А.ГАЙШТУТ

МАТЕМАТИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

В ПОМОЩЬ ПОВТОРЯЮЩИМ МАТЕМАТИКУ ПО СПРАВОЧНИКАМ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 2. Содержание

Производная. Применение производной

Определение производной

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx, когда $\Delta x \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Общее правило дифференцирования:

1. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

2. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

3. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Пример 3.195 (непосредственное вычисление производной). Найти производную функции $y = \dfrac{2}{x}$.

Применяем общее правило:

1) $\Delta y = \dfrac{2}{x + \Delta x} - \dfrac{2}{x} = -\dfrac{2\Delta x}{x\,(x + \Delta x)}$;

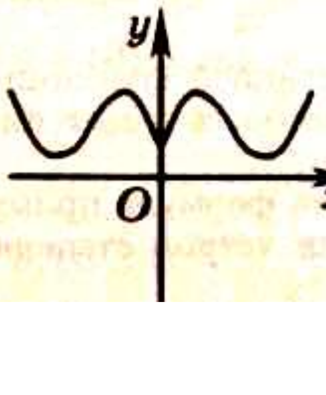
Справочный отдел

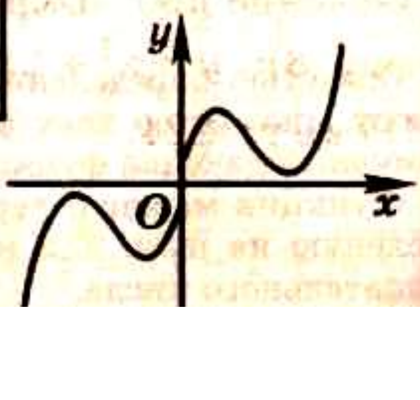
Если $x \in D(f)$, то и $-x \in D(f)$.

$\boxed{f(-x) = f(x)}$ — четная

$\boxed{f(-x) = -f(x)}$ — нечетная

для любого x из области определения





2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{2}{x(x+\Delta x)}$;

3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(-\dfrac{2}{x(x+\Delta x)}\right) = -\dfrac{2}{x^2}$.

Физический смысл производной

Физический смысл производной: при прямолинейном движении точки скорость v в данный момент $t = t_1$ есть производная $\dfrac{dS}{dt}$ от пути S по времени t, вычисленная для данного момента $t = t_1$.

Ускорение точки a в данный момент $t = t_1$ есть производная $\dfrac{dv}{dt}$ от скорости v по времени t, вычисленная для данного момента $t = t_1$.

Геометрический смысл производной

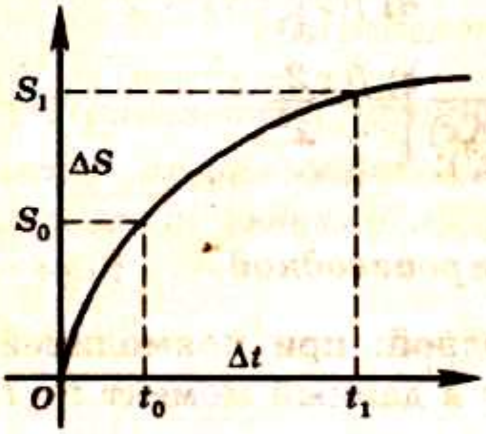
Производная функции $y = f(x)$ при $x = x_1$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к данной кривой $y = f(x)$ в ее точке с абсциссой $x = x_1$: $f'(x_1) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между касательной к данной кривой, проведенной через данную ее точку $M(x_1; y_1)$, и осью Ox.

Пример 3.196. Найти скорость изменения функции $y = x(x^2 + 2x) - 1$ при $x = 8$.

Решение. Скорость изменения функции в точке x_0 — это значение производной при $x = x_0$. Поэтому требуется найти $y'(8)$: $y = x^3 + 2x^2 - 1$, $y'(x) = 3x^2 + 4x$, $y'(8) = 224$.

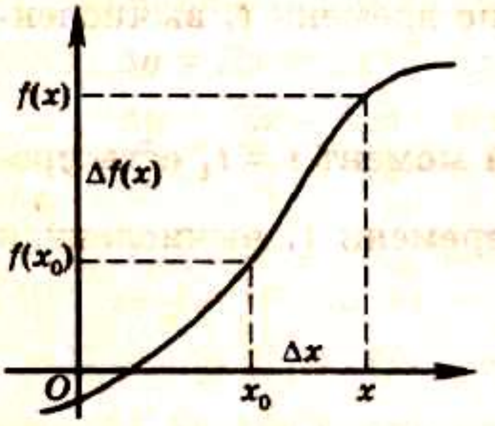
Ответ: 224.

Производная



$$\boxed{v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t};}$$

$$\boxed{v_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.}$$



Δx — приращение аргумента,
$\Delta f(x)$ — приращение функции,
$\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ — скорость изменения функции,
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_0)$ — скорость изменения функции в точке x_0.

Нахождение производной

1. $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.
2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.
4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Правила вычисления производных

$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + uv'$
$y = ku$	$y' = ku'$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Найти производные функций:

3.197. *а)* $f(x) = x^3 + x^5$; *в)* $f(x) = \sqrt{x+2}$;

б) $f(x) = \frac{1}{x} + 7x - 9$; *г)* $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$.

3.198. *а)* $f(x) = x^5\,(7 + 3x - x^3)$;

б) $f(x) = \sqrt{x}\,(3x^2 - x)$;

в) $f(x) = x^2\,(3x + 5x^2)$;

г) $f(x) = (2x - 1)\,(1 + x^3)$.

3.199. *а)* $y = \frac{1 + 2x}{5 - 3x}$; *в)* $y = \frac{2x - 1}{3x + 2}$;

б) $y = \frac{x^2}{3x + 1}$; *г)* $y = \frac{4 - 5x}{x^3}$.

3.200. Вычислить значения производной функции f в данных точках:

а) $f(x) = x^3 - x^2$, $x = -3$, $x = 2$;

б) $f(x) = x - \sqrt{x}$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 16$;

в) $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $f(x) = \frac{3 - x}{x + 2}$, $x = -3$, $x = 0$.

3.201. Решить уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = 2x^2 + 1$; *в)* $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1{,}5x^2 - 4x$;

б) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 7$; *г)* $f(x) = 5x + 4x^2$.

3.202. Решить неравенство $f'(x) < 0$, если:

а) $f(x) = 5x + 4x^2$; *в)* $f(x) = x^2 - 4x$;

б) $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2$; *г)* $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$.

3.203. Найти значения x, при которых производная функции f равна нулю:

а) $f(x) = x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 5x$; *в)* $f(x) = x^4 - 4x^2$;

б) $f(x) = 2x^4 - x^8$; *г)* $f(x) = x^4 - 12x^2$.

3.204. Решить неравенство $f'(x) < 0$, если:

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x$; *в)* $f(x) = 3x - 5x^2 + x^3$;

б) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 8x$; *г)* $f(x) = 3x^2 - 9x - \frac{1}{3}x^2$.

3.205. Задать формулой хотя бы одну функцию, производная которой равна:

а) $2x - 1$; *б)* $6x + 2$; *в)* $4x^3 - 0{,}1$; *г)* $9x^2 - \frac{1}{2}$.

Табличные значения производных

$y = a$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^2$	$y' = 2x$
. . . . .	. . . . . .
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$

$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \frac{1}{x^2}$	$y' = -\frac{2}{x^3}$
$y = \frac{1}{x^3}$	$y' = -\frac{3}{x^4}$
. . . . .	. . . . . .
$y = \frac{1}{x^n}$	$y' = -\frac{n}{x^{n+1}}$

$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[3]{x}$	$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$y = \sqrt[4]{x}$	$y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$
. . . . .	. . . . . .
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$y = 2^x$	$y' = 2^x \ln 2$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_2 x$	$y' = \frac{1}{x \ln 2}$

Производная сложной функции

$$y = f(\varphi(x))$$

$$y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Задачи на нахождение производной

Пример 3.206. Найти производную функции $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$.

Решение. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 1}}(3x^2 + 1)' =$

$$= \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}.$$

Пример 3.207. Найти производную функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x+4}}.$$

Решение. Согласно формуле производной сложной функции имеем $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x+4}}}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x+4}\right)' =$

$$= \frac{\sqrt{x+4}}{2\sqrt{x^2-3x+2}} \frac{(2x-3)(x+4)-(x^2-3x+2)}{(x+4)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+4}\,(x^2+8x-14)}{2\sqrt{x^2-3x+2}\,(x+4)^2}.$$

Замечание. Производная существует на множестве $M = (-4; 1) \cup (2; \infty)$.

Пример 3.208. $y = 2^{x^2-4x} + \dfrac{\ln x}{x}$. Найти $y'(1)$.

Решение. $y' = 2^{x^2-4x} \cdot (2x-4)\ln 2 +$

$$+ \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = 2^{x^2-4x}\cdot(2x-4)\cdot\ln 2 + \frac{1-\ln x}{x^2},$$

$$y'(1) = \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = 1 - \frac{1}{4}\ln 2.$$

Справочный отдел

Важно запомнить следующее: *функция, имеющая производную в данной точке $x = x_0$, непрерывна в этой точке.*

Ни в одной точке разрыва функция f не может иметь производной.

Обратное утверждение неверно. Непрерывная в данной точке функция может не иметь производной. Например, функция $y = |x|$ при $x = 0$ не имеет производной в данной точке.

Пример 3.209. Доказать, что функция $y = x \sin x$ удовлетворяет уравнению $\frac{y'}{\cos x} - x = \operatorname{tg} x$.

Решение. $y' = \sin x + x \cos x$. Поэтому

$$\frac{y'}{\cos x} - x = \frac{\sin x + x \cos x}{\cos x} - x = \operatorname{tg} x.$$

Пример 3.210. Доказать, что функция $y = (x + 1)\, e^x$ удовлетворяет уравнению $y' - y = e^x$.

Доказательство. $y' = e^x + (x + 1)\, e^x$. Поэтому

$$y' - y = e^x + (x + 1)\, e^x - (x + 1)\, e^x = e^x.$$

Найти производные функций:

3.211. *а)* $f(x) = \sin 3x$; *в)* $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; *г)* $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3.212. *а)* $f(x) = (2 + 4x)^5$; *в)* $f(x) = \sqrt{\cos x}$;

б) $f(x) = (7x - 1)^7$; *г)* $f(x) = \operatorname{tg}\frac{1}{x}$.

3.213. *а)* $f(x) = \frac{1}{(5x - 1)^3}$; *в)* $f(x) = \sqrt{1 - 3\cos x}$;

б) $f(x) = \frac{1}{(6x + 1)^5}$; *г)* $f(x) = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}$.

3.214. *а)* $f(x) = x^3 \sin 2x$; *в)* $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$;

б) $f(x) = x^3 + \operatorname{tg} 5x$; *г)* $f(x) = \frac{x}{\cos 2x}$.

3.215. *а)* $f(x) = \sin^2 x$; *в)* $f(x) = \cos^2 x$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; *г)* $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

3.216. *а)* $f(x) = \cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x$;

б) $f(x) = \sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x$;

в) $f(x) = \sin 3x \cos 3x$;

г) $f(x) = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$.

Найти производную функции:

3.217. $y = 3x^2 - 5x + 1.$

3.218. $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}.$

3.219. $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}.$

3.220. $y = (x^4 - x^2 + 1)^3.$

3.221. $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}.$

3.222. $y = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}.$

3.223. $y = \lg \frac{10 - x}{x + 2}.$

3.224. $y = \ln \sqrt{x^2 - 1}.$

3.225. $y = e^{x^3 - 5x^2}.$

3.226. $y = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x.$

3.227. $y = x^2 \cos \frac{1}{x}.$

3.228. $y = \cos^2 3x.$

3.229. $y = x + \sin x \cos x.$

3.230. $y = e^{\operatorname{tg}^2 3x}.$

3.231. $y = \ln(3 \sin 4x - \cos x^2).$

3.232. $y = 2^{\sin 4x^3}.$

Вычислить значение производной заданной функции при указанном значении независимой переменной:

3.233. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + \frac{2x}{x + 1};\ f'(1) = ?$

3.234. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2};\ f'(2) = ?$

3.235. $f(x) = \sin 4x \cos 4x;\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

3.236. $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x;\ f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = ?$

3.237. $f(x) = \sin^3 \frac{x}{2}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

3.238. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$; $f'(0) = ?$

3.239. $f(x) = (x^2 - x) \cos^2 x$; $f'(0) = ?$

3.240. Определить знак производной функции $y = \sqrt{4x + 9}\ (x^2 - 16)$ в точке $x = 0$.

3.241. Функция задана формулой $f(x) = 5 \sin x + 3 \cos x$. Решить уравнение $f'(0) = f'(x)$.

Скорость и ускорение

2.242. Дано уравнение движения материальной точки $S = (3t^2 + 5t)$ м, где t измеряется в секундах. Найти скорость движения материальной точки в любой момент времени и найти скорость в конце третьей секунды.

2.243. Угол поворота тела вокруг оси в зависимости от времени задан функцией $\varphi\ (t) = 3t^2 - 2t + 4$ (рад). Вывести формулу для вычисления угловой скорости в любой момент времени и найти ее значение при $t_1 = 3$ с.

3.244. При нагревании тела его температура изменяется в зависимости от времени t по закону $T = 0{,}5t^2 + 3t$ (К). Вывести формулу для вычисления скорости изменения температуры тела в любой момент времени и вычислить ее в момент времени $t_1 = 8$ с, $t_2 = 13$ с.

3.245. Движения двух тел заданы уравнениями $S_1 = 4t^2 + 2$ (м) и $S_2 = 3t^2 + 4t - 1$ (м). Найти скорости движения тел в тот момент, когда их пути равны (время измеряется в секундах).

Справочный отдел

Прямолинейное и равноускоренное движение тела описывается законом $x\ (t) = \frac{a}{2}\ t^2 + v_0 t + x_0$;

$x'(t) = v(t)$ — скорость в момент времени t;

$x''(t) = v'(t) = a$ — скорость изменения скорости (ускорение).

3.246. Движения двух материальных точек заданы уравнениями: $S_1 = 2t^3 - 5t^2 - 3t$ (м), $S_2 = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ (м). Найти ускорения движущихся материальных точек в тот момент, когда их скорости равны (время измеряется в секундах).

Касательная к графику функции

Пример 3.247. Написать уравнение касательной к кривой $y = 2x^3 - 3x + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. I способ. Уравнение касательной *помним*:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Находим неизвестные элементы формулы:

$$f(x_0) = 2x_0^3 - 3x_0 + 2 = 16 - 6 + 2 = 12,$$

$$f'(x_0) = 6x_0^2 - 3 = 6 \cdot 2^2 - 3 = 21.$$

Тогда $y = 12 + 21(x - 2)$, $\boxed{y = 21x - 30.}$

II способ.

Формулу уравнения касательной *забыли*.

1. Зная x_0, находим y_0:

$$y_0 = 2x_0^3 - 3x_0 + 2 = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 12.$$

2. Уравнение касательной — прямая $y = kx + b$, $k = \operatorname{tg} \alpha = y'(x_0) = 6x_0^2 - 3 = 21.$

3. Касательная проходит через точку $A(x_0; y_0)$, $y_0 = kx_0 + b$, откуда $b = y_0 - kx_0$, $b = 12 - 21 \cdot 2 = -30.$

4. Находим уравнение касательной $y = kx + b$,

$$\boxed{y = 21x - 30.}$$

Пример 3.248. В какой точке касательная к графику функции $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ образует угол 135° с осью Ox? Записать уравнение касательной в этой точке.

Решение. $y'(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$, $\quad y'(x_0) = \operatorname{tg} 135^\circ = -1.$

Поэтому $\dfrac{-4}{(x_0 - 2)^2} = -1.$

Имеем

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = -1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_0 = 4, \\ y_0 = 3. \end{cases}$$

Таким образом, есть две точки с требуемым свойством: A_1 (0; –1) и A_2 (4; 3). Уравнение касательной к графику в точке A_1 имеет вид $y = -x + (-1)$ или $y = -x - 1$.

Уравнение касательной к графику в точке A_2 имеет вид $y = -x - (-1) \cdot 4 + 3$ или $y = -x + 7$.

О т в е т: A_1 (0; –1) или A_2 (4; 3);

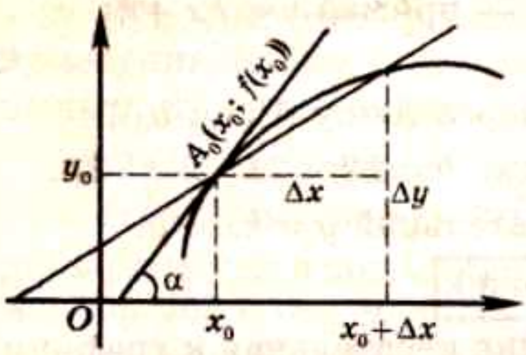
$$y = -x - 1 \text{ или } y = -x + 7.$$

Пример 3.249. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{2}\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Решение. $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $y_0 = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{8}$,

---

Справочный отдел



Касательная к графику

$$\boxed{y = kx + b.}$$

$$k = \text{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Касательная проходит через точку A_0 $(x_0; f(x_0))$.

$$f(x_0) = f'(x_0)\,x_0 + b,$$

откуда $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).} \quad (*)$$

Точка $A_0 = A$ $(x_0; y_0)$, через которую проходит график функции и касательная, называется ***точкой касания***.

Угол между двумя кривыми — это угол между касательными, проведенными к этим кривым в их общей точке.

$$y' = 2\sin\left(8x - \frac{2\pi}{3}\right),\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}.$$

По формуле (*) получаем уравнение касательной

$$y = \sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{8}.$$

Ответ: $y = \sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{8}$.

Пример 3.250. В какой точке касательная к линии $y = \ln(4x - 1)$ параллельна прямой $y = x$?

Решение. Поскольку касательная в искомой точке параллельна прямой $y = x$, то $y'(x_0) = 1$, $y'(x_0) = \frac{4}{4x_0 - 1}$.

Имеем уравнение $\frac{4}{4x_0 - 1} = 1$, откуда $x_0 = 1\frac{1}{4}$. Теперь получаем $y_0 = \ln\left(4 \cdot 1\frac{1}{4} - 1\right) = \ln 4$.

Ответ: в точке $A\left(1\frac{1}{4}; \ln 4\right)$.

Пример 3.251. Под каким углом график функции $y = \sin 2x$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

Решение. Фактически требуется найти производную при $x_0 = 0$. $y'(x) = 2\cos 2x$; $y'(0) = 2$. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, где α — искомый угол.

Ответ: $\operatorname{arctg} 2$.

Пример 3.252. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 - 7x + 3$ параллельна прямой $5x + y - 3 = 0$?

Решение. Запишем уравнение прямой так: $y = -5x + 3$. Ее угловой коэффициент $k = -5$. Параллельные прямые имеют одинаковый угловой коэффициент. Поэтому $(y'(x_0) = -5) \Leftrightarrow (2x_0 - 7 = -5) \Leftrightarrow (x_0 = 1)$. Находим y_0. $y_0 = 1^2 - 7 \cdot 1 + 3 = -3$.

Ответ: $(1; -3)$.

Упражнения

3.253. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^2$ в точке M (3; 9).

3.254. В каких точках угловой коэффициент касательной к кубической параболе $y = x^3$ равен 3?

3.255. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$ образует с осью Ox угол 45°?

3.256. При каком значении x касательная к параболе $y = x^2$ параллельна касательной к кубической параболе $y = x^3$?

3.257. В какой точке линии $y = \sqrt[3]{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 30°?

3.258. Написать уравнение касательной к кривой $y = x^3 - 1$ в точке пересечения ее с осью абсцисс.

3.259. Написать уравнение касательной к кривой $y = 2x^3 - 3x + 2$ в точке пересечения ее с осью ординат.

3.260. Касательная к кривой $y = (x^2 + 1)(x - 1)$ параллельна прямой $y = 2x + 1$. Найти координаты точки касания.

3.261. На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей?

3.262. В каких точках линии $y = x^3 + x - 2$ касательная к ней параллельна прямой $y = 4x - 1$?

3.263. Составить уравнения касательных к линии $y = x - \dfrac{1}{x}$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

3.264. Доказать, что касательные, проведенные к гиперболе $y = \dfrac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат, параллельны между собой.

3.265. На линии $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

3.266. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = \sin x$ в точке M (π; 0).

3.267. Написать уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{2 - 3x}$ в точке $x = -1$.

3.268. Написать уравнение касательной к графику функции $y = \cos(1 - 3x)$ в точке $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

3.269. Написать уравнение касательной к графику функции $y = \sin(1 - 2x)$ в точке $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

3.270. Написать уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = e^{-x}$ перпендикулярно прямой $y = \frac{1}{2}x + 3$.

3.271. Написать уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = e^{2x}$ параллельно прямой $y = 2ex + 4$.

3.272. Написать уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = e^{x}$ параллельно прямой $y = ex + 3$.

3.273. Под каким углом синусоида $y = \sin x$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

3.274. Под каким углом тангенсоида $y = \operatorname{tg} x$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

3.275. Показать, что кривые $y = 4x^2 + 2x - 8$ и $y = x^3 - x + 10$ касаются друг друга в точке M (3; 34).

3.276. Составить уравнение касательной к кривой $y = \ln x$ в точке пересечения в осью абсцисс.

3.277. Написать уравнение касательной к параболе $y = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x = 4$.

3.278. Найти уравнение параболы $y = x^2 + bx + c$, которая касается прямой $y = x$ в точке M (1; 1).

Возрастание и убывание функции

Определение 1. *Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на числовом промежутке, если для любых значений $x_1 < x_2$ из этого промежутка выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.*

Если из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется ***неубывающей.***

Определение 2. *Функция $y = f(x)$ называется* ***убывающей*** *на числовом промежутке, если для любых значений $x_1 < x_2$ из этого промежутка выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.*

Если из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется ***невозрастающей.***

Достаточные условия монотонности функции.

Теорема 1. *Если на отрезке $[a; b]$ функция $y = f(x)$ имеет производную, причем во всех точках этого отрезка выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$.*

Теорема 2. *Если на отрезке $[a; b]$ функция $y = f(x)$ имеет производную, причем во всех точках этого отрезка выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то функция $y = f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$.*

Теорема 3. *Если функция f монотонна на интервале $(a; b)$ и непрерывна в точках a и b, то она монотонна на отрезке $[a; b]$.*

Определение. *Внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю или ее не существует, называются* ***критическими.***

Пример 3.279. Найти промежутки монотонности функции $y = 12x - 3x^3$.

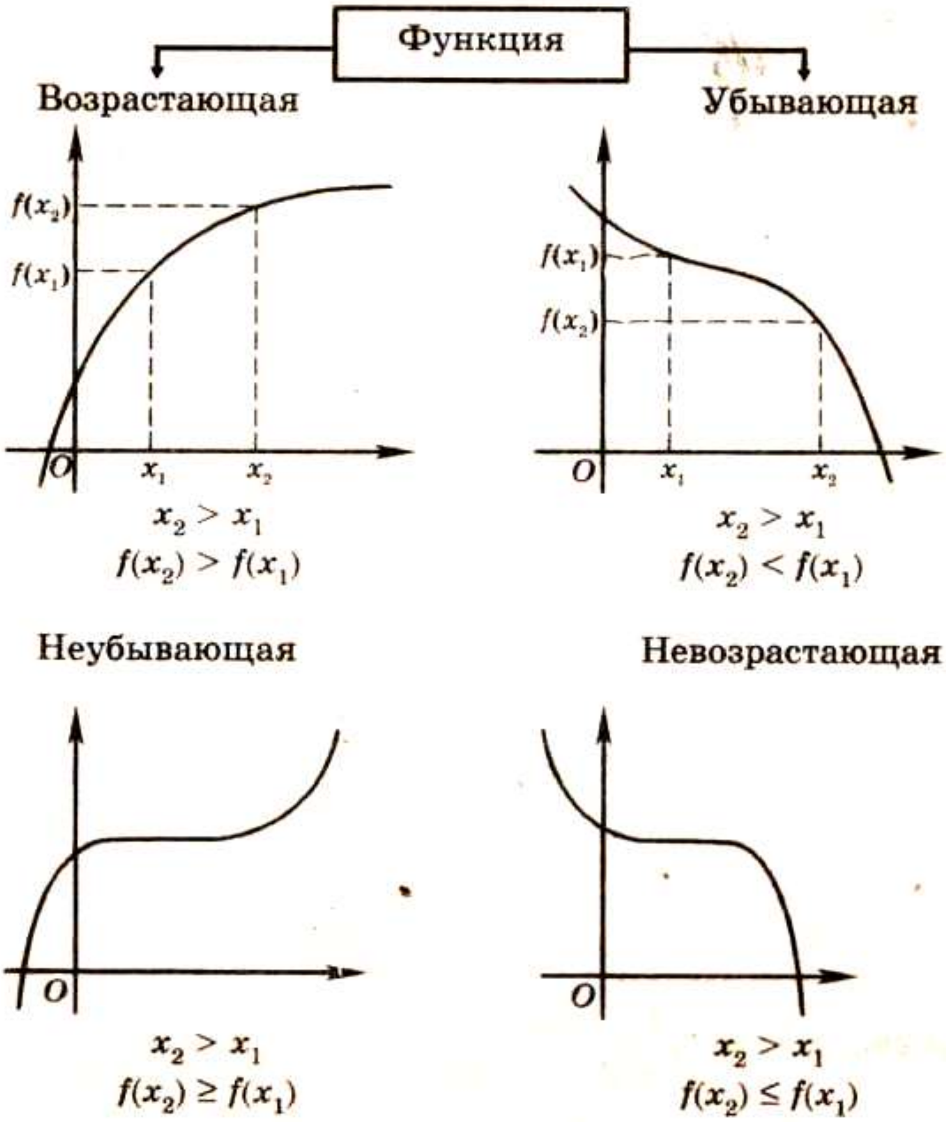
Решение. $y' = 12 - 9x^2$, $y'(x) > 0$ при $x \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $y'(x) < 0$ при $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \infty\right)$.

Согласно теоремам 1, 2 и 3, функция монотонно возрастает при $x \in \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$, монотонно убывает на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ или $\left[\frac{2}{\sqrt{3}}; \infty\right)$, так как функция непрерывна в точках $-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Пример 3.280. Доказать, что функция $\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 13x + 21$ возрастает на всей числовой прямой.

Доказательство. $y'(x) = x^2 - 6x + 13 > 0$ при любом действительном x. Согласно теореме 1, функция монотонно возрастает на всей числовой прямой.

Монотонность функции



Признаки

возрастания

$f'(x) > 0$
во всех точках некоторого интервала

убывания

$f'(x) < 0$
во всех точках некоторого интервала

При решении заданий, в которых требуется определить интервалы возрастания и убывания функции, следует прежде всего определить область существования функции.

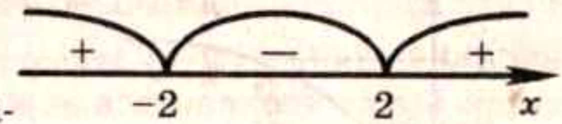
Пример 3.281. Определить интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 12x + 11$.

Решение. Область определения — все действительные числа.

1. $f'(x) = 3x^2 - 12$.

2. Решаем неравенство $3x^2 - 12 > 0$ $(f'(x) > 0)$:

$3(x-2)(x+2) > 0$.



Функция возрастает при $x \le -2$ и $x \ge 2$ и убывает при $-2 \le x \le 2$.

Упражнения

Определить интервалы возрастания и убывания функции:

3.282. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x - 2$.

3.283. $f(x) = -x^3 + 3x - 2$.

3.284. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$.

3.285. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$.

3.286. $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

3.287. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$.

3.288. $f(x) = \dfrac{x-3}{x+3}$.

3.289. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$.

3.290. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$.

3.291. $f(x) = \sqrt{(x-3)^2}$.

3.292. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{2\,|x-1|}$.

3.293. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x+1}}$.

Экстремумы функций

Определение. *Точка x_0 из области определения функции f называется точкой минимума (максимума) этой функции, если существует такая δ-окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$.*

Теорема 1 (Ферма). *Если точка x_0 является точкой минимума или максимума для функции f и в этой точке существует производная, то производная данной функции равна нулю: $f'(x_0) = 0$.*

Это условие является необходимым. Другими словами, точка экстремума является критической точкой, но не наоборот. Например, точка 0 является критической для функции $y = x^3$, однако она не является точкой экстремума.

Следующая теорема дает возможность определить, является ли критическая точка точкой экстремума.

Теорема 2. *Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ на интервале $(a;\ x_0)$ и $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ на интервале $(x_0;\ b)$, то точка x_0 является точкой максимума (минимума) функции f.*

Это условие является достаточным.

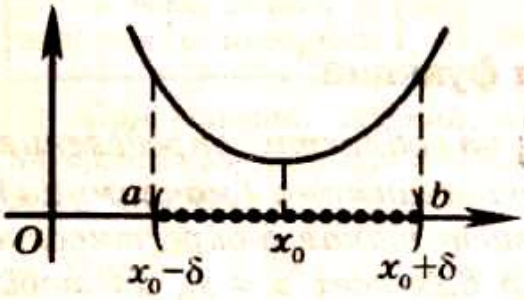
Теорема 3. *Если в точке x_0 $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума для функции $f(x)$. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то x_0 является точкой максимума.*

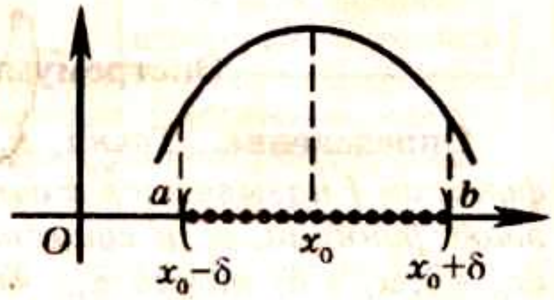
Эту теорему обычно называют ***вторым достаточным условием экстремума***.

Критические точки функции

$f'(x) = 0$

$f'(x)$ не существует





$f(x_0) \le f(x)$	$f(x_0) \ge f(x)$
минимум	**максимум**
$f'(x) < 0$ на $(a; x_0)$	$f'(x) > 0$ на $(a; x_0)$
$f'(x) > 0$ на $(x_0; b)$	$f'(x) < 0$ на $(x_0; b)$
x_0 — точка минимума	x_0 — точка максимума

II способ.

Экстремумы

$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) > 0$	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) < 0$

Критические точки функции, максимумы и минимумы

3.294. Найти критические точки функции:

а) $f(x) = 2 - 3x + 5x^2$; *в)* $f(x) = x - 2\sin x$;

б) $f(x) = 4 + \cos 2x$; *г)* $f(x) = 4x - \dfrac{x^3}{3}$.

3.295. Найти точки минимумов и максимумов:

а) $f(x) = -x^3 + 12x + 7$; *в)* $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$;

б) $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 1$; *г)* $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2$.

Найти экстремумы функции:

3.296. $y = 2x^3 - 3x^2$.

3.297. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

3.298. $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$.

3.299. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$.

3.300. $y = -2x^4 - 8x^2 + 9$.

3.301. $y = x^3 + \dfrac{3}{x}$.

3.302. $y = \sin^2 x - \cos x$.

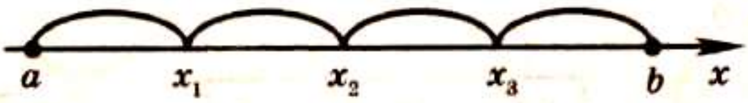
3.303. $y = 10 \cos x + \sin 2x - 6x$

I. Правило для исследования функции на экстремум при помощи первой производной

1. Найти $f'(x)$.

2. Найти все критические точки ($f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует).

3. Расположить их на координатной прямой в данном отрезке $[a; b]$.



Справочный отдел

Необходимое условие экстремума.

Если функция $f(x)$ имеет экстремум при $x = x_0$, то производная в этой точке равна нулю или вовсе не существует.

Из этого следует, что точки экстремума функции следует разыскивать только среди тех, в которых ее производная $f'(x)$ равна нулю или не существует.

Указанный признак экстремума является только необходимым условием, но не достаточным. Поэтому каждую из критических точек в отдельности надо исследовать.

4. Внутри каждого промежутка знакопостоянства взять любую точку и найти знак первой производной в этой точке.

5. Если знаки $f'(x)$ в двух соседних интервалах различны, то экстремум есть

Изменение

$\boxed{+}$ на $\boxed{-}$ — max

$\boxed{-}$ на $\boxed{+}$ — min

Если знак в двух соседних интервалах сохраняется, то экстремума в рассматриваемой критической точке нет.

6. Найти значение функции в точке, где она достигает экстремума (экстремальные значения функции).

II. Правило для исследования функции на экстремум при помощи второй производной

1. Найти $f'(x)$.
2. Решить уравнение $f'(x) = 0$.
3. Найти $f''(x)$.
4. Исследовать знак $f''(x)$ для каждого корня уравнения $f'(x) = 0$.

Если для точки x

$f''(x) > 0$, то в ней минимум

$f''(x) < 0$, то в ней максимум

(Если в рассматриваемой точке $f''(x) = 0$, то исследование проводим по I правилу).

Следует помнить:

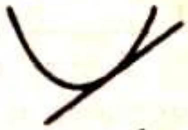
1. Максимум (минимум) не является обязательно наибольшим (наименьшим) значением, принимаемым функцией. Вне рассматриваемой окрестности точки x_0 функция может принимать большие (меньшие) значения, чем в этой точке.

2. Функция может иметь несколько максимумов и минимумов.
3. Функция, определенная на отрезке, может достигнуть экстремума только во внутренних точках этого промежутка.

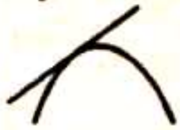
Выпуклость функции

Определение.

1. График функции обращен выпуклостью вниз, если график расположен выше касательной, проведенной в любой точке графика. В этом случае функцию называют *вогнутой*.



2. График функции обращен выпуклостью вверх, если график расположен ниже касательной, проведенной в любой точке графика. В этом случае функцию называют *выпуклой*.



Понятие выпуклости функции дальше используется для построения графиков.

Точка перегиба отделяет выпуклую дугу от вогнутой:

$\boxed{\text{Точки перегиба следует искать среди критических точек второго рода}}$

$f''(x) = 0$ — $f''(x)$ не существует

Для определения точек перегиба кривой надо определить все критические точки второго рода и рассмотреть знаки $f''(x)$ в каждом интервале, на которые эти точки делят область существования функции.

$f''(x)$ в соседних интервалах различны	$f''(x)$ в соседних интервалах одинаковы
критические точки перегиба II рода	в рассматриваемой критической точке II рода точки перегиба нет

Пример 3.304. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции $y = 5x^2 + 16x - 4$.

Решение. Область существования функции $(-\infty; \infty)$.

$$y' = 10x + 16; \quad y'' = 10 > 0.$$

Так как $y'' > 0$ при любом значении x, то кривая вогнута на интервале $(-\infty; \infty)$. Точек перегиба нет.

Пример 3.305. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $y = -3x^2 + 4x - 7$.

Решение. Область существования функции $(-\infty; \infty)$.

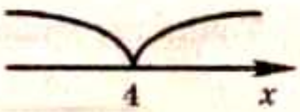
$$y' = -6x + 4, \quad y'' = -6 < 0.$$

Кривая выпукла на интервале $(-\infty; \infty)$. Точек перегиба нет.

Пример 3.306. Найти точку перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = x^3 - 12x^2 + 8x + 3$.

Решение. Область существования функции $(-\infty; \infty)$.

$y' = 3x^2 - 24x + 8; \quad y'' = 6x - 24.$



Найдем критическую точку второго рода: $y'' = 0$; $6x - 24 = 0$; $x = 4$. Имеем два интервала $(-\infty; 4)$ и $(4; \infty)$.

При любом x имеем из первого интервала $y'' < 0$, из второго $y'' > 0$, а потому точка с абсциссой $x = 4$ — точка перегиба. В первом интервале $y'' < 0$ — дуга кривой выпукла, а во втором $y'' > 0$ — дуга кривой вогнута. Координаты точки перегиба $(4; 85)$.

3.307. Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции:

1) $y = \sin x$, $x \in [0; 2\pi]$;

2) $y = \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$;

3) $y = x^{2n}$, $x \in \mathbf{R}$;

4) $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

5) $y = a^x$, $x \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$;

6) $y = \log_a x$, $x \in (0; \infty)$, $a > 1$;

7) $y = x^{2n+1}$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$;

8) $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; \infty)$;

9) $y = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$;

10) $y = x^3 - 3x^2 + 2$, $x \in \mathbf{R}$;

11) $y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{10 - x}$, $x \in [2; 10]$;

12) $y = x \ln x$, $x \in (0; \infty)$;

13) $y = \frac{x}{1 + x^2}$, $x \in \mathbf{R}$;

14) $y = 2^x + 2^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$;

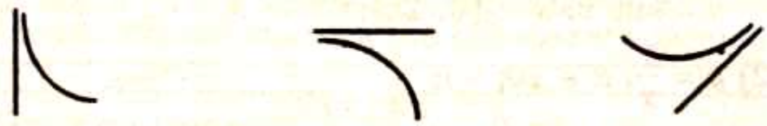
15) $y = \frac{x - 3}{x + 3}$;

16) $y = 2x^2 - x^3$;

17) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$;

18) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

Асимптоты



вертикальная	горизонтальная	наклонная
при $x \to a$ $f(x) \to \pm\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$	$y = kx + b$ $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$

Следует отметить, что наклонные асимптоты существуют в том случае, когда оба предела имеют конечные значения.

Пример 3.308. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{2}{x^2 - 4}$.

Решение. 1) Находим горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2 - 4} = 0 \text{ и } \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^2 - 4} = 0.$$

Горизонтальная асимптота одна: $y = 0$ (ось Ox).

2) находим вертикальные асимптоты: $y \to \infty$ при $x^2 - 4 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

3) Наклонной асимптоты нет.

Пример 3.309. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x + 3}$.

Решение. 1) Горизонтальных асимптот нет.

2) Так как y неограничено возрастает, когда $x \to -\dfrac{3}{2}$, то имеется вертикальная асимптота. Ее уравнение $x = -\dfrac{3}{2}$.

3) Определим наклонные асимптоты, уравнение которых имеет вид $y = kx + b$, а k и b определяются по формулам

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2+1}{2x+1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{2x^2+3x} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+1}{2x+3} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x+2}{4x+6} = -\frac{3}{4},$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

3.310. Найти асимптоты функции:

1) $y = \dfrac{2x+1}{x-4}$;

2) $y = \dfrac{3-x}{3x+2}$;

3) $y = \dfrac{1-x^2}{3-x^2}$;

4) $y = \dfrac{x^2-x+3}{x+1}$;

5) $y = \dfrac{x^2-x-5}{x-3}$;

6) $y = \dfrac{3x^2-2}{x+4}$;

7) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

8) $y = \dfrac{1}{\cos x}$;

9) $y = \ln \cos x$;

10) $y = \dfrac{x-2}{x^2-1}$;

11) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$;

12) $y = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 1$.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения.

Этих значений функция достигает или в критических точках, или на концах отрезка $[a; b]$.

Чтобы определить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, необходимо:

1. Определить критические точки функции;
2. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка $[a; b]$;
3. Наибольшее из полученных значений и будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции на отрезке $[a; b]$.

Пример 3.311. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ на отрезке $[-2; 4]$.

Решение. $f'(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$. Находим критические точки. $f'(x) = 0$ при $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$, $x(x^2 - 2x - 3) = 0$. Затем находим значения функции в каждой из критических точек и на концах данного отрезка: $f(0) = 2$, $f(-1) = 1\frac{5}{12}$, $f(3) = -9\frac{1}{4}$, $f(-2) = 5\frac{1}{3}$, $f(4) = -1\frac{1}{2}$.

Выбирая из полученных пяти чисел наибольшее и наименьшее, имеем

Ответ: $\max\limits_{x \in [-2;\,4]} f(x) = f(-2) = 5\frac{1}{3}$,

$\min\limits_{x \in [-2;\,4]} f(x) = f(3) = -9\frac{1}{4}$.

Пример 3.312. Найти промежутки монотонности и экстремумы функций:

а) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $y' = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$;

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
$y'(x)$	+	0	—	0	+
$y(x)$	↗	max	↘	min	↗

б) $y = \frac{3-x^2}{x+2}$, $y' = \frac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2}$.

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -2)$	$(-2; -1)$	-1	$(-1; \infty)$
$y'(x)$	—	0	+	+	0	—
$y(x)$	↘	min	↗	↗	max	↘

Пример 3.313. При каких действительных x функция, заданная уравнением $y = \frac{2x-1}{2x-x^2-4}$, принимает наименьшее значение?

Решение. $D(y) = \mathbf{R}$,

$$y'(x) = \frac{2(2x - x^2 - 4) - (2 - 2x)(2x - 1)}{(2 - x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2 - x - 3)}{(2x - x^2 - 4)^2}, \quad \lim_{x \to \pm\infty} y = 0.$$

Составим таблицу монотонности и экстремумов функции.

x	y'	y
$\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$	+	↗
$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$	0	max
$\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$	—	↘
$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	0	min
$\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; \infty\right)$	+	↗

Очевидно, в данном случае экстремальные точки являются одновременно точками, где функция достигает наименьшего и наибольшего значений соответственно $\min\limits_{x \in \mathbf{R}} y = y\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

3.314. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 1$ на отрезке $[-2; 0]$;
2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на отрезке $[2; 5]$;
3) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 16x^2$ на отрезке $[-3; 1]$;
4) $y = x^3 - 2x^2 + 8x - 2$ на отрезке $[-1; 1]$;
5) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + 1$ на отрезке $[-3; -1]$;
6) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на отрезке $[-2; 2]$;
7) $y = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ на отрезке $[1; 6]$;

8) $y = x^3 - 3x^2 + 3,\ x \in [-1;\ 2]$;

9) $y = 3x^4 + 4x^3 + 1,\ x \in [-2;\ 1]$;

10) $y = x^5 - x^3 + x + 2,\ x \in [-1;\ 1]$;

11) $y = x^4 - 2x^2 + 5,\ x \in [-2;\ 2]$;

12) $y = x + 2\sqrt{x},\ x \in [0;\ 4]$;

13) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1,\ x \in [-1;\ 2]$;

14) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2,\ x \in [-1;\ 1]$;

15) $y = \sqrt{100 - x^2},\ x \in [-6;\ 8]$;

16) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2},\ x \in [0;\ 1]$.

3.315. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = 3x - 2\sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 4]$;

2) $y = 4x^3 - 27x^2 + 24x - 6$ на отрезке $[0;\ 2]$;

3) $y = x^3 - 9x$ на отрезке $[-1;\ 2]$;

4) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ на отрезке $[-4;\ 5]$;

5) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[-1;\ 3]$;

6) $y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ на отрезке $[-4;\ 0]$;

7) $y = x - \ln x$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{2};\ e\right]$;

8) $y = \cos^2 x - \sin x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.