уравнение

$$9^{\sqrt{x^2 - 2x} - x} - 7 \cdot 3^{\sqrt{x^2 - 2x} - x - 1} = 2.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$3^{2(\sqrt{x^2 - 2x} - x)} - \frac{7}{3} \cdot 3^{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = 2$$

и обозначим

$$3^{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = y, \quad y > 0.$$

Получим уравнение $3y^2 - 7y - 6 = 0$, имеющее корни $y_1 = 3$ и $y_2 = -\dfrac{2}{3}$.

Второй корень не удовлетворяет заданному условию $y > 0$. Таким образом, исходное уравнение в области допустимых значений неизвестного равносильно уравнению $3^{\sqrt{x^2 - 2x} - x} = 3^1$, а последнее уравнение равносильно иррациональному уравнению

$$\sqrt{x^2 - 2x} = x + 1.$$

Возведя обе части равенства в квадрат, найдем $x = -0{,}25$. Поскольку при возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние корни, проверка необходима именно на этом этапе. Подстановка найденного x в иррациональное уравнение показывает, что значение $x = -0{,}25$ удовлетворяет ему, а значит, и исходному уравнению.

Ответ: $-0{,}25$.

е) Уравнение вида

$$A_0 a^x + A_1 a^{\frac{x}{2}} b^{\frac{x}{2}} + A_2 b^x = 0$$

легко сводится к предыдущим уравнениям делением обеих частей уравнения на $b^x \neq 0$. Тогда получим

$$A_0 \left(\frac{a}{b}\right)^x + A_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} + A_2 = 0.$$

Обозначив $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y$, имеем

$$A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0.$$

Решив уравнение, найдем y_1 и y_2, после чего возвращаемся к подстановке:

а) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y_1$, *б)* $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{x}{2}} = y_2$.

Пример 1.768. Решить уравнение

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

Решение. Поскольку $81^x \neq 0$, то данное уравнение равносильно уравнению

$$3\left(\frac{16}{81}\right)^x + 2 = 5\left(\frac{36}{81}\right)^x, \text{ или } 3\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + 2 = 5\left(\frac{4}{9}\right)^x.$$

Положив $\left(\frac{4}{9}\right)^x = y$, приходим к квадратному уравнению

$$3y^2 - 5y + 2 = 0.$$

Его корни $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{2}{3}$. Решая уравнения $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1$ и $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$, получим в первом случае $x = 0$, а во втором $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$, то есть $2x = 1$, или $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: 0, $\frac{1}{2}$.

Пример 1.769. Решить уравнение

$$3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}$$

Решение. Обозначим $x^2 + 3x - 5 = y$, после чего уравнение запишем так:

$$3^{2y+1} + 4 \cdot 15^y = 3 \cdot 5^{2y+1}, \text{ или}$$

$$3 \cdot 3^{2y} + 4 \cdot 15^y = 15 \cdot 5^{2y}.$$

Разделив левую и праву части на 5^{2y}, приходим к уравнению

$$3\left(\frac{3}{5}\right)^{2y} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{y} - 15 = 0.$$

Решая это уравнение, получаем $\left(\frac{3}{5}\right)^{y} = \frac{5}{3}$, откуда $y = -1$.

Второе уравнение $\left(\frac{3}{5}\right)^{x} = -3$ решений не имеет, поскольку $\left(\frac{3}{5}\right)^{x} > 0$ при всех допустимых значениях x.

Возвращаясь к подстановке, решаем квадратное уравнение $x^2 + 3x - 5 = -1$.

Ответ: 1, – 4.

Рассмотрим задачи, которые решаются при помощи свойства монотонности показательной функции.

Пример 1.770. Решить уравнение

$$3 \cdot 4^x + (3x - 10) \cdot 2^x + 3 - x = 0.$$

Решение. Это уравнение не принадлежит ни одному из рассмотренных типов. Сделаем замену $2^x = y$. Уравнение примет вид

$$3y^2 + (3x - 10)\,y + 3 - x = 0.$$

Решим полученное уравнение как квадратное относительно y. Имеем:

$$y = \frac{-3x + 10 \pm \sqrt{(3x-10)^2 - 12(3-x)}}{6} =$$

$$= \frac{-3x + 10 \pm \sqrt{9x^2 - 48x + 64}}{6} = \frac{-3x + 10 \pm (3x - 8)}{6},$$

откуда или $y = 3 - x$, или $y = \frac{1}{3}$.

Уравнение $2^x = \frac{1}{3}$ имеет корень $x = -\log_2 3$.

Теперь решим уравнение $2^x = 3 - x$. Легко найти корень $x = 1$. Докажем, что других корней у этого уравнения нет. Действительно, при $x = 1$ левая часть уравнения равна правой. Левая часть — возрастающая функция, а правая — убывающая. Поэтому при $x < 1$ левая часть будет меньше правой, а при $x > 1$ наоборот.

Ответ: $1, -\log_2 3$.

Пример 1.771. Решить уравнение $6^x - 2^x = 32$.

Решение. Легко заметить, что уравнение удовлетворяет значение $x = 2$. Докажем, что других корней нет. Для этого запишем уравнение так:

$$3^x - 1 = \frac{32}{2^x}.$$

Правая часть является убывающей функцией, левая — возрастающей. Таким образом, $x = 2$ — единственный корень этого уравнения.

Ответ: 2.

Упражнения

Решить уравнение:

1.772. $8^x = 32$.

1.773. $49^x = \frac{1}{7}$.

1.774. $\sqrt[4]{a^{x+1}} = \sqrt[3]{a^{x-2}}$.

1.775. $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^x = 128$.

1.776. $1000\sqrt[3]{(0{,}1)^{\frac{3}{x}}} = 100^x$.

1.777. $\dfrac{(0,2)^{x+0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{x}.$

1.778. $\dfrac{1}{9} \cdot \sqrt{27^{\frac{2x+1}{x}}} = \sqrt{9^{2x-1}}.$

1.779. $2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2^{2x-1} = 512.$

1.780. $3 \cdot 16^{x^2 - 16x - 15\frac{3}{4}} = 48 + 24 + 12 + \ldots .$

1.781. $8^{x-3} = 9^{x-3}.$

1.782. $11^{x-7} = 17^{7-x}.$

1.783. $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x+1}.$

1.784. $3^{x+2} - 3^x = 72.$

1.785. $2^x - 2^{x-4} = 15.$

1.786. $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0.$

1.787. $5^{x-3} - 5^{x-4} - 16 \cdot 5^{x-5} = 2^{x-3}.$

1.788. $2^x = 5.$

1.789. $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0.$

1.790. $4^x + 2^{x+1} = 80.$

1.791. $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16.$

1.792. $4^x + 6^x = 9^x.$

1.793. $3^x + 4^x = 5^x.$

1.794. $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x.$

1.795. $(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x = 4.$

1.796. $(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x = 2^x.$

1.797. $\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x \cdot 0,125^{1/x}}} = 4 \sqrt[3]{2}.$

1.798. $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \, (10^{x-1})^3.$

1.799. $10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4,25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}.$

1.800. $(\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} = 84.$

1.801. $\dfrac{2^x + 10}{4} = \dfrac{9}{2^{x-2}}.$

1.802. $5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} = 0.$

1.803. $5^{x-1} + 5 \cdot 0{,}2^{x-2} = 26.$

1.804. $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x + (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = 14.$

1.805. $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24.$

1.806. $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0.$

1.807. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$

59. $\left(\frac{1}{64^2}\right)^{-x} = \sqrt{\frac{1}{8}}.$

60. $5^{\sqrt[x]{2}} = 625.$

61. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}.$

62. $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}.$

63. $6^{|x|} = 36.$

64. $7^{1-|x|} = 49.$

65. $3^x \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x.$

66. $2^x \cdot 5^x = 0{,}1\,(10^{x-1})^5.$

67. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \sqrt[x]{\frac{4}{3}} = \frac{9}{16}.$

68. $x^{x^2-5x+6} = 1.$

80. $3^x - 3^{x-2} = 8.$

81. $2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443.$

82. $5^{x-1} + 2^x - 5^x + 2^{x+2} = 0.$

83. $10^x + 10^{x-1} = 0{,}11.$

84. $10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950.$

102. $7^{2x} - 6\cdot 7^x + 5 = 0$.

103. $4^x - 9\cdot 2^x + 8 = 0$.

104. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.

Решение показательно-степенных уравнений

Прежде всего заметим, что поскольку функция не показательная, а ***показательно-степенная****, которая имеет вид* $y = u(x)^{v(x)}$, *то ее область определения находим, рассматривая три случая:*

1. $u(x) > 0$, $v(x)$ — *произвольное число;*
2. $u(x) < 0$, $v(x)$ — *целое число;*
3. $u(x) = 0$, $v(x)$ — *целое положительное число.*

Тогда можно сказать, что -1 является корнем уравнения $x^{2x} = 1$, но не является корнем уравнения $x^{\frac{2x}{3}} = 1$, поскольку выражение $(-1)^{-\frac{2}{3}}$ не определено, то есть не имеет смысла. Число -8 не является корнем уравнения $x^{\frac{x}{3}} = x^{-\frac{8}{3}}$, поскольку выражение $(-8)^{-\frac{8}{3}}$ также не имеет смысла.

Числа 0 и $-\frac{1}{2}$ являются корнями уравнения $x^{2x+5} = x^4$.

Число 0 не является корнем уравнения $x^{x+\frac{5}{2}} = x^2$, поскольку выражение $0^{\frac{5}{2}}$ не имеет смысла.

Число $-\frac{1}{2}$ является корнем этого уравнения.

Числа 0 и $-\frac{1}{2}$ не являются корнями уравнения $x^{\frac{2x+5}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$. В соответствии с этим делаем вывод, что решение уравнений вида $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^m$ сводится к таким случаям:

1. $f(x) = 1$,

2. $f(x) = -1$,
3. $f(x) = 0$,
4. $\varphi(x) = m$.

Проверка корней, найденных в 2, 3 и 4 случаях, обязательна.

Пример 1.808. Решить уравнение

$$(x+5)^{x^2-x-1} = x+5.$$

Решение. Рассмотрим случаи:

1. $x+5=1$, $x_1 = -4$.
2. $x+5=-1$, $x_2 = -6$.
3. $x+5=0$, $x_3 = -5$.
4. $x^2 - x - 1 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = -1$.

Проверкой убеждаемся, что все найденные корни удовлетворяют уравнению.

Ответ: $-4, -6, -5, 2, -1$.

Пример 1.809. Решить уравнение

$$(x+4)^{x^2+9x+8} = 1.$$

Решение. Рассмотрим случаи:

1. $x+4=1$, $x_1 = -3$.
2. $x+4=-1$, $x_2 = -5$.
3. $x^2+9x+8=0$, $x_3 = -8$, $x_4 = -1$.

Проверкой убеждаемся, что все найденные корни удовлетворяют уравнению.

Ответ: $-3, -5, -8, -1$.

Пример 1.810. Решить уравнение

$$x^{\frac{4}{5}} - 7x^{-\frac{2}{5}} + 6x^{-1} = 0.$$

Решение. Заметим, что это уравнение не является показательно-степенным, но поскольку у него дробные показатели степени, то будем считать, что x принимает только положительные значения.

Запишем уравнение в виде

$$x^{\frac{9}{5}} - 7x^{\frac{3}{5}} + 6 = 0.$$

Обозначив $x^{\frac{3}{5}} = y$, получим $y^3 - 7y + 6 = 0$ или $(y-1)(y^2 + y - 6) = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = -3$.

Однако $x^{\frac{3}{5}} > 0$, поэтому $y_3 = -3$ не удовлетворяет уравнению. Возвращаясь к подстановке, получим $x^{\frac{3}{5}} = 1$, откуда $x_1 = 1$. $x^{\frac{3}{5}} = 2$, откуда $x_2 = 2\sqrt[3]{4}$.

Ответ: $1, 2\sqrt[3]{4}$.

Упражнения

Решить уравнения:

1.811. $(x+2)^{x^2 - 5x + 6} = (x+2)^2$.

1.812. $(x-7)^{x^2 - 9x + 8} = 1$.

1.813. $x^x = 1$.

1.814. $x^x = x$.

1.815. $x^{x^2 - 2x} = 1$.

1.816. $(x-3)^{x^2 - x} = (x-3)^2$.

1.817. $(x^2 - x - 1)^{x^2 - x} = 1$.

Решение логарифмических уравнений

***Логарифмическими** называются уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма или в основании логарифма (или то и другое одновременно).*

Простейшими логарифмическими уравнениями являются уравнения вида

$$\log_a x = b \quad \text{и} \quad \log_x m = n.$$

При решении логарифмических уравнений используются определения логарифма и его свойства, действия логарифмирования и потенцирования, различные логарифмические тождества.

Рассмотрим пример, когда в соотношении $a^x = N$, $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, требуется найти x.

Определение. ***Логарифмом*** *числа N по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число N.*

Логарифм обозначается через $\log_a N$.

Таким образом, *выражения*

$$\log_a N = x \quad \text{и} \quad a^x = N$$

имеют одинаковый смысл.

По определению, основание логарифма a всегда положительно и отлично от единицы. Логарифмируемое число N — положительно.

Из определения логарифма следует основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b.$$

Рассмотрим некоторые свойства логарифмов.

1. Если логарифмируемое число и основание логарифма равны между собой, то логарифм равен единице. Справедливо и обратное утверждение: если логарифм равен единице, то число и основание логарифма равны между собой:

$$\log_a a = 1.$$

2. Логарифм единицы по любому основанию $a \neq 1$ и $a > 0$ равен нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

Справедливо и обратное утверждение.

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ монотонна на всей области определения. Она возрастает, когда $a > 1$, и убывает, когда $0 < a < 1$.

4. Из равенства $\log_a x_1 = \log_a x_2$ согласно свойствам монотонной логарифмической функции, следует, что $x_1 = x_2$.

5. Логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов по тому же основанию, то есть

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Заметим, что условие $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ существенно, поскольку логарифм произведения двух отрицательных чисел $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ имеет смысл, но

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|.$$

6. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя по тому же основанию, то есть

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

Аналогично свойству 5, если $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, то

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|.$$

7. Логарифм степени произвольного положительного числа равен логарифму этого числа, умноженному на показатель степени:

$\log_a x^n = n \log_a x$, n — любое действительное число.

Следствие. Логарифм корня из положительного числа равен логарифму подкоренного выражения, разделенного на показатель корня.

$\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \log_a N$, n — натуральное число.

*Нахождение логарифмов заданных чисел или выражений называется операцией **логарифмирования**.*

Пример 1.818. Прологарифмировать по основанию a:

$$\sqrt[5]{\frac{a^3 (a+b)}{cd^2}} \quad (a > 0, \ b > 0, \ c > 0, \ d > 0).$$

Решение. Запишем данное выражение в виде

$$\sqrt[5]{\frac{a^3 (a+b)}{cd^2}} = \frac{a^{\frac{3}{5}} (a+b)^{\frac{1}{5}}}{c^{\frac{1}{5}} \cdot d^{\frac{2}{5}}}.$$

Согласно свойствам 5—7 имеем:

$$\log_n \sqrt[5]{\frac{a^3 (a+b)}{cd^2}} = \frac{3}{5} \log_n a + \frac{1}{5} \cdot \log_n (a+b) - \\ - \frac{1}{5} \log_n c - \frac{2}{5} \log_n d.$$

*Действие, обратное логарифмированию, называется **потенцированием**.*

При потенцировании нужно пользоваться правилами, обратными правилам логарифмирования: сумму логарифмов заменить логарифмом произведения, разность логарифмов — логарифмом частного.

Пример 1.819. Найти N, если

$$\log_a N = \frac{2}{7}\log_a b - 2\log_a c.$$

Решение. По правилам потенцирования запишем:

$$\log_a N = \log_a b^{\frac{2}{7}} - \log_a c^2, \quad \log_a N = \log_a \frac{b^{\frac{2}{7}}}{c^2}.$$

Отсюда $N = \dfrac{b^{\frac{2}{7}}}{c^2} = \dfrac{\sqrt[7]{b^2}}{c^2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt[7]{b^2}}{c^2}$.

Общее правило перехода от логарифмов по основанию a к логарифмам по другому основанию c имеет вид:

$$\log_a N = \frac{\log_c N}{\log_c a}.$$

Коэффициент $\dfrac{1}{\log_c a}$ в этой формуле называют *модулем перехода* от логарифма c по основанию a к логарифму по основанию c.

Используя данную формулу, легко доказать формулы

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad \log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b, \quad \log_{a^n} b^n = \log_a b,$$

$$\log_{a^n} b^k = \frac{k}{n}\log_a b.$$

При решении примеров иногда используется тождество $a^{\log_m b} = b^{\log_m a}$, которое предлагаем доказать самостоятельно.

Уравнения, решаемые при помощи определения логарифма

Пример 1.820. Решить уравнение

$$\log_3(5 + 4\log_3(x-1)) = 2.$$

Решение. По определению логарифма

$$5 + 4\log_3(x-1) = 3^2,$$

или $$4\log_3(x-1) = 9 - 5,\ \log_3(x-1) = 1.$$

По определению логарифма будем иметь $x - 1 = 3$, $x = 4$. Проверкой убеждаемся в правильности решения.

Ответ: 4.

Пример 1.821. Решить уравнение

$$\log_4(2\log_3(1 + \log_2(1 + 3\log_3 x))) = \frac{1}{2}.$$

Решение. По определению логарифма

$$2\log_3(1 + \log_2(1 + 3\log_3 x)) = 2,$$

$$\log_3(1 + \log_2(1 + 3\log_3 x)) = 1.$$

Применяем еще раз определение логарифма:

$$1 + \log_2(1 + 3\log_3 x) = 3,\ \ \log_2(1 + 3\log_3 x) = 2.$$

Отсюда, по определению логарифма,

$$1 + 3\log_3 x = 4,$$

$$3\log_3 x = 3,\ \ \log_3 x = 1.$$

Ответ: 3.

Пример 1.822. Решить уравнение

$$\log_3(4\cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1.$$

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$4\cdot 3^{x-1} - 1 = 3^{2x-1}.$$

Сделаем подстановку $3^x = y$ и получим квадратное уравнение

$$y^2 - 4y + 3 = 0.$$

Решая его, получим $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Возвращаясь к подстановке, имеем $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Ответ: 0, 1.

Логарифмические уравнения, решаемые потенцированием

Пример 1.823. Решить уравнение

$$\lg (x + 10) + \frac{1}{2} \lg x^2 = 2 - \lg 4.$$

Решение. Находим область допустимых значений: $x > -10$, $x \neq 0$. Уравнение принимает вид

$$\lg (x + 10) + \lg |x| + \lg 4 = 2,$$

откуда

$$\lg (4 |x| (x + 10)) = \lg 100,$$

а данное уравнение равносильно такому:

$$4 |x| (x + 10) = 100.$$

Рассматривая два случая и решая соответствующие уравнения, имеем:

а) $x > 0$, $x^2 + 10x - 25 = 0$, $x = -5 + 5\sqrt{2}$.

б) $-10 < x < 0$, $x^2 + 10x + 25 = 0$, $x = -5$.

О т в е т: $-5 + 5\sqrt{2}$, -5.

Пример 1.824. Решить уравнение

$$2 - x + 3 \log_5 2 = \log_5 (3^x - 5^{2-x}).$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$(2 - x) \log_5 5 + \log_5 2^3 = \log_5 (3^x - 5^{2-x}),$$

$$\log_5 (8 \cdot 5^{2-x}) = \log_5 (3^x - 5^{2-x}).$$

Данное уравнение равносильно уравнению

$$8 \cdot 5^{2-x} = 3^x - 5^{2-x},$$

$$9 \cdot 5^{2-x} = 3^x.$$

Разделив обе части уравнения на 3^x, получим

$$3^{2-x} \cdot 5^{2-x} = 1, \quad 15^{2-x} = 1,$$

откуда $x = 2$. Проверка показывает, что $x = 2$ удовлетворяет уравнению.

О т в е т: 2.

Уравнения второй и выше степеней относительно логарифма

Пример 1.825. Решить уравнение

$$\lg_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 = \lg_x^2\sqrt{5}.$$

Решение. $\lg_x 5^{\frac{3}{2}} - 1{,}25 = \frac{1}{4}\lg_x^2 5,\ x > 0,\ x \neq 1,$

$$\frac{3}{2}\lg_x 5 - 1{,}25 = \frac{1}{4}\lg_x^2 5,$$

$$\lg_x^2 5 - 6\lg_x 5 + 5 = 0,\ \ \lg_x 5 = 3 \pm 2.$$

а) $\lg_x 5 = 1,\ x_1 = 5.$

б) $\lg_x 5 = 5,\ x^5 = 5,\ x_2 = \sqrt[5]{5}.$

О т в е т: $5,\ \sqrt[5]{5}.$

Уравнения, содержащие неизвестное и в основании, и в показателе степени

Пример 1.826. Решить уравнение

$$x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - 4{,}5} = 10^{-2\lg x}.$$

Решение. Область допустимых значений $x > 0$. На этом множестве исходное уравнение равносильно уравнению $\lg x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - 4{,}5} = \lg 10^{-2\lg x}$, или

$$(\lg^2 x^2 - 3\lg x - 4{,}5)\lg x = -2\lg x,$$

$$(4\lg^2 x - 3\lg x - 4{,}5)\lg x + 2\lg x = 0,$$

$$\lg x\,(8\lg^2 x - 6\lg x - 5) = 0.$$

Решая это уравнение, имеем $\lg x = 0$, $\lg x = \frac{5}{4}$, $\lg x = -\frac{1}{2}$.

Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 10^{\frac{5}{4}}$, $x_3 = 10^{-\frac{1}{2}}$.

О т в е т: $1,\ \ 10\sqrt[4]{10},\ \ \frac{\sqrt{10}}{10}.$

Применение основного логарифмического тождества

Пример 1.827. Решить уравнение

$$\log_2 (9 - 2^x) = 10^{\lg (3 - x)}.$$

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} 9 - 2^x > 0, \\ 3 - x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x < 9, \\ x < 3, \end{cases}$$

откуда $x < 3$.

Применив к правой части уравнения основное логарифмическое тождество, будем иметь

$$\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x.$$

По определению логарифма

$$2^{3 - x} = 9 - 2^x, \quad \frac{8}{2^x} = 9 - 2^x \quad \text{или} \quad 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0,$$

откуда $2^x = 1$ и $2^x = 8$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Ответ: 0; 3.

Пример 1.828. Решить уравнение

$$9^{\log_3 (1 - 2x)} = 5x^2 - 5.$$

Решение. Уравнение имеет смысл при $x < 0{,}5$. Преобразуем левую часть уравнения, учитывая основное логарифмическое тождество и свойство степеней:

$$3^{2 \log_3 (1 - 2x)} = 5x^2 - 5,$$

$$3^{\log_3 (1 - 2x)^2} = 5x^2 - 5,$$

$$(1 - 2x)^2 = 5x^2 - 5.$$

Полученное уравнение является следствием и оно не равносильно исходному уравнению. Проверкой убеждаемся в том, что первый его корень $x_1 = -2 - \sqrt{10}$ удовлетворяет исходному уравнению, а посторонний корень $x_2 = -2 + \sqrt{10}$ появляется вследствие расширения ОДЗ. Это произошло при замене выражения $9^{\log_3 (1 - 2x)}$, которое имеет смысл при $x < 0{,}5$, выражением $(1 - 2x)^2$, определенным при произвольном значении аргумента.

Ответ: $-2 - \sqrt{10}$.

Пример 1.829. Решить уравнение

$$6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12.$$

Решение. ОДЗ уравнения: $x > 0$ и $x \neq 1$. Считая, что x принадлежит этой области, проведем такие преобразования: $(6^{\log_6 x})^{\log_6 x} + x^{\log_6 x} = 12$,

$$x^{\log_6 x} + x^{\log_6 x} = 12,$$

$$x^{\log_6 x} = 6,$$

$$\log_6 x^{\log_6 x} = \log_6 6,$$

$$\log_6^2 x = 1,$$

$$\log_6 x = \pm 1,$$

откуда $x_1 = \dfrac{1}{6}$ и $x_2 = 6$.

Оба значения x входят в ОДЗ. Проверкой убеждаемся, что $x_1 = \dfrac{1}{6}$ и $x_2 = 6$ удовлетворяют уравнению.

Ответ: $\dfrac{1}{6}$, 6.

Логарифмические уравнения, решаемые при помощи перехода к другому основанию логарифма

Пример 1.830. Решить уравнение

$$\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5.$$

Решение. Приведем каждое слагаемое левой части уравнения к логарифмам с основанием 2:

$$\log_{2^2} x + \log_{2^{-4}} x + \log_{2^3} x^3 = 5,$$

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \frac{1}{4}\log_2 x + \log_2 x = 5,$$

откуда $\dfrac{5}{4}\log_2 x = 5$, $\log_2 x = 4$, $x = 16$.

Ответ: 16.

Пример 1.831. Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1.$$

Решение. Приведем логарифм левой части уравнения к логарифму по основанию 2:

$$-\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+2\log_2(7-x)=1,$$

отсюда

$$2\log_2(7-x)=1+\log_2(x-1)+\log_2(x+1).$$

Тогда $(7-x)^2=2(x^2-1)$ или $x^2+14x-51=0$. Корни этого уравнения $x_1=3$, $x_2=-17$.

Подставляя в исходное уравнение найденные значения неизвестного, убеждаемся, что $x_1=3$ — его корень; второе значение ($x_2=-17$) не удовлетворяет данному уравнению.

Ответ: 3.

Пример 1.832. Решить уравнение $\log_{2x}x+\log_{8x^2}x=0$.

Решение. Переходя к логарифмам с основанием 2, имеем: $\dfrac{\log_2 x}{\log_2 2x}+\dfrac{\log_2 x}{\log_2 8x^2}=0$,

$$\frac{\log_2 x}{1+\log_2 x}+\frac{\log_2 x}{3+2\log_2 x}=0.$$

Обозначим $\log_2 x=y$. Уравнение примет вид

$$\frac{y}{1+y}+\frac{y}{3+2y}=0.$$

Решая это уравнение, находим $y_1=0$, $y_2=-\dfrac{4}{3}$.

Возвращаясь к подстановке, получаем

$$x_1=1,\quad x_2=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}.$$

Ответ: 1, $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$.

Применение свойств монотонности при решении логарифмических уравнений

Пример 1.833. Решить уравнение $\log_5(x+3)=3-x$.

Решение. Легко проверить, что $x=2$ является корнем данного уравнения, поскольку функция $y=\log_5(x+3)$

возрастает на всей своей области определения, а функция $y = 3 - x$ убывает. Таким образом, данное уравнение не имеет других корней.

Ответ: 2.

Пример 1.834. Решить уравнение

$$(x + 1) \log_3^2 x + 4x \log_3 x - 16 = 0.$$

Решение. Обозначим $\log_3 x = y$. Уравнение примет вид $(x + 1) y^2 + 4xy - 16 = 0$.

Решая данное уравнение как квадратное относительно y, найдем $y_1 = \frac{4}{x + 1}$, $y_2 = -4$. Возвращаясь к подстановке, получаем два уравнения:

$$\log_3 x = \frac{4}{x + 1} \text{ и } \log_3 x = -4.$$

Второе уравнение легко решается. Для решения первого уравнения достаточно заметить, что $x = 3$ удовлетворяет уравнению, и функция, находящаяся в левой части, возрастает при $x > 0$, а функция, находящаяся в правой части — убывает.

Ответ: 3, $\frac{1}{81}$.

Решение нестандартных уравнений, содержащих логарифмы

Пример 1.835. Решить уравнение

$$-3x^2 + 6x - 2 = \log_2 (x^2 + 1) - \log_2 x.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения $x > 0$. Запишем уравнение в виде

$$1 - 3(x - 1)^2 = \log_2 \left(x + \frac{1}{x}\right).$$

С одной стороны $1 - 3(x - 1)^2 \le 1$, а с другой — $\left(x + \frac{1}{x}\right) \ge 2$ как сумма взаимнообратных положительных величин. Тогда

$$\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ge 1,$$

поэтому и левая, и правая части исходного уравнения могут быть равны между собой только в том случае, когда каждая из них равна 1.

Другими словами, должна быть справедливой такая система двух уравнений с одним неизвестным:

$$\begin{cases} 1-3\,(x-1)^2=1, \\ \log_2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственный корень $x=1$. Этот корень удовлетворяет и второму уравнению, то есть является единственным решением системы, а вместе с ней и исходного уравнения.

Ответ: 1.

Пример 1.836. Решить уравнение

$$\frac{2}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\right)=1-\log_\pi x.$$

Решение. Поскольку $x>0$, то $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$ как сумма взаимнообратных положительных чисел и $\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ge 1$.

Однако $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right)$ при $x\ge 0$ существует тогда и только тогда, когда $\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\le 1$. Поэтому уравнение может иметь решение только при $\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=1$, но тогда $\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$ и уравнение примет вид

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1-\log_\pi x,\quad \log_\pi x=0,\quad x=1.$$

Проверка показывает, что $x=1$ удовлетворяет уравнению.

Ответ: 1.

Упражнения

Решить уравнение:

1.837. $\log_3 (1 - 2x) = 4.$

1.838. $3^{\log_3 (x-7)} = \log_4 64.$

1.839. $\log_7 \log_3 \log_2 \log_2 x = 0.$

1.840. $\log_a (1 + \log_b (1 + \log_c (1 + \log_p x))) = 0.$

1.841. $\lg (x + 2) - \lg 5 = \lg (x - 6).$

1.842. $\lg (x + 6) - \frac{1}{2} \lg (2x - 3) = 2 - \lg 25.$

1.843. $\frac{2 \lg x}{\lg (5x - 4)} = 1.$

1.844. $\log_4 (x + 3) - \log_4 (x - 1) = 2 - \log_4 8.$

1.845. $\frac{17 - \lg x}{4 \lg x} = 4 \lg x.$

1.846. $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0.$

1.847. $\log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \ldots = \frac{1}{2}.$

1.848. $x^{\log_2 x + 2} = 8.$

1.849. $x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}.$

1.850. $x^{\log_2 x} = 4x.$

1.851. $x^{\log_3 3x} = 9.$

1.852. $x^{\lg x - 3} = 10^{\lg \frac{10}{x} - 1}.$

1.853. $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7.$

1.854. $\log_{\frac{x^3}{2}} 2 \cdot \log_x 2 = \frac{1}{2}.$

1.855. $\log_4 (x + 12) \cdot \log_x 2 = 1.$

1.856. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2.$

1.857. $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_4 x + \log_2^2 x = \frac{1}{2} \log_x x.$

1.858. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 6.$

1.859. $\lg (x + 1{,}5) = -\lg x.$

1.860. $5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{x + \log_5 2}.$

1.861. $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0.$

1.862. $x^{\lg^3 x - 5 \lg x} = 0{,}0001.$

1.863. $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4.$

1.864. $\log_{\frac{1}{2}}^2 4x + \log_2 \dfrac{x^2}{8} = 8.$

1.865. $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1.$

1.866. $x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)}.$

1.867. $9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} = 5^{\log_{\frac{1}{5}}(2x^2+1)}$

1.868. $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \quad \log_{81} x = \dfrac{2}{3}.$

1.869. $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400.$

1.870. $\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0.$

1.871. $\log_5 x + \log_{25} x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{3}.$

1.872. $x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4.$

1.873. $\log_{10} x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + \ldots + \log_{\sqrt[10]{10}} x = 5{,}5.$

1.874. $\log_x 2 - \log_4 x + \dfrac{7}{6} = 0.$

1.875. $\log_x (125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1.$

1.876. $2{,}5^{\log_3 x} + 0{,}4^{\log_3 x} = 2{,}9.$

1.877. $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}.$

1.878. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5.$

1.879. $\sqrt{2 \log_2 (-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0.$

1.880. $2 \lg x^2 - (\lg (-x))^2 = 4.$

1.881. $4 \log_4^2 (-x) + 2 \log_4 x^2 = -1.$

1.882. $3^x = 10 - \log_2 x.$

Тождественные преобразования показательных и логарифмических выражений

Пример 1.883. Упростить выражение $a^{\frac{\lg \lg a}{\lg a}}$.

Решение.

$$a^{\frac{\lg \lg a}{\lg a}} = \left(a^{\frac{1}{\lg a}}\right)^{\lg \lg a} = (a^{\log_a 10})^{\lg \lg a} = 10^{\lg \lg a} = \lg a.$$

О т в е т: $\lg a$.

Пример 1.884. Вычислить $\log_{30} 8$, если $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = b$.

Решение. $\log_{30} 8 = 3 \log_{30} 2 = 3 \log_{30} \frac{30}{15} =$

$$= 3\,(\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - \log_{30} 5) = 3\,(1 - a - b).$$

О т в е т: $3\,(1 - a - b)$.

Пример 1.885. Доказать, что

$$\log_a m \cdot \log_b m + \log_b m \cdot \log_c m + \log_c m \cdot \log_a m =$$

$$= \frac{\log_a m \cdot \log_b m \cdot \log_c m}{\log_{abc} m},$$

где $m > 0$, $m \neq 1$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$, $abc \neq 1$.

Решение.

$$\log_a m \cdot \log_b m + \log_b m \cdot \log_c m + \log_c m \cdot \log_a m =$$

$$= \frac{1}{\log_m a \cdot \log_m b} + \frac{1}{\log_m b \cdot \log_m c} + \frac{1}{\log_m c \cdot \log_m a} =$$

$$= \frac{\log_m a + \log_m b + \log_m c}{\log_m a \cdot \log_m b \cdot \log_m c} = \frac{\log_m abc}{\log_m a \cdot \log_m b \cdot \log_m c} =$$

$$= \frac{\log_a m \cdot \log_b m \cdot \log_c m}{\log_{abc} m},$$

что и требовалось доказать.

Пример 1.886. Вычислить сумму

$$\frac{1}{\log_2 n}+\frac{1}{\log_3 n}+\frac{1}{\log_4 n}+\ldots+\frac{1}{\log_{1997} n},$$

когда $n = 1997!$.

Решение.

$$\frac{1}{\log_2 n}+\frac{1}{\log_3 n}+\frac{1}{\log_4 n}+\ldots+\frac{1}{\log_{1997} n}=$$

$$=\log_n 2+\log_n 3+\log_n 4+\ldots+\log_n 1997=$$

$$=\log_n (1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 1997)=\log_n (1997!)=\log_n n=1.$$

Ответ: 1.

Пример 1.887. Вычислить $\log_6 16$, если $\log_{12} 27 = a$.

Решение. $\log_6 16 = 4\log_6 2 = \dfrac{4}{\log_2 6} =$

$$=\frac{4}{\log_2 2+\log_2 3}=\frac{6}{1+\log_2 3}.$$

Теперь преобразуем данное в условии выражение:

$$a=\log_{12} 27 = 3\log_{12} 3 =$$

$$=\frac{3}{\log_3 12}=\frac{3}{\log_3 3+2\log_3 2}=$$

$$=\frac{3}{1+2\log_3 2}=\frac{3}{1+\dfrac{2}{\log_2 3}}=\frac{3\log_2 3}{2+\log_2 3}.$$

Таким образом, $a=\dfrac{3\log_2 3}{2+\log_2 3}$, откуда

$$\log_2 3=\frac{2a}{3-a}\quad (a\neq 3).$$

Тогда $\log_6 16=\dfrac{4}{1+\log_2 3}=\dfrac{4}{1+\dfrac{2a}{3-a}}=\dfrac{4(3-a)}{3+a}.$

Ответ: $\dfrac{4(3-a)}{3+a}$.

Пример 1.888. Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника, c — длина гипотенузы, $c - b \neq 1$, $c + b \neq 1$.

Доказать, что

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

Решение. Если $a = 1$, то равенство выполняется, поскольку все слагаемые, входящие в него, равны нулю.

Рассмотрим случай, когда $a \neq 1$. По теореме Пифагора $c^2 - b^2 = a^2$, или $(c - b)(c + b) = a^2$ и, поскольку $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\log_a (c - b) + \log_a (c + b) = \log_a a^2,$$

откуда

$$\frac{1}{\log_{c-b} a} + \frac{1}{\log_{c+b} a} = 2,$$

или $$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c-b} a \cdot \log_{c+b} a,$$

что и требовалось доказать.

Упражнения

Вычислить:

1.889. $27^{1 - \log_3 2}$.

1.890. $\sqrt{10^{2 + \frac{1}{2} \lg 16}}$.

1.891. $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + 2 \log_5 3}$.

1.892. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_6 7}}}$.

1.893. $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 3^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

1.894. $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

1.895. $36^{\log_6 5} + 10^{1 - \lg 2} - 3^{\log_9 36}$.

Найти значение логарифма:

1.896. Найти $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$, если $\log_a 27 = b$.

1.897. Найти $\log_{49} 16$, если $\log_{14} 2 = a$.

1.898. Вычислить $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$.

1.899. Найти $\log_{abcd} x$, если $\log_a x = \alpha$, $\log_b x = \beta$, $\log_c x = \gamma$, $\log_d x = \delta$ и $x \neq 1$.

1.900. Найти $\log_{30} 8$, если $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

1.901. Найти $\log_9 20$, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

1.902. Найти $\log_6 16$, если $\log_{12} 2 = a$.

1.903. Найти $\log_3 5$, если $\log_6 2 = a$, $\log_6 5 = b$.

1.904. Найти $\log_{35} 28$, если $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.

1.905. Вычислить $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$.

1.906. Вычислить

$$\lg \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 31^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 32^\circ \cdot \ldots \cdot \lg \operatorname{tg} 60^\circ.$$

1.907. При каких x числа $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

1.908. Вычислить $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9$, если известно, что $\lg 2 = 0{,}3010$.

1.909. Проверьте равенство

$$\log_{0,5} \sin 70^\circ + \log_{0,5} \sin 50^\circ + \log_{0,5} \sin 10^\circ = 3.$$

Решение систем показательных и логарифмических уравнений

Пример 1.910. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y - 4\log_y x = 3, \\ y^2 - 2x^3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы следует, что искомые значения x и y должны удовлетворять условиям: $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$.

При таких условиях первое уравнение системы равносильно уравнению

$$\log_x y - \frac{4}{\log_x y} = 3,$$

или $$\log_x^2 y - 3\log_x y - 4 = 0,$$

откуда $\log_x y = 4$ и $\log_x y = -1$ или $y = x^4$ и $y = x^{-1}$. Поэтому данная система уравнений равносильна совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases} y = x^4, \\ y^2 - 2x^3 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y = x^{-1}, \\ y^2 - 2x^3 = 0. \end{cases}$$

Решая эти системы уравнений и учитывая, что $x \neq 0$, $y \neq 0$, получаем искомые решения данной системы:

$$x_1 = \sqrt[5]{2},\ \ y_1 = \sqrt[5]{16},\ \ x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{2}},\ \ y_2 = \sqrt[5]{\;}$$

О т в е т: $(\sqrt[5]{2};\ \sqrt[5]{16}),\ \left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}};\ \sqrt[5]{2}\right)$.

Пример 1.911. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения системы найдем $y = x^{-2}$ и подставим его в первое уравнение. Получим

$$x^{x+x^{-2}} = x^{-2(x-x^{-2})}, \text{ или } x^{x+\frac{1}{x^2}} = x^{-2x+\frac{2}{x^2}}.$$

Решим полученное уравнение.

а) $x = -1$; проверяем: $(-1)^{-1+1} = (-1)^{2+2}$, $1 = 1$, $x_1 = -1$;

б) $x = 0$; проверяем: $0^{0+\frac{1}{0}} = 0^{0+\frac{2}{0}}$ — не имеет смысла;

в) $x = 1$; $1^2 = 1^0$, $1 = 1$, $x_2 = 1$

г) $x + \frac{1}{x^2} = -2x + \frac{2}{x^2}$, или $3x^3 - 1 = 0$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Зная x, находим соответствующие значения y из уравнения $y = x^{-2}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = \sqrt[3]{9}$. Проверкой убеждаемся, что найденные значения x и y являются решениями системы.

О т в е т: $(-1;\ 1);\ (1;\ 1);\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\ \sqrt[3]{9}\right)$.

Пример 1.912. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases}$$

Решение. Перепишем данную систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 2^3 \cdot 3, \\ 2^y \cdot 3^x = 2 \cdot 3^3. \end{cases}$$

Перемножив почленно уравнения системы, имеем

$$2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 2^4 \cdot 3^4, \quad \text{или} \quad 6^{x+y} = 6^4,$$

откуда

$$x + y = 4. \qquad (*)$$

Разделив уравнения системы почленно, получим

$$2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = 2^2 \cdot 3^{-2}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

откуда

$$x - y = 2. \qquad (**)$$

Решение исходной системы уравнений сводится к решению равносильной ей системы, состоящей из полученных уравнений (*) и (**):

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара чисел: $x = 3$, $y = 1$.

Ответ: (3; 1).

Пример 1.913. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \log_y x = 2. \end{cases}$$

Решение. Искомые значения x и y должны удовлетворять условиям $x > 0$, $y > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. После преобразования получим систему

$$\begin{cases} \lg y \lg x = 2, \\ x = y^2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \lg y \cdot \lg y^2 = 2, \\ x = y^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lg^2 y = 1, \\ x = y^2. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} \lg y = \pm 1, \\ x = y^2. \end{cases} \qquad y_1 = 0{,}1.$$

Тогда $x_1 = 0{,}01$, $y_2 = 10$, $x_2 = 100$. Найденные пары значений являются решениями данной системы. Проверкой убеждаемся в этом.

Ответ: (0,01; 0,1); (100; 10).

Упражнения

Решить систему уравнений:

1.914. $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg (y + x)^2 - \lg x = 2 \lg 3. \end{cases}$

1.915. $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$

1.916. $\begin{cases} 10^{1 + \lg (x + y)} = 50, \\ \lg (x - y) + \lg (x + y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$

1.917. $\begin{cases} 2^{\frac{x - y}{2}} + 2^{\frac{y - x}{2}} = 2{,}5, \\ \lg (2x - y) + 1 = \lg (y + 2x) + \lg 6. \end{cases}$

1.918. $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2 \log_2 (x + y), \\ \log_2 (x + y) + \log_2 (x^2 - xy + y^2) = 1. \end{cases}$

1.919. $\begin{cases} x^{2y^2 - 1} = 5, \\ x^{y^2 + 2} = 125. \end{cases}$

1.920. $\begin{cases} 4^{x + y} = 2^{y - x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 - 5. \end{cases}$

1.921. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases}$

1.922. $\begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ x^y = 4^6. \end{cases}$

249. $\begin{cases} y^{x^2-7x+12} = 1, \\ x + y = 6. \end{cases}$

250. $\begin{cases} 5^x \cdot 8^y = 512\,000, \\ x + y = 7. \end{cases}$

251. $\begin{cases} \sqrt[x]{y} = 2, \\ y^x = 16. \end{cases}$

252. $\begin{cases} 2^x (x + y) = 10, \\ \sqrt[x]{x+y} = 5. \end{cases}$

253. $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 2, \\ (x + y) \cdot 3^x = 279\,936. \end{cases}$

254. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases}$

255. $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$

256. $\begin{cases} x^{2y-1} = 5, \\ x^{y+2} = 3. \end{cases}$

257. $\begin{cases} x^y = 9, \\ \sqrt[y]{324} = 2x^2. \end{cases}$

258. $\begin{cases} \sqrt[x]{3} \cdot \sqrt[y]{1{,}5} = 0{,}25, \\ \sqrt[x]{5} : \sqrt[y]{0{,}2} = 1. \end{cases}$

259. $\begin{cases} x^y = 256. \\ 2\sqrt[y]{81^2} = 3x. \end{cases}$

260. $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}, \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}. \end{cases}$

261. $\begin{cases} \sqrt[y]{4^x} = 32\sqrt[x]{8^y}, \\ \sqrt[y]{3^x} = 3\sqrt[x]{9^{1-y}}. \end{cases}$

262. $\begin{cases} xy = y^x, \\ x^3 = y^2. \end{cases}$

263. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3}, \\ (x + y) \cdot 2^{y-x} = 3. \end{cases}$

264. $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ \sqrt{3^x} - 2^y = 7. \end{cases}$

265. $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12, \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

266. $\begin{cases} 9 \cdot 5^x + 7 \cdot 2^{x+y} = 457, \\ 6 \cdot 5^x - 14 \cdot 2^{x+y} = -890. \end{cases}$

267. $\begin{cases} x^{2y} = 16 + 6 \cdot x^y, \\ x^{2y} + 5 = y \cdot x^y + 5y^2. \end{cases}$

276. $\begin{cases} \dfrac{\lg (x + y) - \lg 5}{\lg x + \lg y - \lg 6} = 1, \\ \dfrac{-\lg x}{\lg (x + 6) - (\lg y + \lg 6)} = 1. \end{cases}$

277. $\begin{cases} \lg (x^2 + y^2) - 1 = \lg 13, \\ \lg (x + y) - \lg (x - y) = 3 \lg 2. \end{cases}$

278. $\begin{cases} \lg (x - y) - 2\lg 2 = 1 - \lg (x + y), \\ \lg x - \lg 3 = \lg 7 - \lg y. \end{cases}$

279. $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$

280. $\begin{cases} \log_v u + \log_u v = 2, \\ u^2 + v = 12. \end{cases}$

281. $\begin{cases} \log_{xy} (x - y) = 1, \\ \log_{xy} (x + y) = 0. \end{cases}$

282. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}} (y - x) = 4. \end{cases}$

283. $\begin{cases} xy = 40, \\ x^{\lg y} = 4. \end{cases}$

284. $\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 7, \\ \lg x - \lg y = 2. \end{cases}$

1.923. $\begin{cases} \log_x(3x+2y)=2, \\ \log_y(2x+3y)=2. \end{cases}$

1.924. $\begin{cases} \log_{xy}\dfrac{y}{x}-\log_y^2 x=1, \\ \log_2(y-x)=1. \end{cases}$

1.925. $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2, \\ x^2-y=20. \end{cases}$

Решение показательных неравенств

Решение простейших показательных неравенств основывается на использовании свойств монотонности показательной функции.

Рассмотрим решение простейших показательных неравенств.

1. Неравенство $a^x > c$, где $a > 0$, $a \neq 1$:

а) если $c \leq 0$, то неравенство выполняется при произвольном значении x (поскольку для любого значения x $a^x > 0$);

б) если $c > 0$, то, записав неравенство в виде $a^x > a^{\log_a c}$, получим:

если $a > 1, x > \log_a c$,

если $0 < a < 1$, $x < \log_a c$.

2. Неравенство $a^x < c$, где $a > 0$, $a \neq 1$:

а) если $c \leq 0$, то неравенство не имеет решения;

б) если $c > 0$, то, записав неравенство в виде $a^x < a^{\log_a c}$, получим:

если $a > 1, x < \log_a c$,

если $0 < a < 1$, $x > \log_a c$.

Пример 1.926. Решить неравенство $\dfrac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}} > \dfrac{0{,}04^x}{25}$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\frac{5^{-x-0{,}5}}{5^{0{,}5}} > \frac{5^{-2x}}{5^2}, \text{ или } 5^{-x-1} > 5^{-2x-2},$$

откуда $-x-1>-2x-2$, $x>-1$.

Ответ: $x>-1$.

Пример 1.927. Решить неравенство $1<5^{1-\frac{1}{2}x}<25$.

Решение. Поскольку $5^0<5^{1-\frac{1}{2}x}<5^2$, то

$$0<1-\frac{1}{2}x<2,\ -2<\frac{1}{2}x-1<0,\ -1<\frac{1}{2}x<1,$$

откуда $-2<x<2$.

Ответ: $-2<x<2$.

Пример 1.928. Решить неравенство $0{,}5^{x^2-x}>3$.

Решение. Имеем $0{,}5^{x^2-x}>0{,}5^{\log_{0,5}3}$, откуда

$$x^2-x+\log_2 3<0.$$

Полученное неравенство не имеет решений, поскольку дискриминант трехчлена в левой части неравенства отрицателен.

Ответ: нет решений.

Пример 1.929. Решить неравенство

$$\frac{15}{2^x+1}+\frac{4}{2^{x-1}-3}>\frac{12}{2^{x+1}}.$$

Решение. Запишем данное неравенство в виде

$$\frac{15}{2^x+1}+\frac{8}{2^x-6}>\frac{6}{2^x}.$$

Обозначим $2^x=y$. Очевидно, что $y>0$. Получим

$$\frac{15}{y+1}+\frac{8}{y-6}>\frac{6}{y}.$$

Решая неравенство

$$\frac{15}{y+1}+\frac{8}{y-6}-\frac{6}{y}>0,$$

имеем

$$\frac{17y^2-52y+36}{y(y+1)(y-6)}>0,$$

или $\quad (17y^2-52y+36)\,y\,(y+1)(y-6)>0.$

Определим промежутки знакопостоянства (рис. 1.38) при $y > 0$:

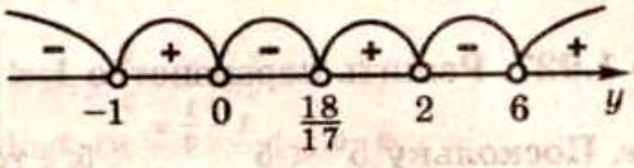

Рис. 1.38

а) $-1 < y < 0$ не удовлетворяет;

б) $\frac{18}{17} < y < 2$, $y > 6$.

Возвращаясь к подстановке, получаем

1) $\frac{18}{17} < 2^x < 2$; 2) $2^x > 6$;

$2^{\log_2 \frac{18}{17}} < 2^x < 2$; $2^x > 2^{\log_2 6}$;

$\log_2 \frac{18}{17} < x < 1$. $x > \log_2 6$.

Ответ: $\log_2 \frac{18}{17} < x < 1$; $x > \log_2 6$.

Пример 1.930. Решить неравенство

$$3^{2x+5} \le 3^{x+2} + 2.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$3 \cdot 3^{2x+4} \le 3^{x+2} + 2.$$

Обозначив $3^{x+2} = y$ $(y > 0)$, прийдем к неравенству

$$3y^2 \le y + 2, \ \ 3y^2 - y - 2 \le 0,$$

$$(y-1)(3y+2) \le 0.$$

Определим промежутки знакопостоянства (рис. 1.39). Имеем $-\frac{2}{3} \le y \le 1$. Возвращаясь к подстановке, получаем $-\frac{2}{3} \le 3^{x+2} \le 1$. Однако неравенство $3^{x+2} \ge -\frac{2}{3}$ удо-

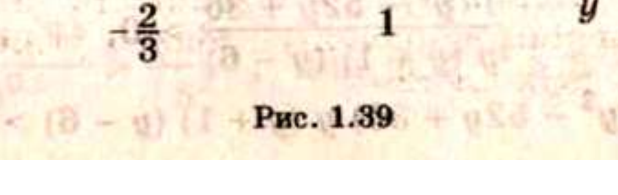

Рис. 1.39

влетворяется при любом действительном x. Тогда решением данного неравенства будет $3^{x+2} \leq 3^0$, откуда $x + 2 \leq 0$, $x \leq -2$.

Ответ: $x \leq -2$.

Пример 1.931. Решить неравенство $12^x + 5^x > 13^x$.

Решение. Обе части неравенства разделим на $13^x > 0$:

$$\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x > 1.$$

Каждая из функций $\left(\frac{12}{13}\right)^x$ и $\left(\frac{5}{13}\right)^x$ определена на множестве действительных чисел. Кроме того, обе они монотонно убывающие. Поэтому функция

$$f(x) = \left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x - 1$$

является монотонно убывающей.

Поскольку $f(2) = 0$, то $x = 2$ — единственный корень функции $f(x)$ и, таким образом, $f(x) > 0$ при $x < 2$.

Ответ: $x < 2$.

Решение неравенства $(f(x))^{\varphi(x)} > 1$ сводится к решению двух систем:

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) < 0. \end{cases}$$

Решение неравенства $(f(x))^{\varphi(x)} < 1$ сводится к решению таких систем:

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ \varphi(x) < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

Пример 1.932. Решить неравенство

$$(x - 2)^{x^2 - 6x + 8} > 1.$$

Решение. Используя монотонность показательной функции, заменим данное неравенство равносильной совокупностью двух систем:

а) $\begin{cases} x - 2 > 1, \\ x^2 - 6x + 8 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ x^2 - 6x + 8 < 0. \end{cases}$

Решением системы *а*) $\begin{cases} x > 3, \\ (x - 4)(x - 2) > 0 \end{cases}$ **(рис. 1.40) является неравенство** $x > 4$.

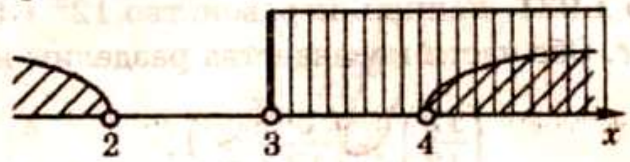

Рис. 1.40

Решением системы *б*) $\begin{cases} 2 < x < 3, \\ (x - 4)(x - 2) < 0 \end{cases}$ **(рис. 1.41) является неравенство** $2 < x < 3$.

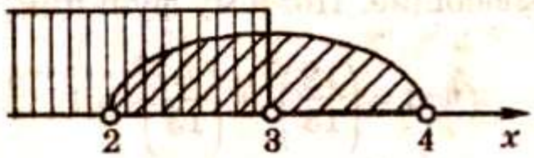

Рис. 1.41

О т в е т: $2 < x < 3;\ x > 4$

Пример 1.933. Решить неравенство

$$(x^2 - 8x + 15)^{x-6} < 1.$$

Решение. Используя монотонность показательной функции, заменим данное неравенство равносильной совокупностью двух систем:

а) $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 > 1, \\ x - 6 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 < x^2 - 8x + 15 < 1, \\ x - 6 > 0. \end{cases}$

Решением системы *а*) $\begin{cases} x^2 - 8x + 14 > 0, \\ x < 6 \end{cases}$ **(рис. 1.42) являются все значения** x, **удовлетворяющие неравенствам**

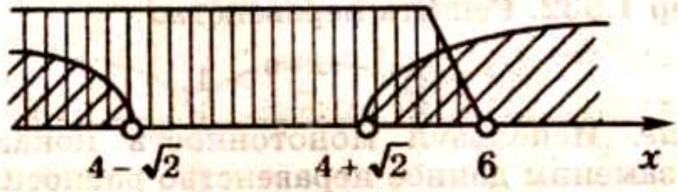

Рис. 1.42

$$x < 4 - \sqrt{2},\ 4 + \sqrt{2} < x < 6.$$

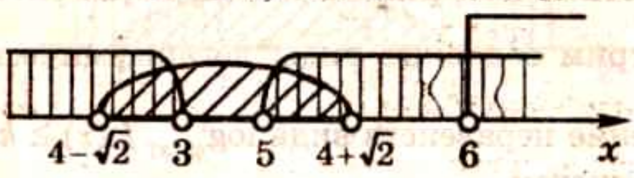

Рис. 1.43

Решая систему *б*) $\begin{cases} x^2 - 8x + 14 < 0, \\ x^2 - 8x + 15 > 0, \\ x > 6 \end{cases}$ (рис. 1.43), делаем вывод, что система несовместна.

Ответ: $x < 4 - \sqrt{2};\ 4 + \sqrt{2} < x < 6.$

Упражнения

Решить неравенство:

1.934. $2^{3-6x} > 1.$

1.935. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}.$

1.936. $0{,}1^{4x^2-2x-2} \le 0{,}1^{2x-3}.$

1.937. $2^x + 2^{1-x} - 3 < 0.$

1.938. $x^2 \cdot 5^x - 5^{2+x} < 0.$

1.939. $4^{x+1} - 16^x < 2\log_4 8.$

1.940. $3^{\frac{x-3}{3x-2}} < \frac{1}{3}.$

1.941. $0{,}5^{x-2} > 6.$

1.942. $\frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1}.$

1.943. $0{,}5^x \le 0{,}25^{x^2}.$

1.944. $1 < 3^{|x^2-x|} < 9.$

1.945. $|2^{4x^2-1} - 5| \le 3.$

1.946. $2^{1-2^{\frac{1}{x}}} < 0{,}125.$

1.947. $4^x - 2\cdot 5^{2x} - 10^x > 0.$

1.948. $(x+5)^{x^2-4x+3} > 1.$

1.949. $(x+3)^{x^2-5x+4} < 1.$

Решение логарифмических неравенств

Рассмотрим основные виды логарифмических неравенств.

1. Решение неравенств вида $\log_{\varphi(x)} f(x) \geq k$ сводится к решению систем

а) $\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) \geq \varphi^k(x); \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1, \\ 0 < f(x) \leq \varphi^k(x). \end{cases}$

2. Решение неравенств вида $\log_{\varphi(x)} f(x) \leq k$ сводится к решению систем

а) $\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ 0 < f(x) \leq \varphi^k(x); \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \geq \varphi^k(x). \end{cases}$

3. Решение неравенств вида

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \geq \log_{\varphi(x)} h(x)$$

сводится к решению двух систем:

а) $\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) \geq h(x) > 0; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1, \\ 0 < f(x) \leq h(x). \end{cases}$

4. Решение неравенств вида

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \leq \log_{\varphi(x)} h(x)$$

сводится к решению двух систем:

а) $\begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ 0 < f(x) \leq h(x); \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1, \\ f(x) \geq h(x), \\ h(x) > 0. \end{cases}$

Пример 1.950. Решить неравенство

$$\log_8 (x^2 - 4x + 3) < 1.$$

Решение. Пользуясь свойством логарифмической функции, получаем, что данное неравенство равносильно неравенству $0 < x^2 - 4x + 3 < 8$, то есть

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 8, \\ x^2 - 4x + 3 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ x^2 - 4x + 3 > 0. \end{cases}$$

Решим эти неравенства (рис. 1.44).

Ответ: $3 < x < 5; -1 < x < 1$.

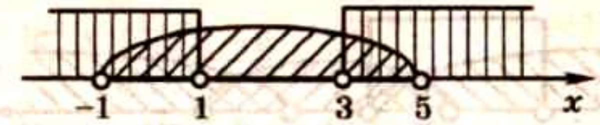

Рис. 1.44

Пример 1.951. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 + 4x}{2x - 3} < 1$.

Решение. Это неравенство равносильно неравенству $\frac{x^2 + 4x}{2x - 3} > \frac{1}{3}$.

Решая неравенство $\frac{x^2 + 4x}{2x - 3} > \frac{1}{3}$, получаем

$$\frac{3x^2 + 12x - 2x + 3}{3(2x - 3)} > 0, \quad \text{или} \quad \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x - 3} > 0,$$

откуда $\frac{(x + 3)(3x + 1)}{2x - 3} > 0$.

Решив данное неравенство методом интервалов, получим ответ.

О т в е т: $-3 < x < -\frac{1}{3}$; $x > \frac{3}{2}$.

Пример 1.952. Решить неравенство

$$\log_{(x - 2)} (x^2 - 8x + 15) > 0.$$

Решение. Это неравенство равносильно таким двум системам неравенств:

а) $\begin{cases} x - 2 > 1, \\ x^2 - 8x + 15 > 1; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ 0 < x^2 - 8x + 15 < 1. \end{cases}$

Решением системы *а)* $\begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 8x + 14 > 0 \end{cases}$ (рис. 1.45) являются все значения x, удовлетворяющие неравенству $x > 4 + \sqrt{2}$.

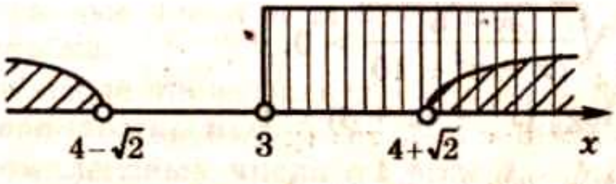

Рис. 1.45

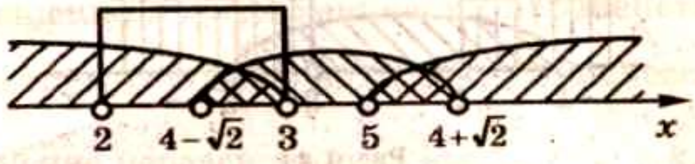

Рис. 1.46

Решением системы *б*) $\begin{cases} 2 < x < 3, \\ x^2 - 8x + 15 > 0, \\ x^2 - 8x + 14 < 0 \end{cases}$ (рис. 1.46)

являются все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$4 - \sqrt{2} < x < 3.$$

О т в е т: $x > 4 + \sqrt{2}$; $4 - \sqrt{2} < x < 3$.

Упражнения

Решить неравенство:

1.953. $\log_{\frac{1}{3}} (5x - 1) > 0$.

1.954. $\log_5 (3x - 1) < 1$.

1.955. $\log_{0,5} (x^2 - 5x + 6) > -1$.

1.956. $\log_3 \dfrac{1 - 2x}{x} \le 0$.

1.957. $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \le 0$.

1.958. $\log_2 x \le \dfrac{2}{\log_2 x - 1}$.

1.959. $\dfrac{\lg^2 x - 3 \lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$.

1.960. $\log_{0,2} (x^2 - x - 2) > \log_{0,2} (-x^2 + 2x + 3)$.

1.961. $\dfrac{\log_2 (x + 1)}{x - 1} > 0$.

1.962. $\sqrt{\dfrac{x - 5}{7x - x^2 - 10}} > 0$.

1.963. $\log_8 (x^2 - 4x + 3) < 1$.

1.964. $\log_2 \log_2 \dfrac{x - 1}{2 - x} > -1$.

1.965. $\dfrac{\lg^2 x + \lg x - 6}{\lg x} > 0.$

1.966. $\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15) > 0.$

1.967. $\log_{x^2-6x+8}(x - 4) > 0.$

1.968. $x^{\lg(x^2-6x+5)} > 1.$

1.969. $\log_x(x^2 - 2x - 3) > 0.$

1.970. $\log_{3-x}(x - 2{,}5) > 0.$

1.971. $\log^2_{0,2}(x - 1) > 4.$

1.972. $(x - 1)\log_2(x^2 - 4x + 3) < 0.$

1.973. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x < 6.$

1.974. $\log_4(x + 7) > \log_2(x + 1).$

1.975. $2^{\log^2_{0,5} x} + x^{\log_{0,5} x} > 2{,}5.$

1.976. $\log_{\frac{1}{5}} x + \log_4 x > 1.$