По заказу Министерства просвещения РСФСР

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ И ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Диафильм по математике для восьмилетней школы

I. Функция и способы её задания

Среди основных понятий математики одним из важнейших является ФУНКЦИЯ.

Величина Y называется функцией переменной величины X, если каждому допустимому значению X соответствует определённое значение Y.

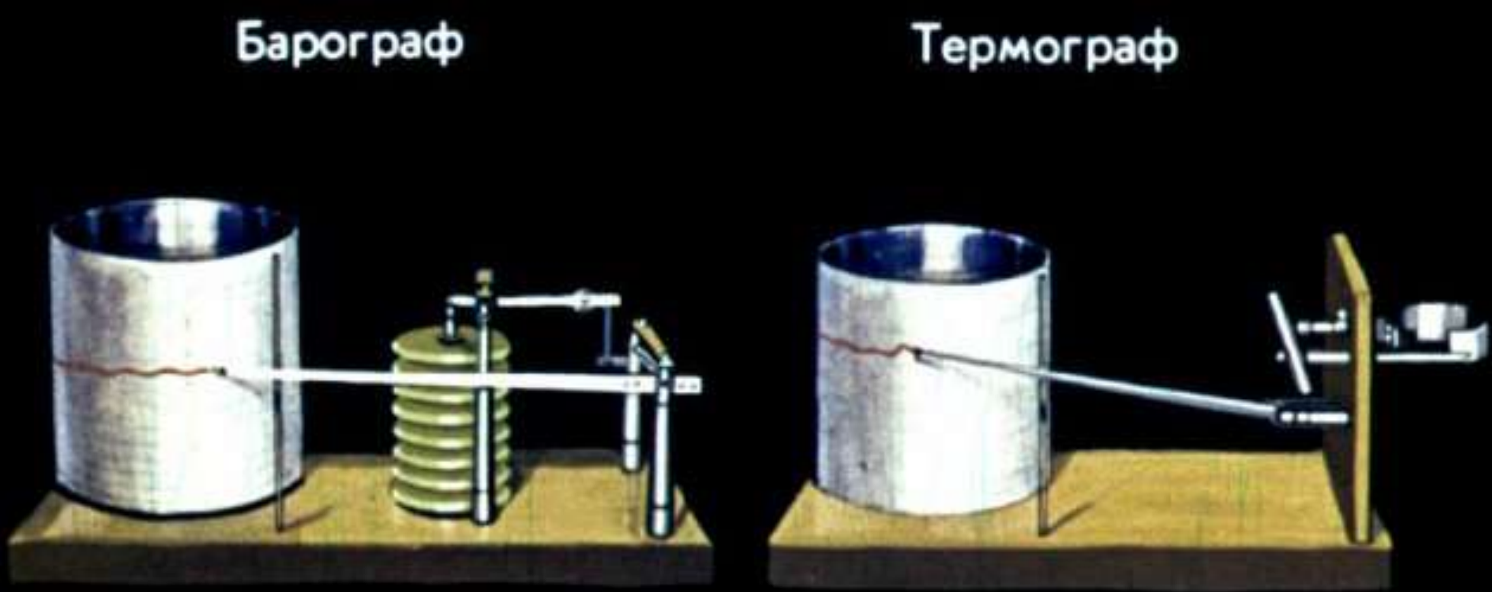
Следовательно, чтобы задать функцию, необходимо указать, какие значения аргумента (X) считаются допустимыми, и указать правило, по которому для каждого допустимого значения аргумента устанавливается соответствующее значение функции.

4

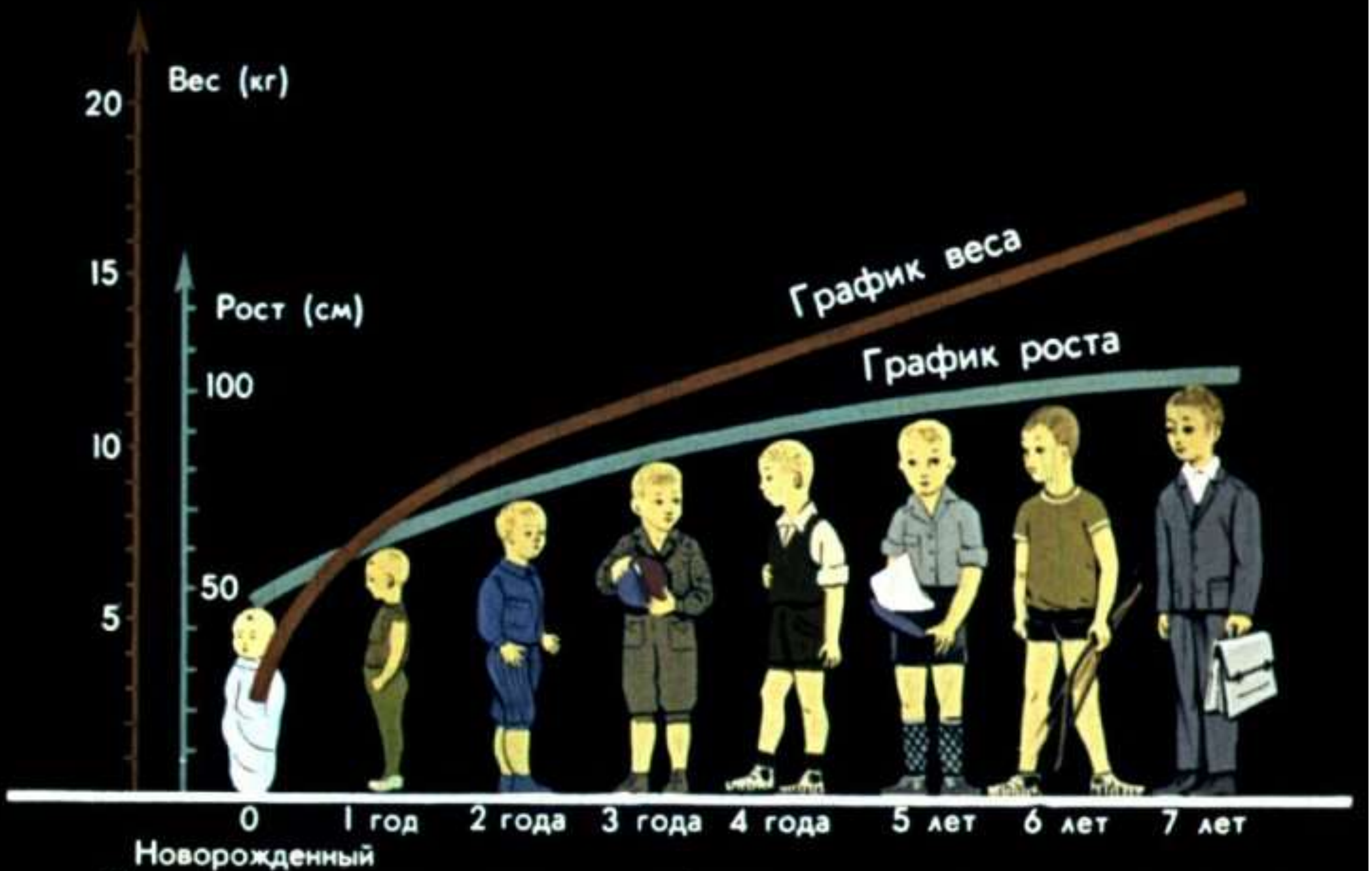
Кривая, выражающая зависимость температуры от времени

Время в часах	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура воздуха в °C	7,6	6,0	5,6	7,4	10,0	12,4	13,8	14,2	14,0	12,4	10,2	9,6	9,2

Функция может быть задана таблицей или графиком.



Графическое задание функции можно получить автоматически при помощи различных приборов. На этих рисунках показано, как барограф и термограф чертят графики изменения давления и температуры в зависимости от изменения времени.



Здесь представлены графики нормального веса и роста детей в возрасте до 7 лет.

Очень хорошо, когда функция задана формулой (аналитически).

Вот примеры аналитического задания функции:

$S = v_0 t$ При равномерном движении путь равен произведению скорости тела на время его движения.

$F = m_0 a$ Сила равна произведению массы тела на его ускорение.

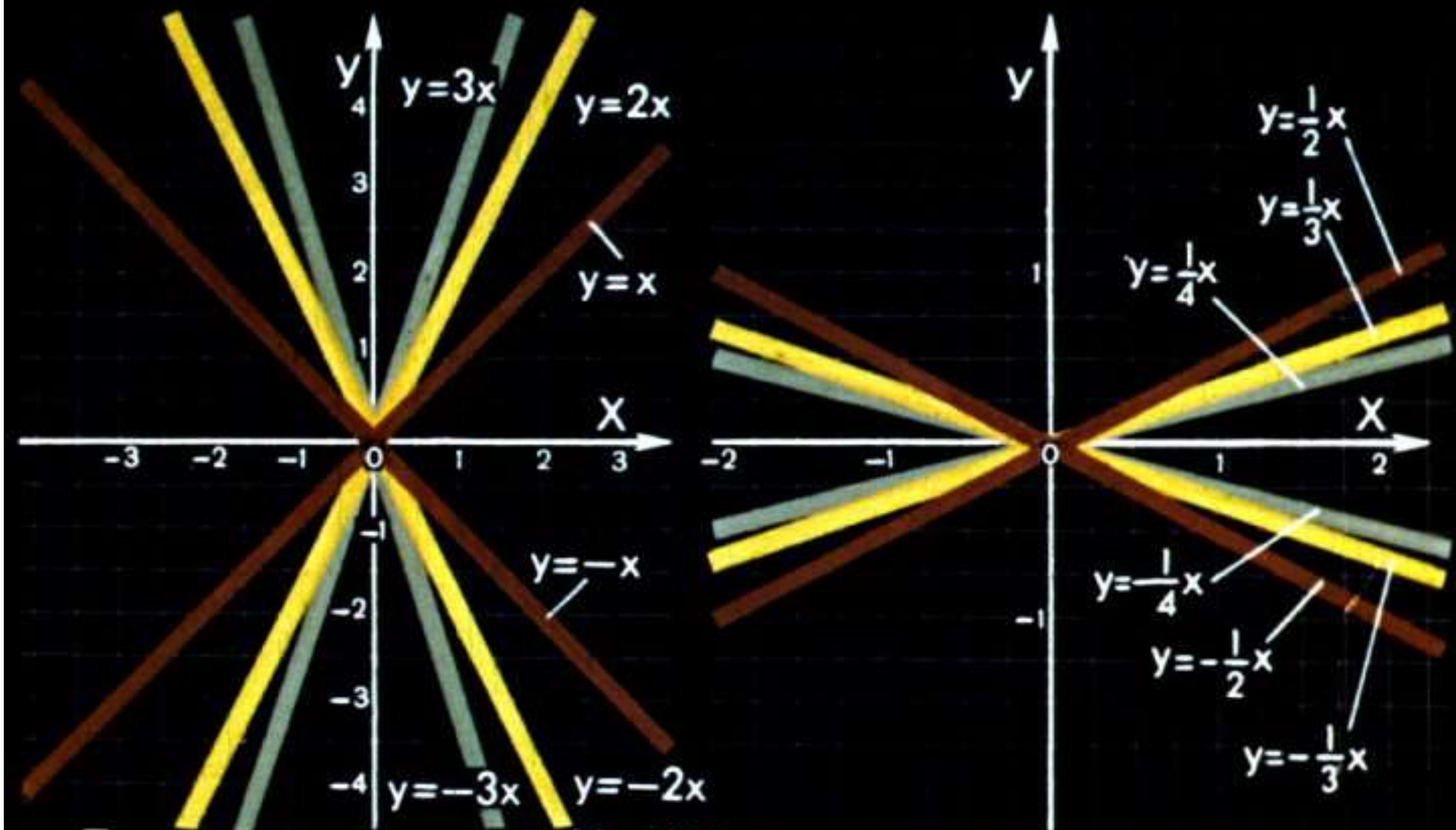
Обе эти функции могут быть записаны формулой $y = kx$.

$S=\frac{a}{2}t^2$ При равноускоренном движении путь пропорционален квадрату времени.

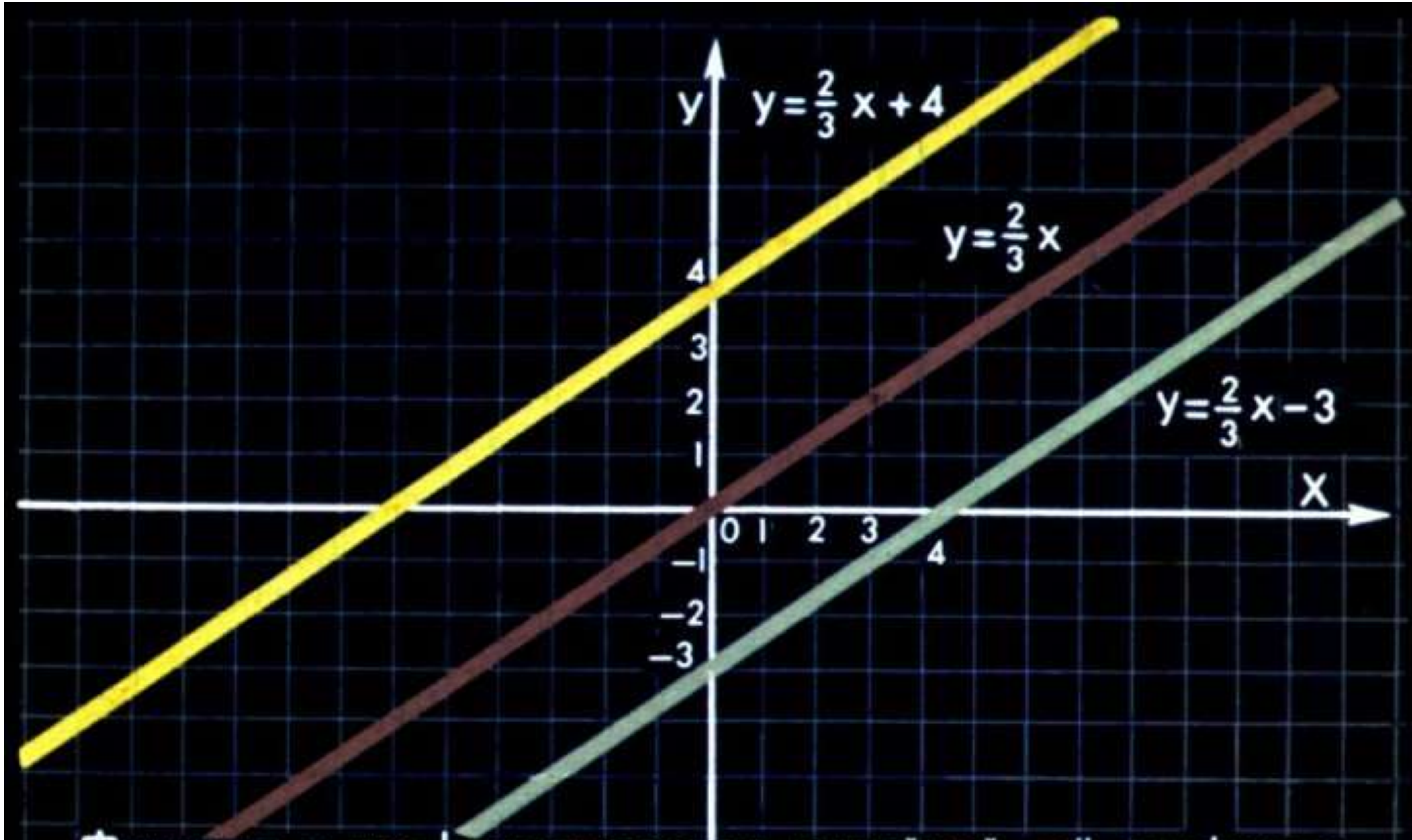
$S=3{,}14R^2$ Площадь круга пропорциональна квадрату его радиуса.

Эти функции могут быть записаны формулой $y=ax^2$.

II. Линейная функция и графическое решение линейных систем



Графиком функции Y=KX служит прямая, проходящая через начало координат („K“ – характеризует угол наклона прямой с положительным направлением оси OX и называется угловым коэффициентом).



Функция $y=kx+b$ называется линейной, её графиком служит прямая, у которой „k" – угловой коэффициент, а „b" показывает отрезок, отсекаемый прямой на оси OY.

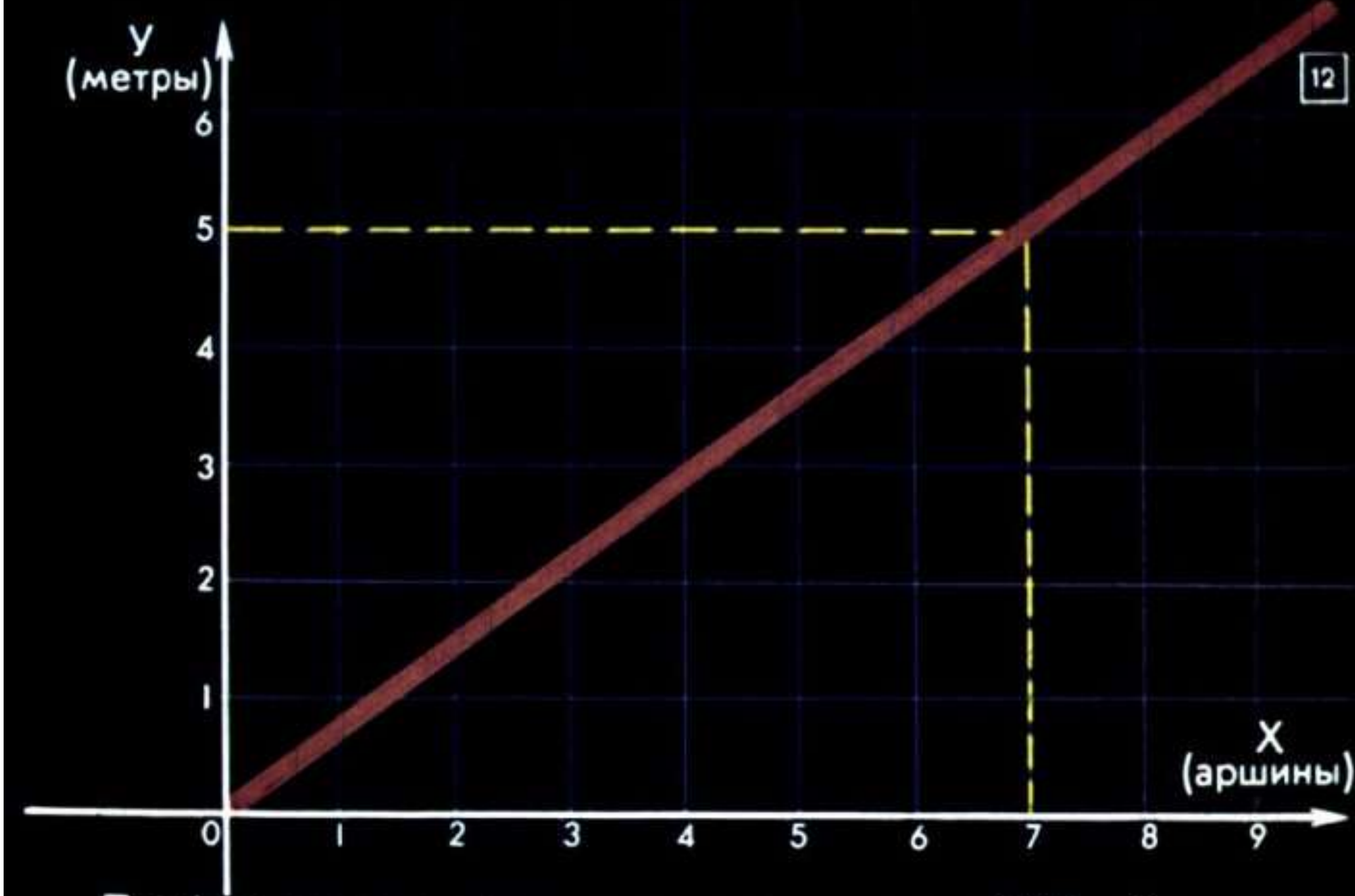
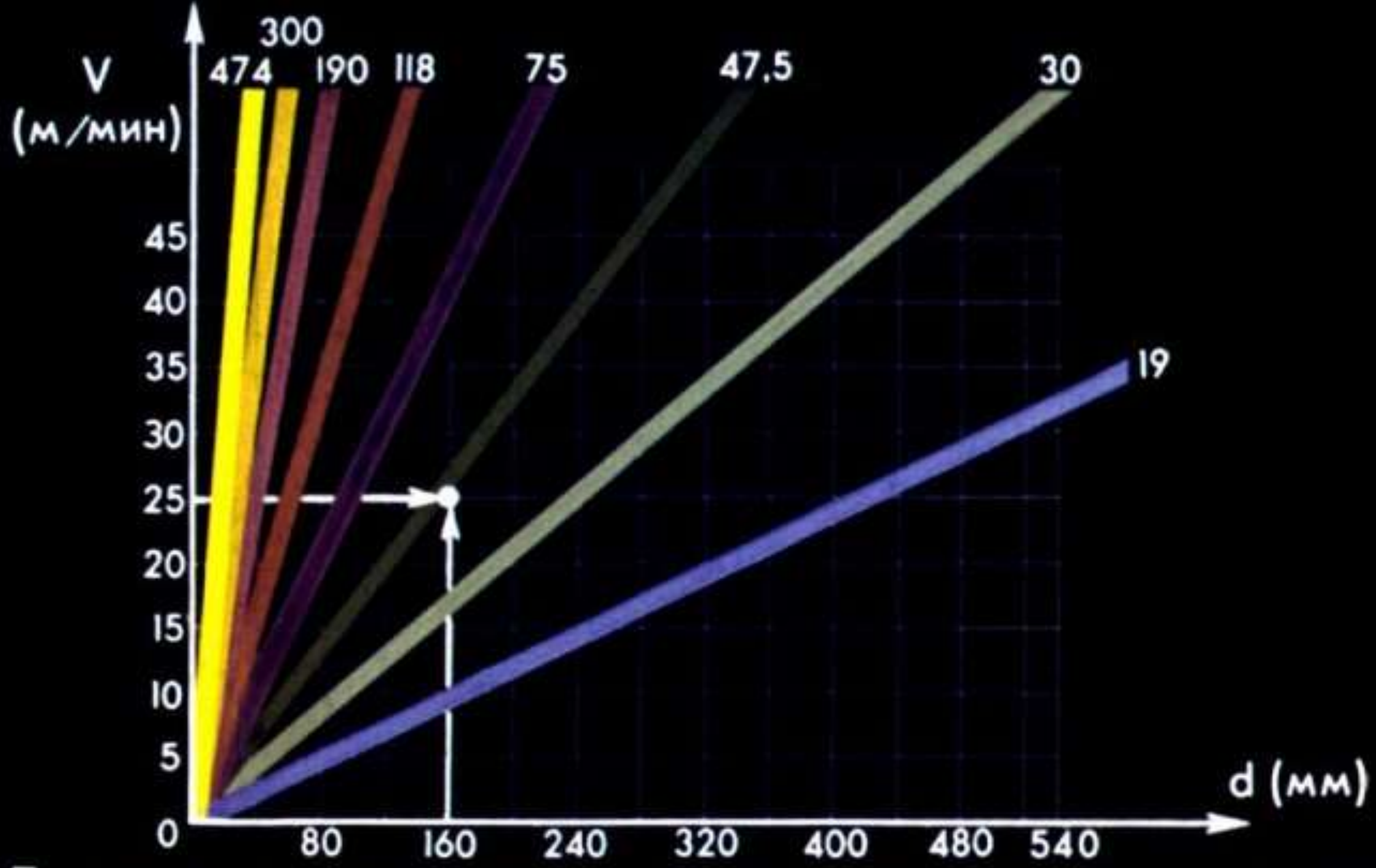


График перевода аршинов в метры $y=0{,}71x$ (1 аршин $\approx 0{,}71$ м). На графике показано, что 7 аршинов ≈ 5 м.

Температура в градусах по Цельсию	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Температура в градусах по Фаренгейту	32	50	68	86	104	122	140	158	176	194	212

График для подсчёта веса (кг) некоторых металлов в зависимости от объёма (дм³).



Лучевой график для расчёта при резании металла на токарных станках $V=\frac{3,14}{1000}\,d\cdot n$

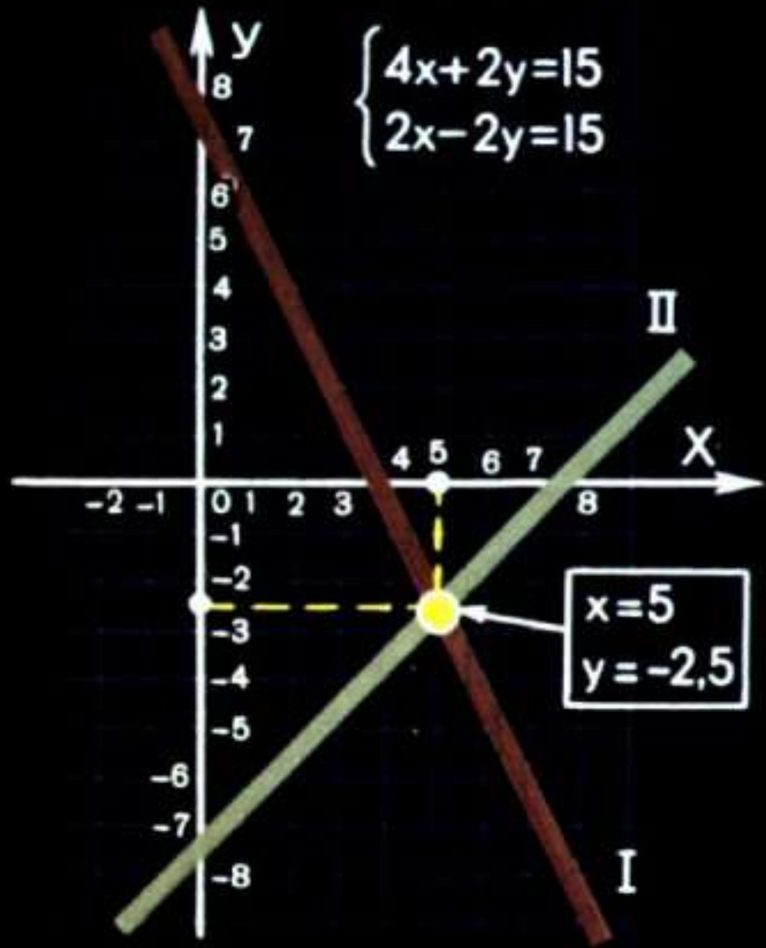
Пример: при d=160 мм и V=25 м/мин. число оборотов n≈48 об/мин.

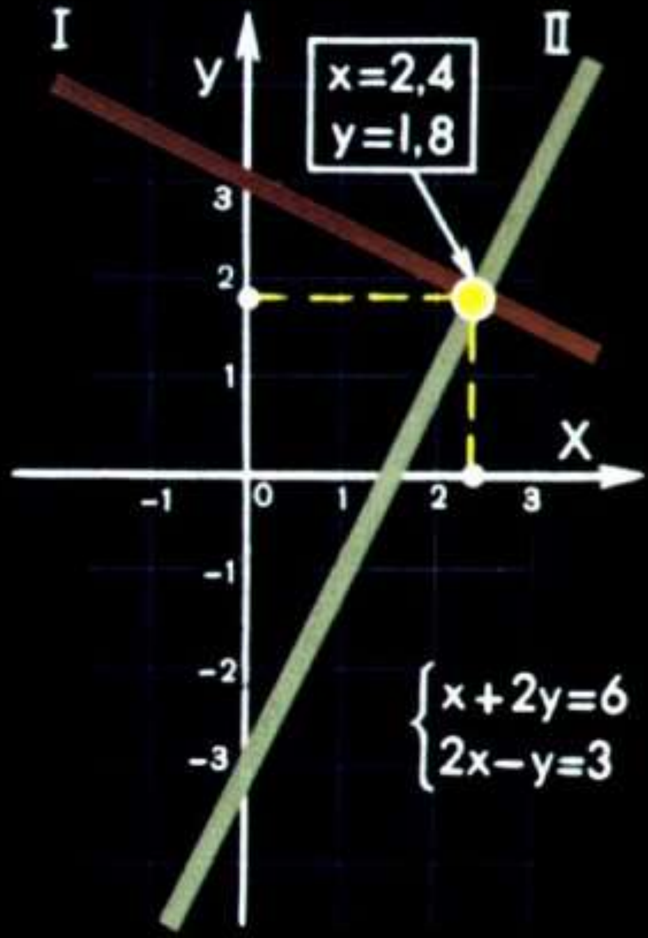
Перейдём к графическому решению систем уравнений. Для графического решения системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

достаточно построить прямые, выражающие каждое из этих уравнений, тогда координаты точки пересечения прямых дадут искомое решение.

В следующих кадрах покажем примеры графического решения систем уравнений первой степени с двумя переменными.

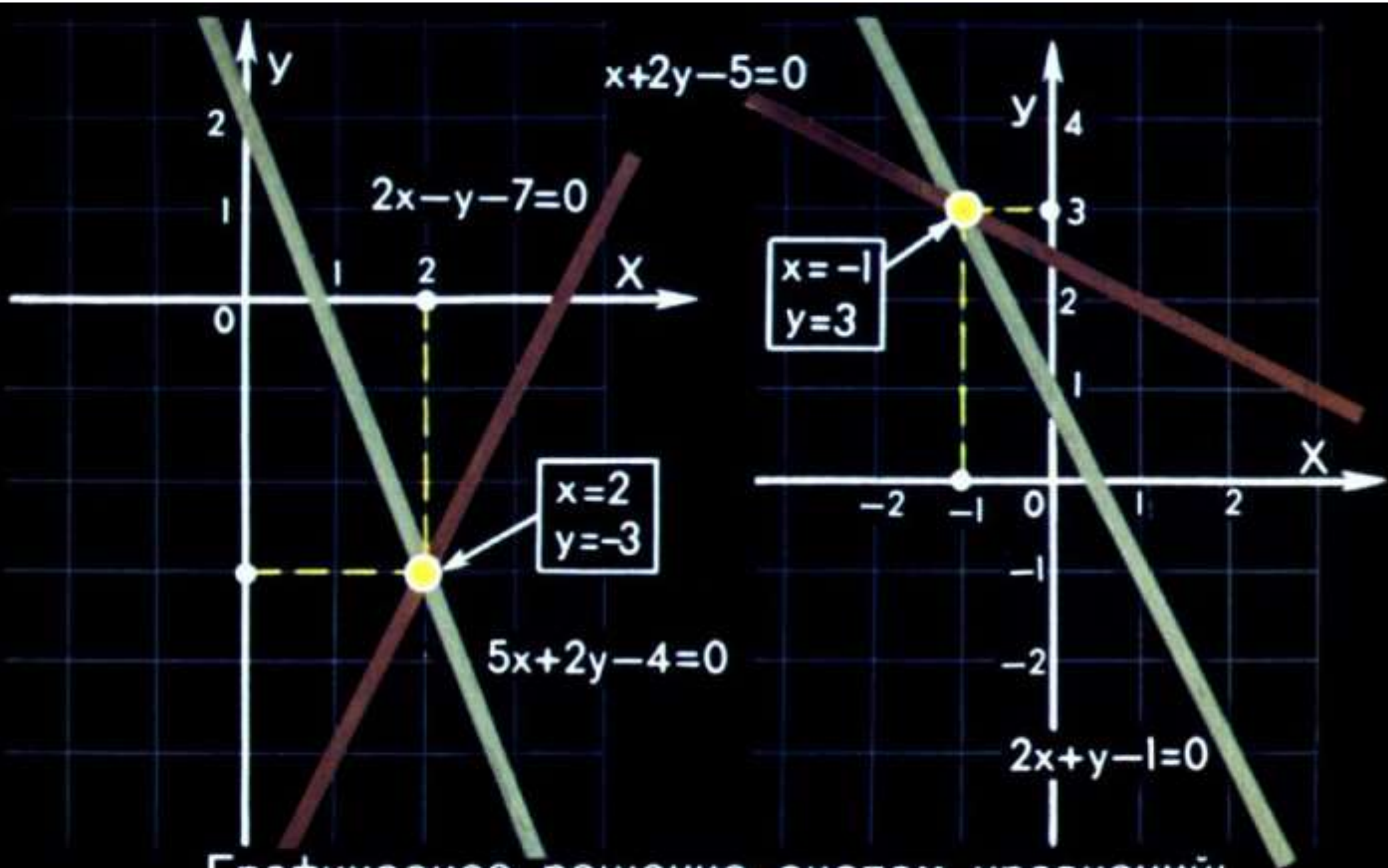




Графическое решение систем уравнений:

$$\begin{cases} 4x+2y=15 \\ 2x-2y=15 \end{cases}$$

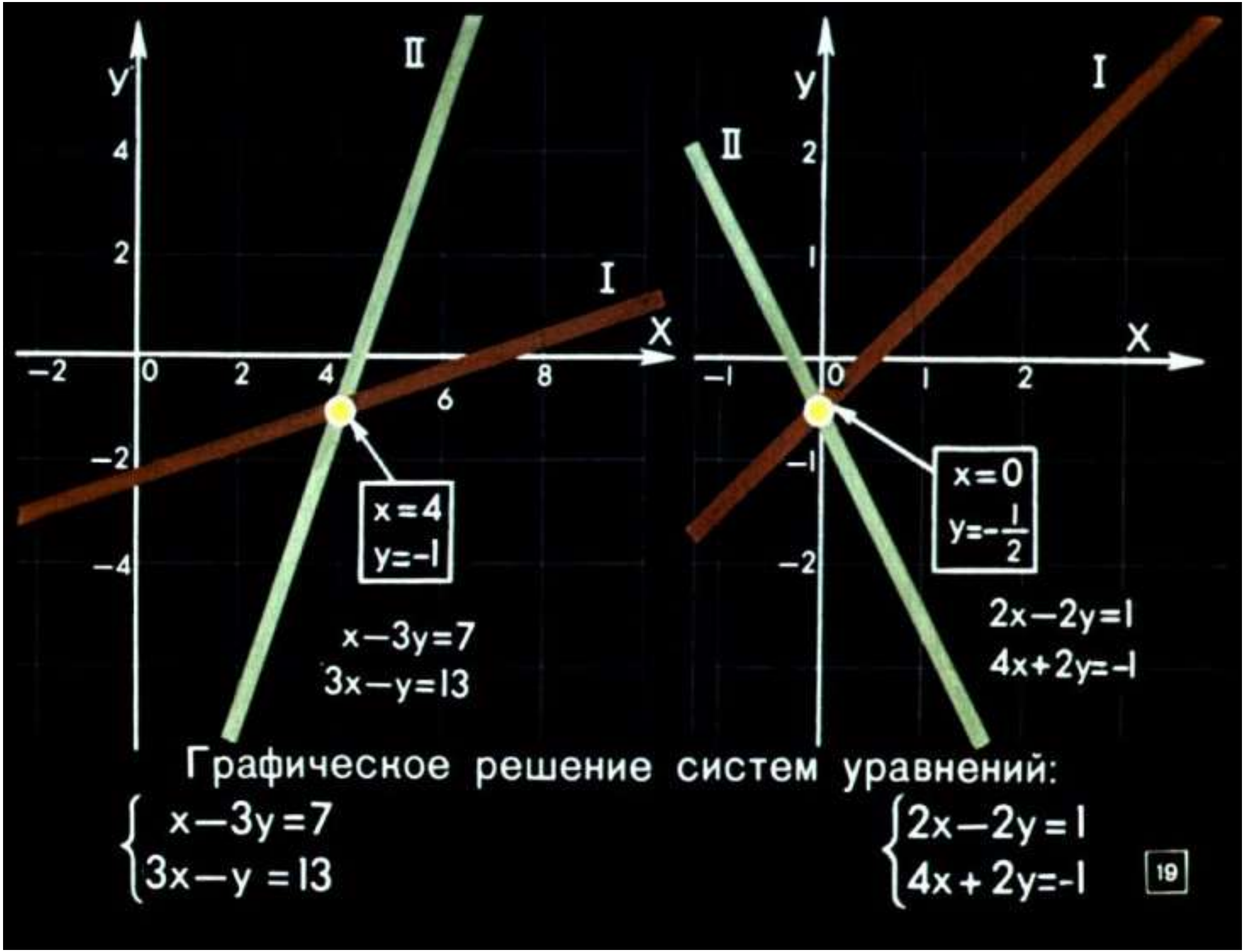
$$\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

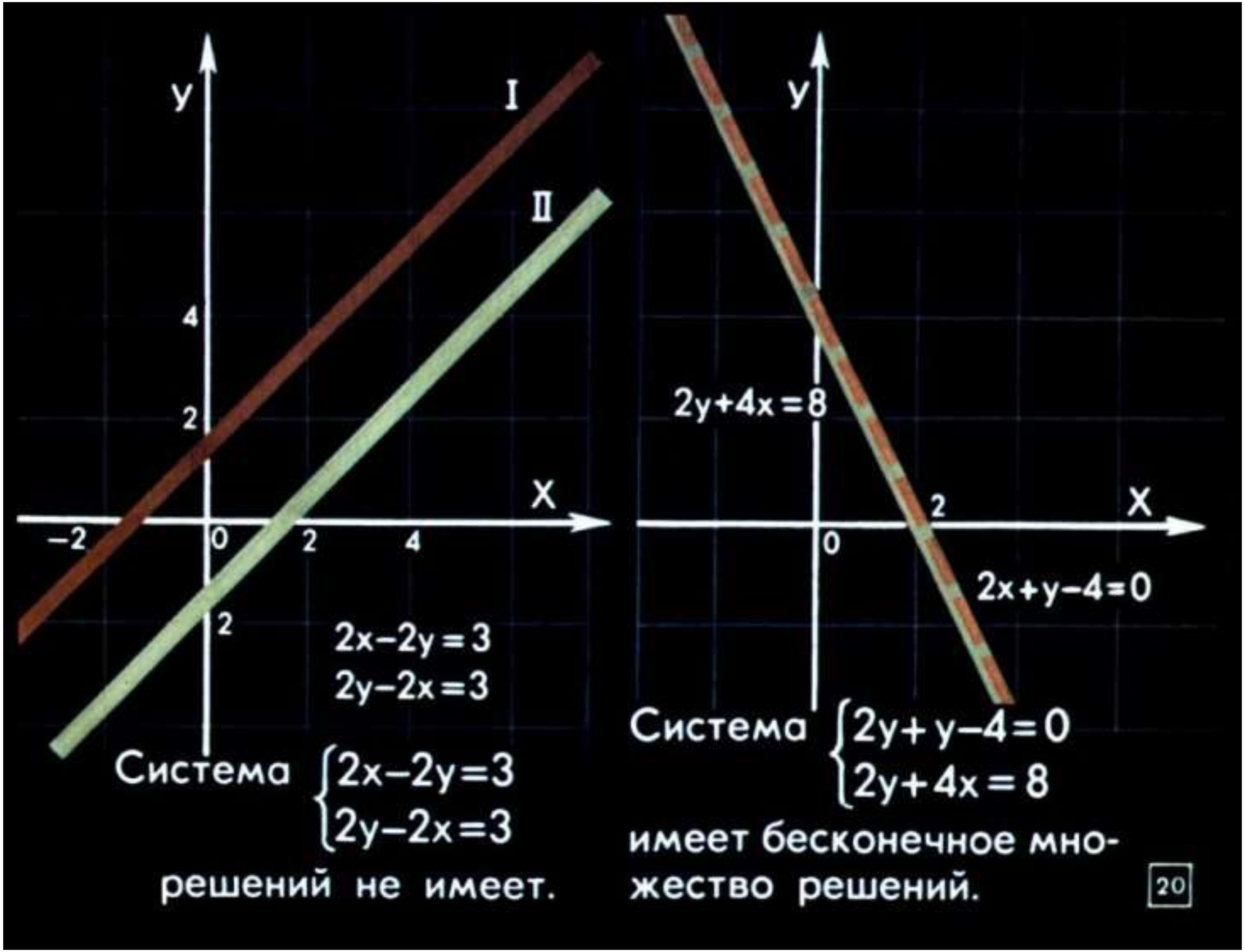


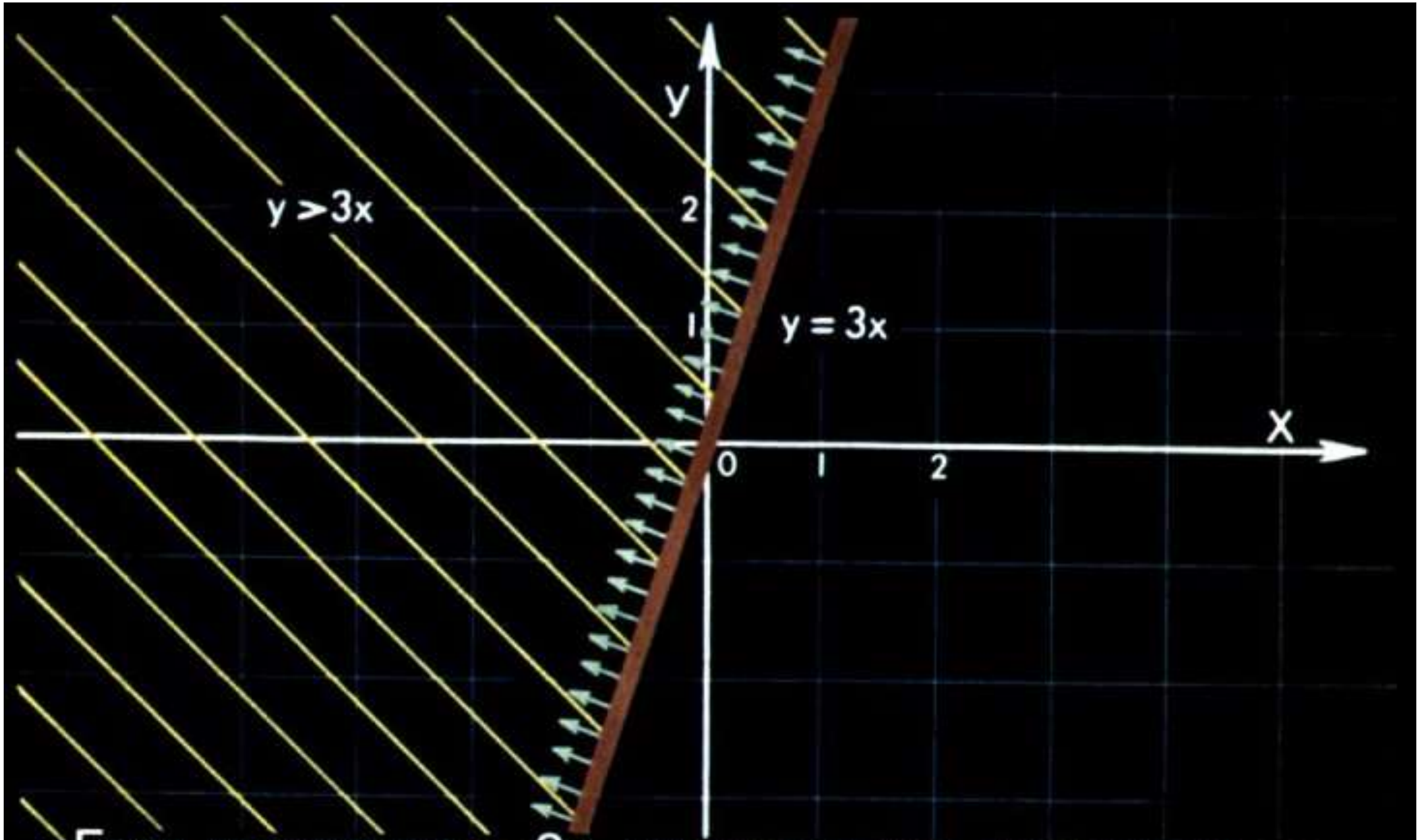
Графическое решение систем уравнений:

$$\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 5x+2y-4=0 \end{cases}$$

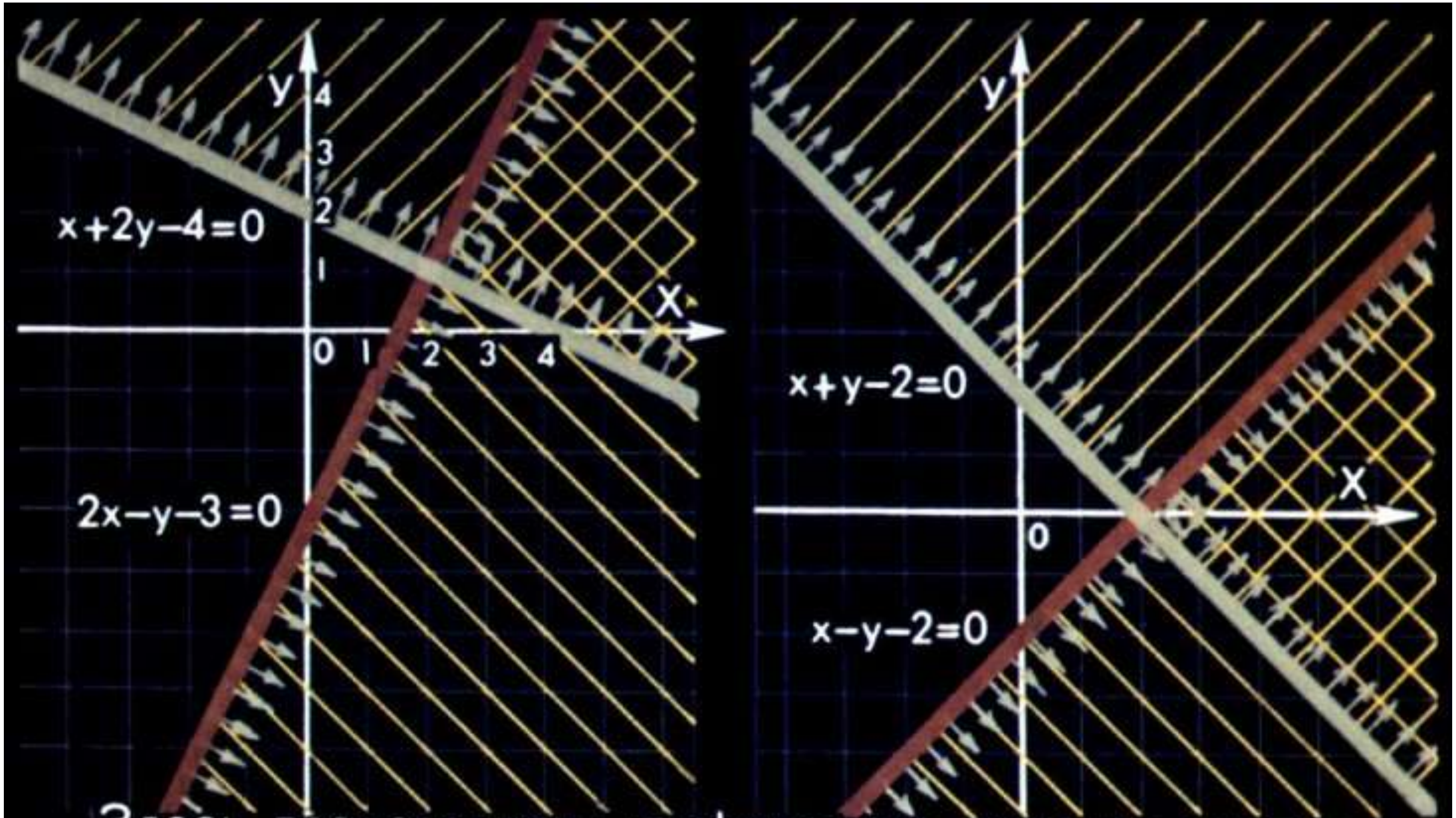
$$\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$$


y
II
I
X
x = 4
y = −1
x − 3y = 7
3x − y = 13
y
I
II
X
x = 0
y = −1/2
2x − 2y = 1
4x + 2y = −1
Графическое решение систем уравнений:
{ x − 3y = 7
{ 3x − y = 13
{ 2x − 2y = 1
{ 4x + 2y = −1
19


y
I
II
4
2
X
−2
0
2
4
2
2x−2y = 3
2y−2x = 3
Система $\begin{cases} 2x-2y=3 \\ 2y-2x=3 \end{cases}$
решений не имеет.
y
2y+4x = 8
2
X
0
2x+y−4=0
Система $\begin{cases} 2y+y-4=0 \\ 2y+4x=8 \end{cases}$
имеет бесконечное множество решений.
20



Если уравнению $y=3x$ соответствует множество точек, расположенных на прямой, то неравенству $y>3x$ удовлетворяют все точки заштрихованной полуплоскости.



Здесь представлены графические решения систем линейных неравенств.

$$\begin{cases} x+2y-4>0 \\ 2x-y-3>0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y-2>0 \\ x-y-2>0 \end{cases}$$

III. Квадратичная функция. Графическое решение квадратных уравнений

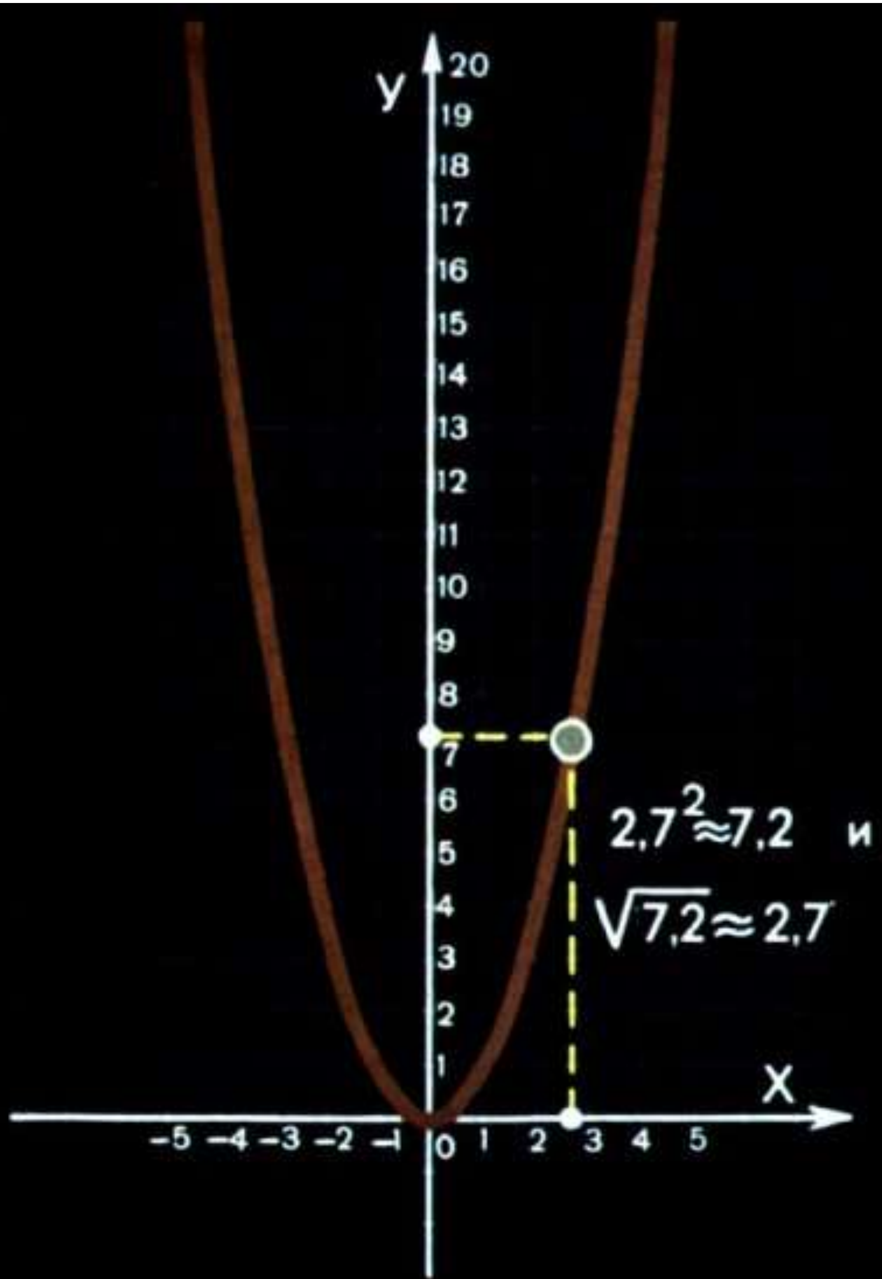
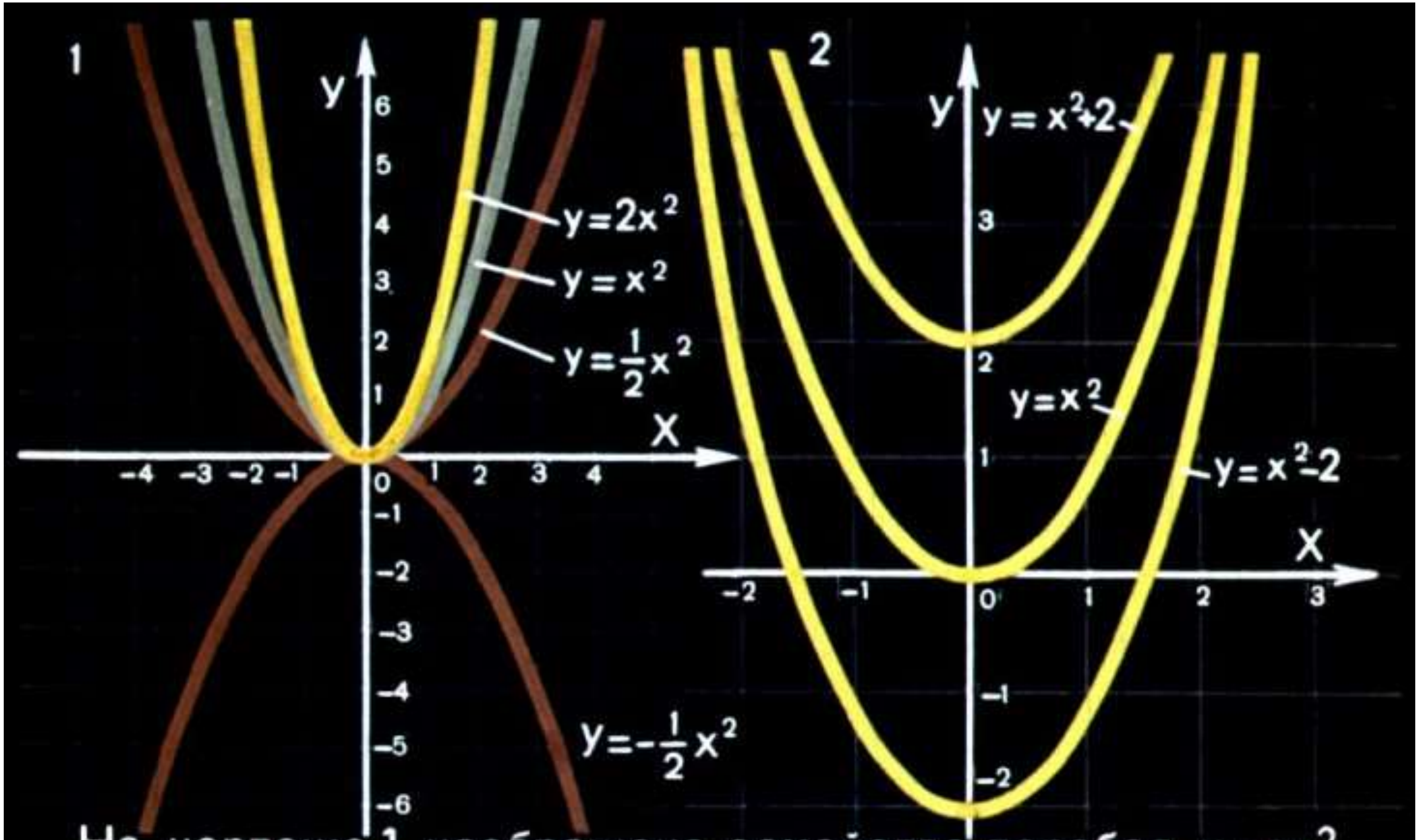


График функции вида $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ называется квадратной параболой. При $c = 0$, $b = 0$ и $a = 1$ получаем квадратичную функцию $y = x^2$, график которой представлен в этом кадре. Пользуясь этим графиком, можно находить приближённые значения квадратов чисел и извлекать квадратные корни.



На чертеже 1 изображено семейство парабол $y=ax^2$ при $a=1$; $a=\frac{1}{2}$; $a=2$ и $a=-\frac{1}{2}$.

На чертеже 2 изображено семейство парабол $y=x^2+c$ при $c=0$, $c=2$ и $c=-2$.

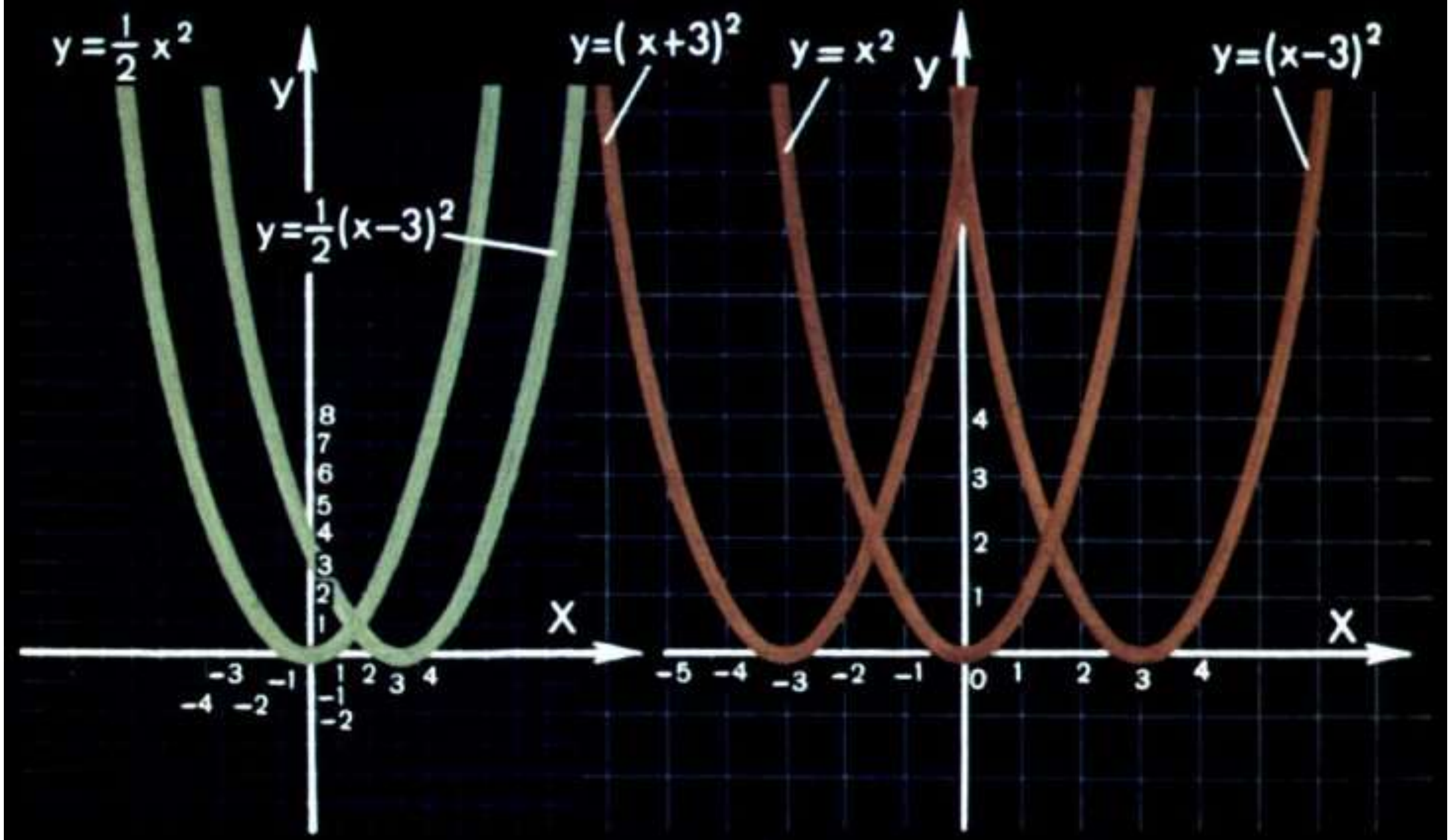
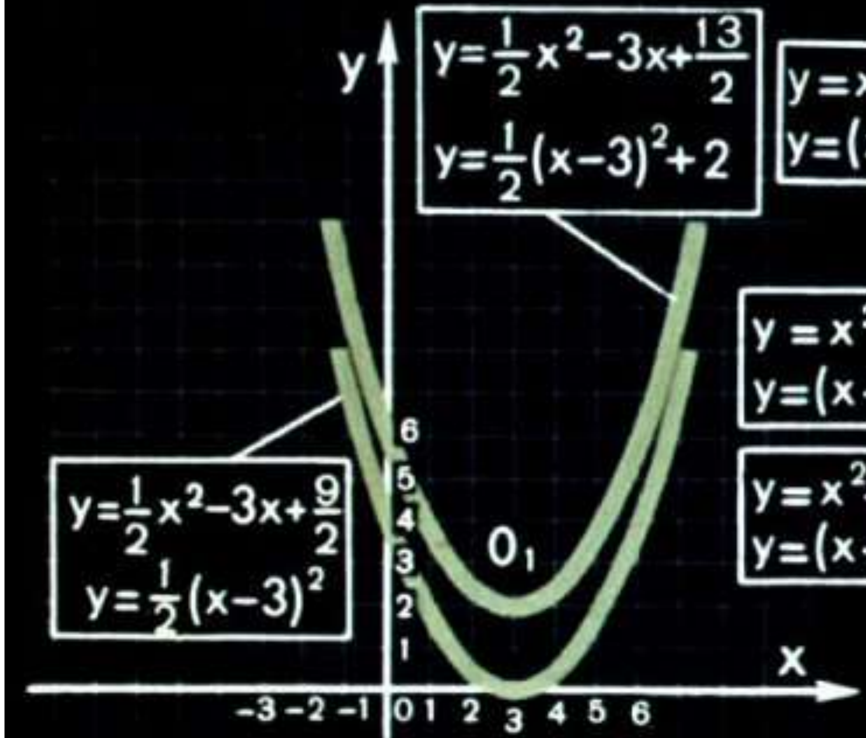
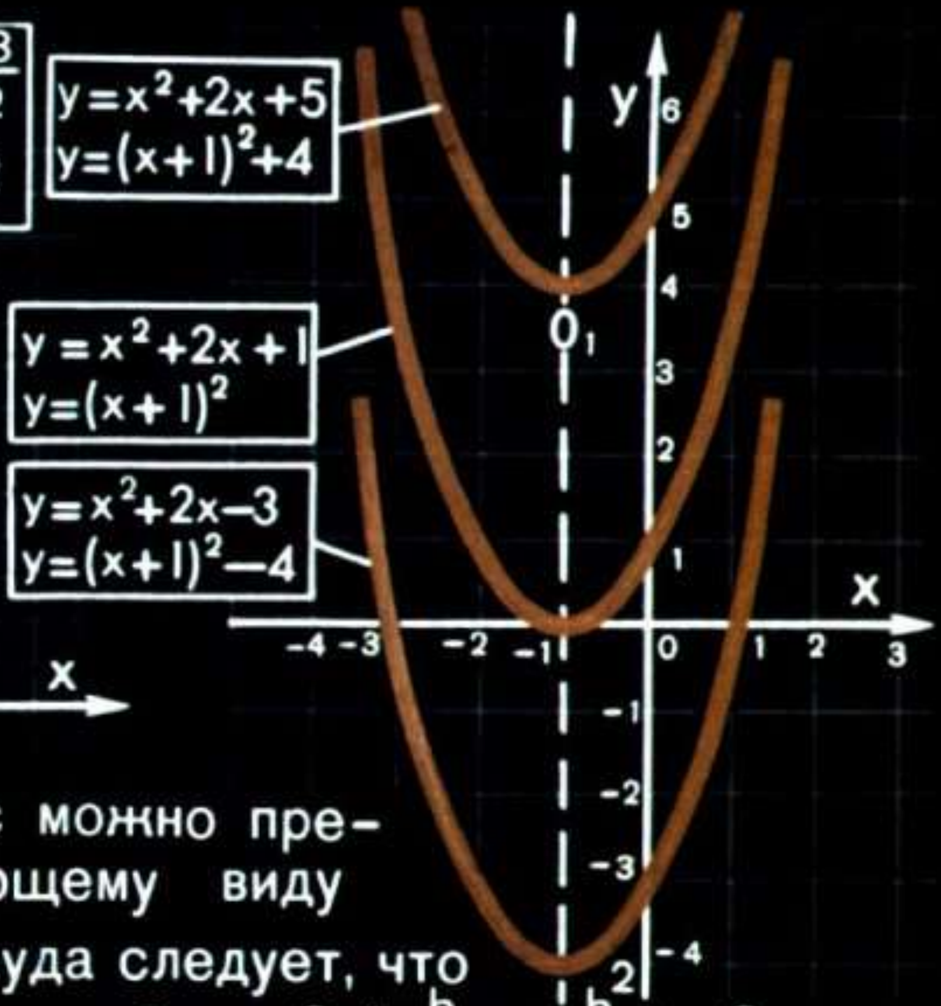
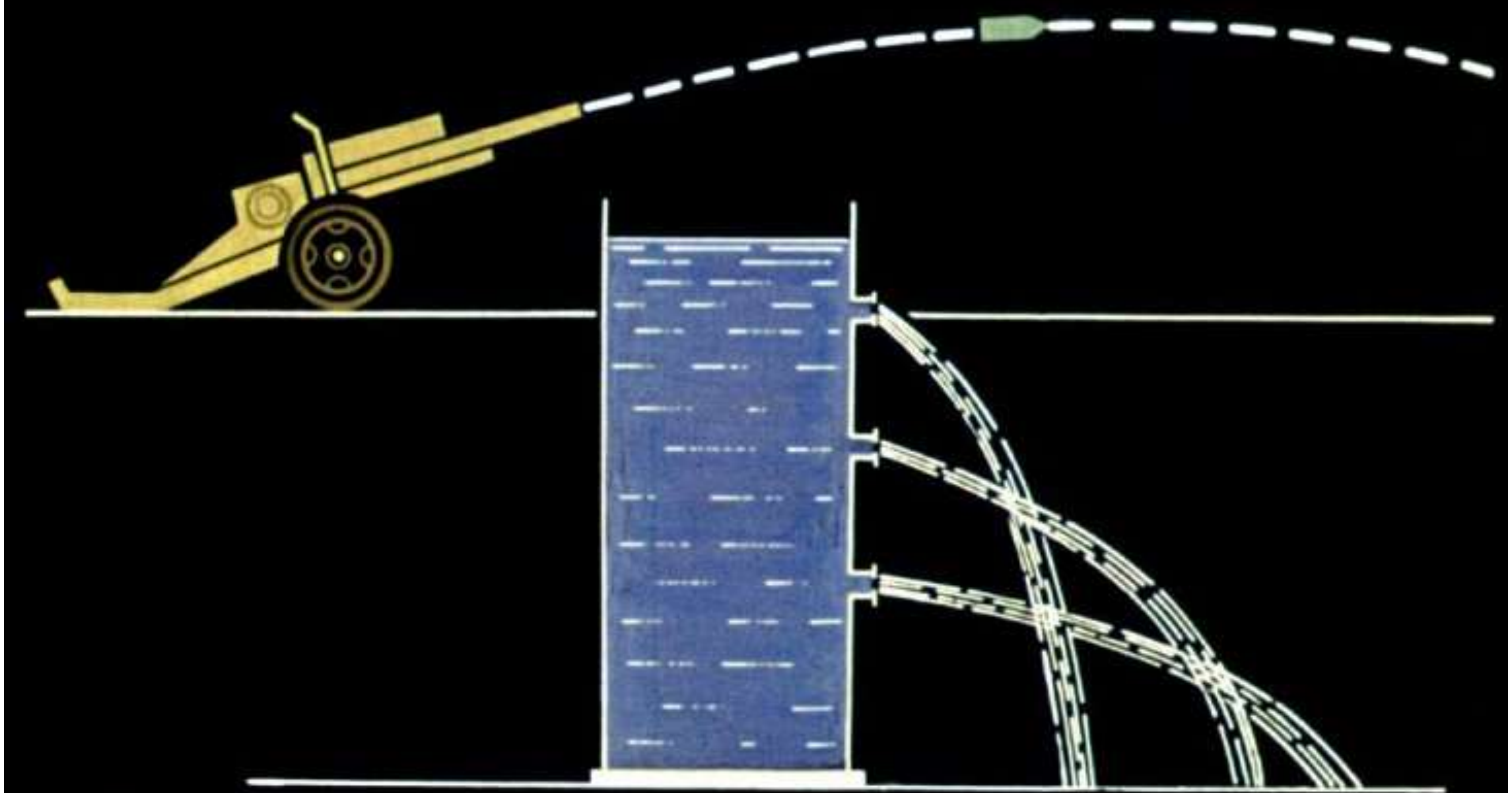


График функции $y=a\,(x-|m|)^2$ получается параллельным переносом параболы $y=ax^2$ вдоль оси OX.

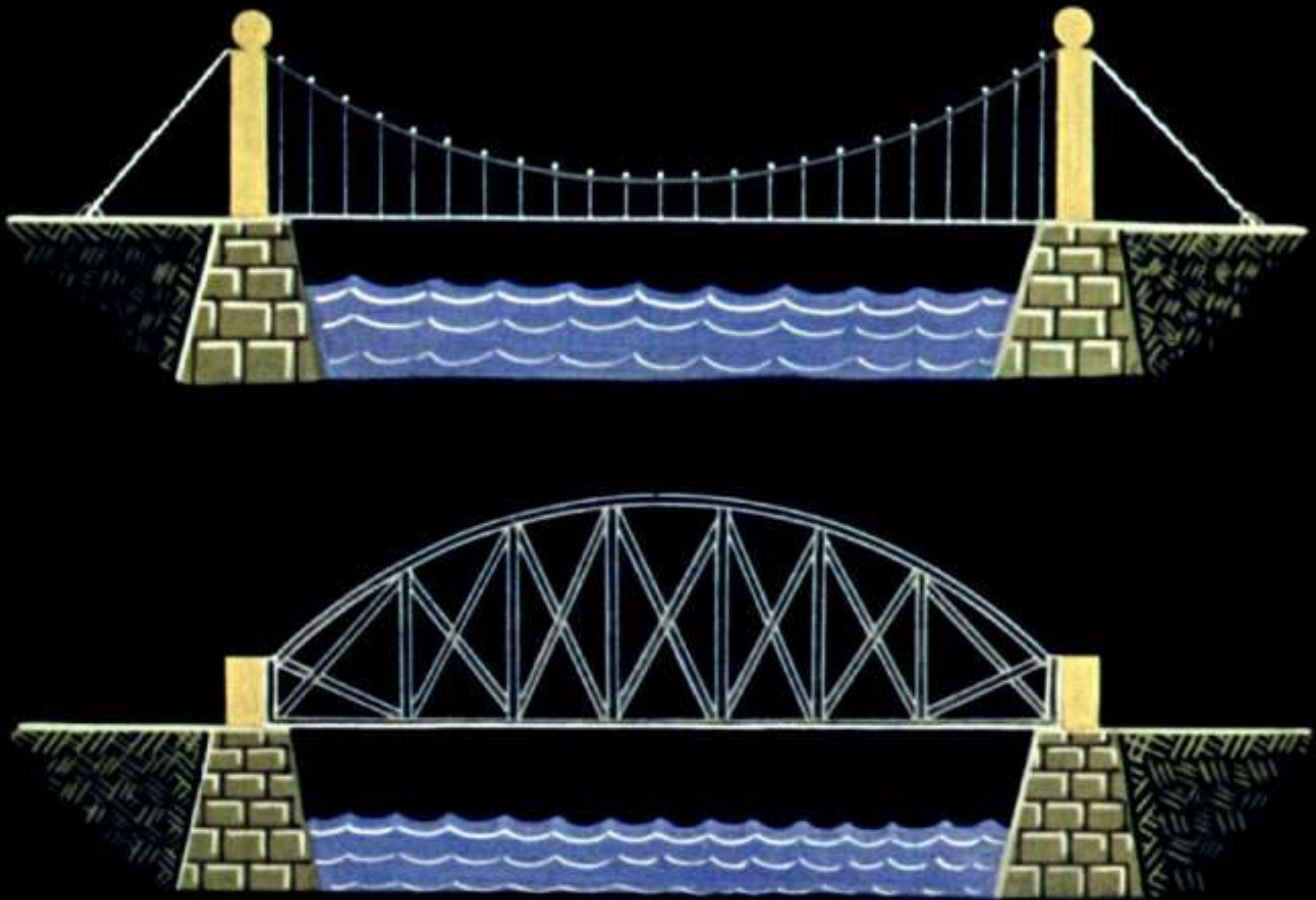




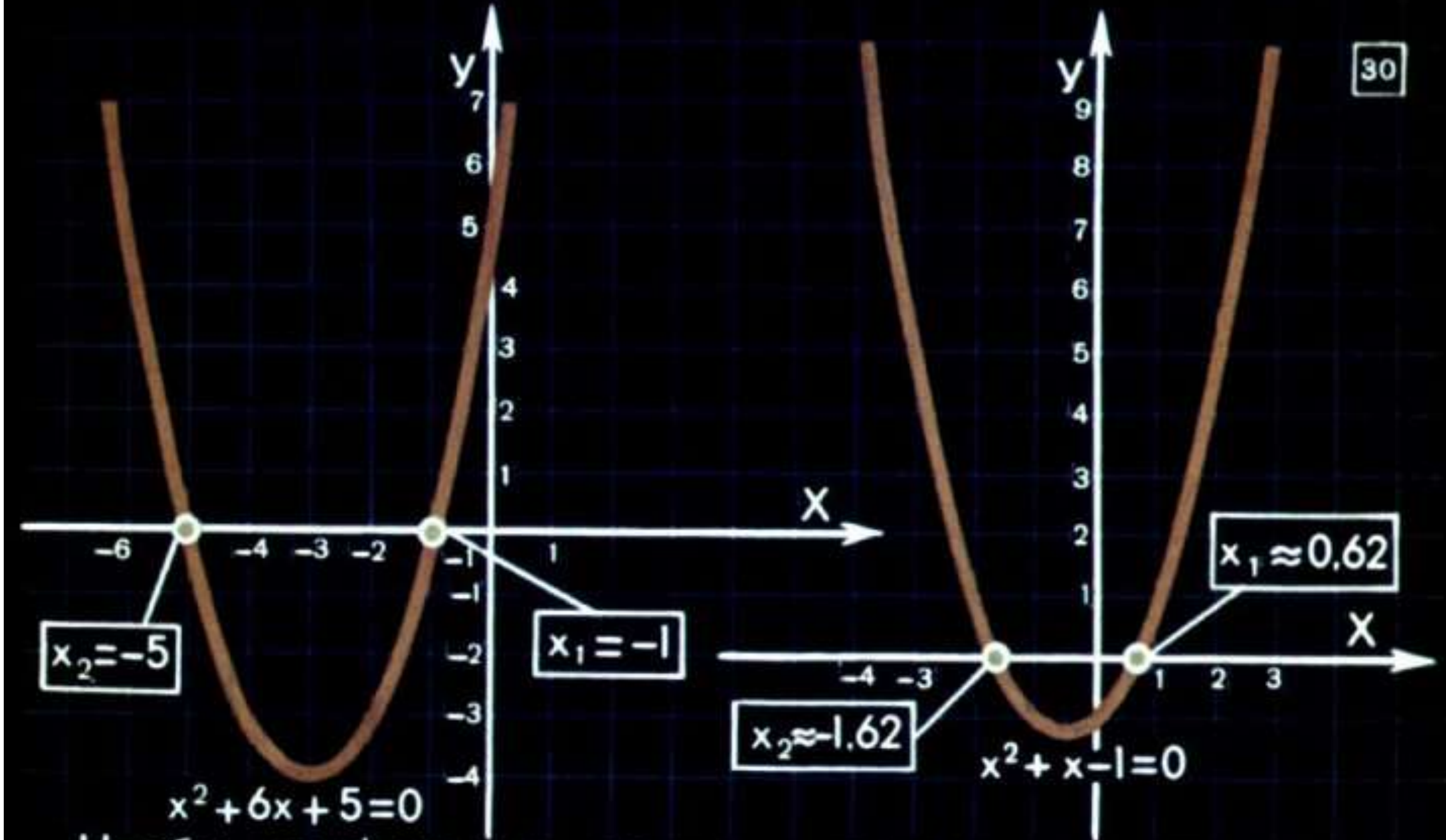
Функцию $y=ax^2+bx+c$ можно преобразовать к следующему виду $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$, откуда следует, что координаты вершины параболы $O_1\left(-\frac{b}{2a}; c-\frac{b^2}{4a}\right)$. Отрезок, который парабола отсекает на оси ОУ, равен „С“.



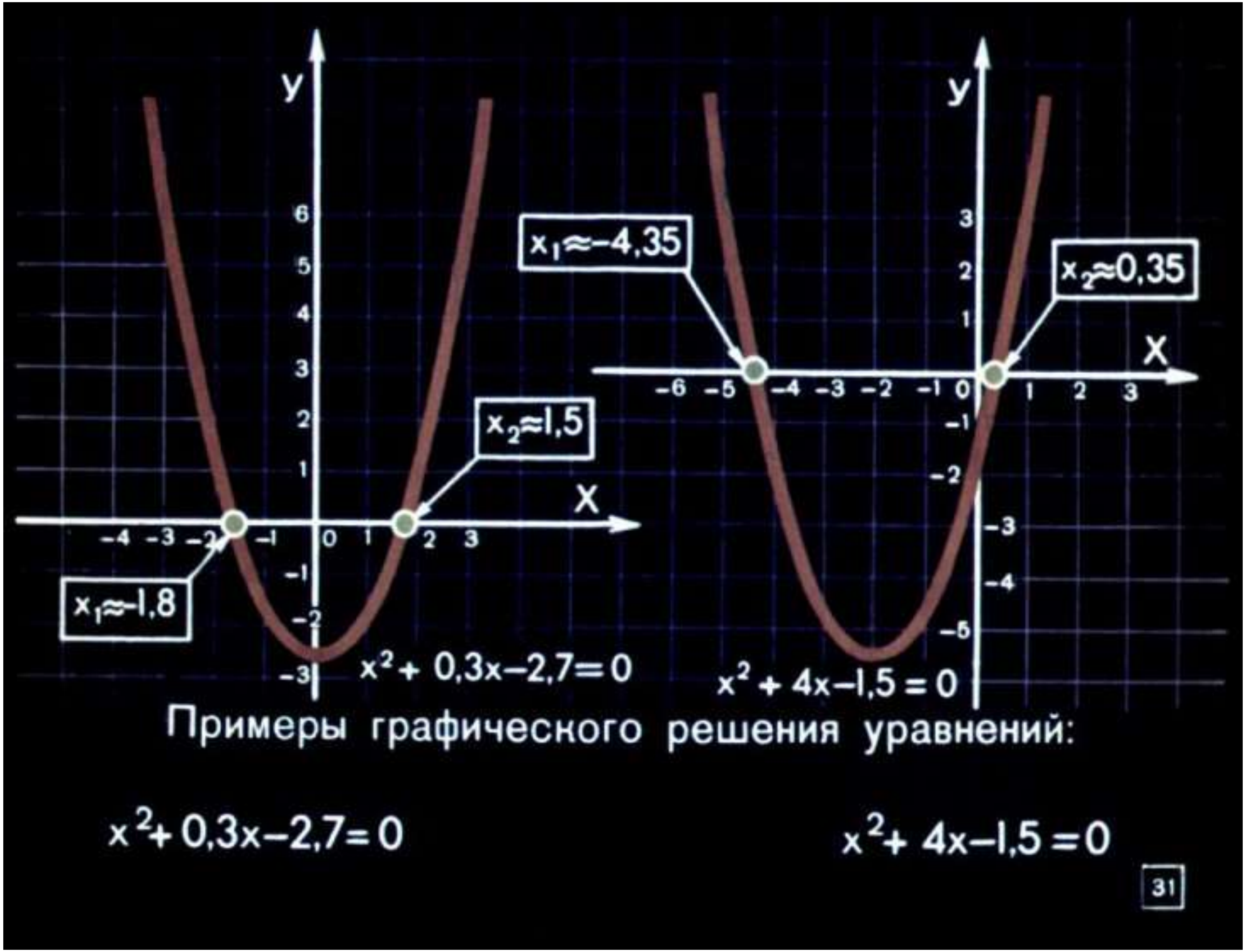
Струя воды, траектория тела, брошенного под острым углом к горизонту (например, артиллерийский снаряд), имеют форму параболы.

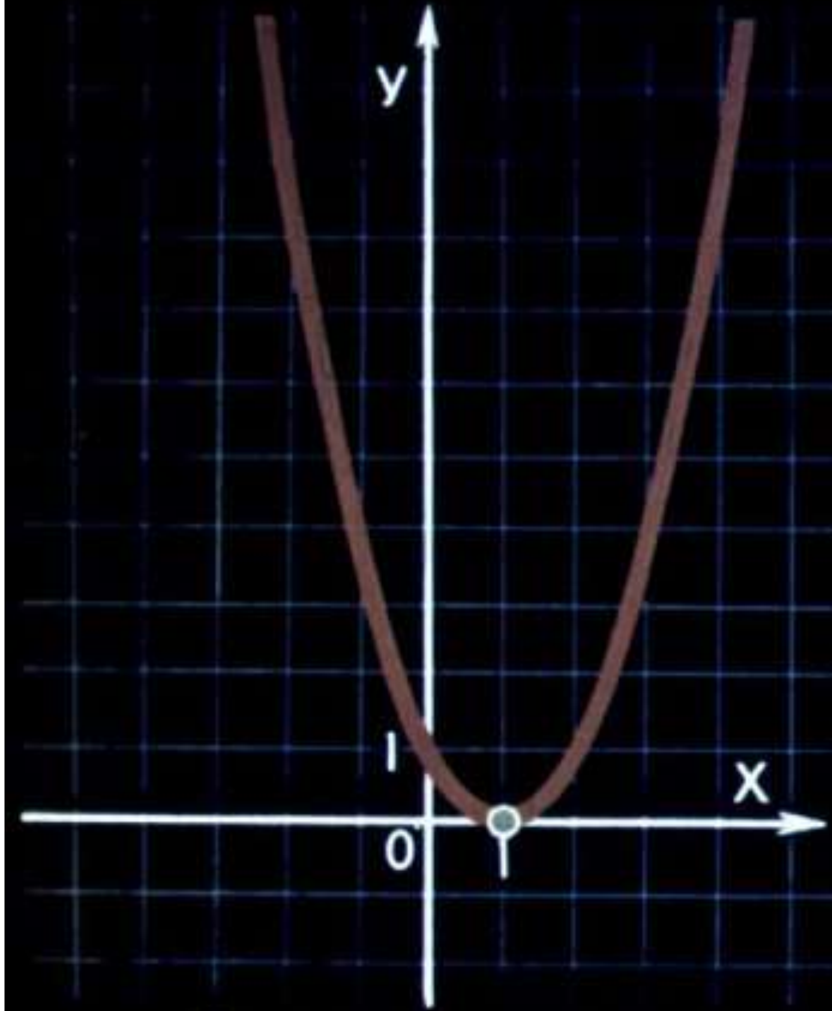


Канат висячего моста, некоторые мостовые фермы имеют параболическую форму.



Чтобы графически решить квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, достаточно построить график функции $y=ax^2+bx+c$. Тогда абсциссы точек пересечения параболы с осью OX дадут искомые корни уравнения.

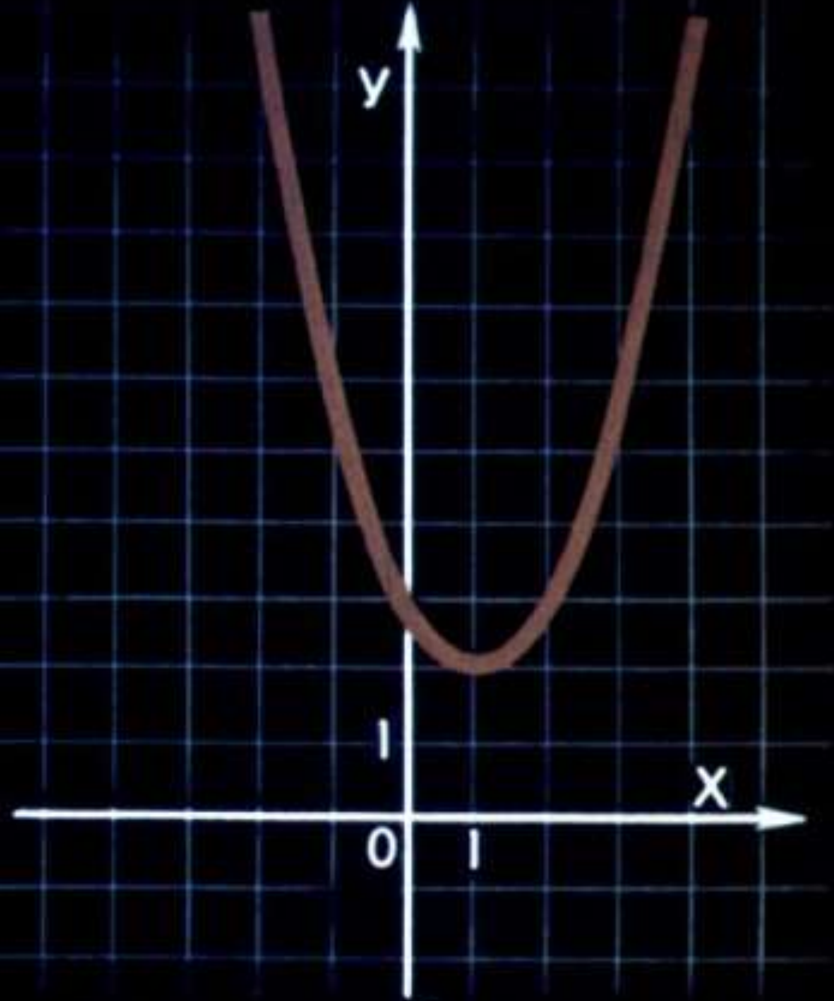

y
X
x₁≈-1,8
x₂≈1,5
x² + 0,3x–2,7=0
y
X
x₁≈–4,35
x₂≈0,35
x² + 4x–1,5 = 0
Примеры графического решения уравнений:
x²+ 0,3x–2,7=0
x²+ 4x–1,5 =0
31



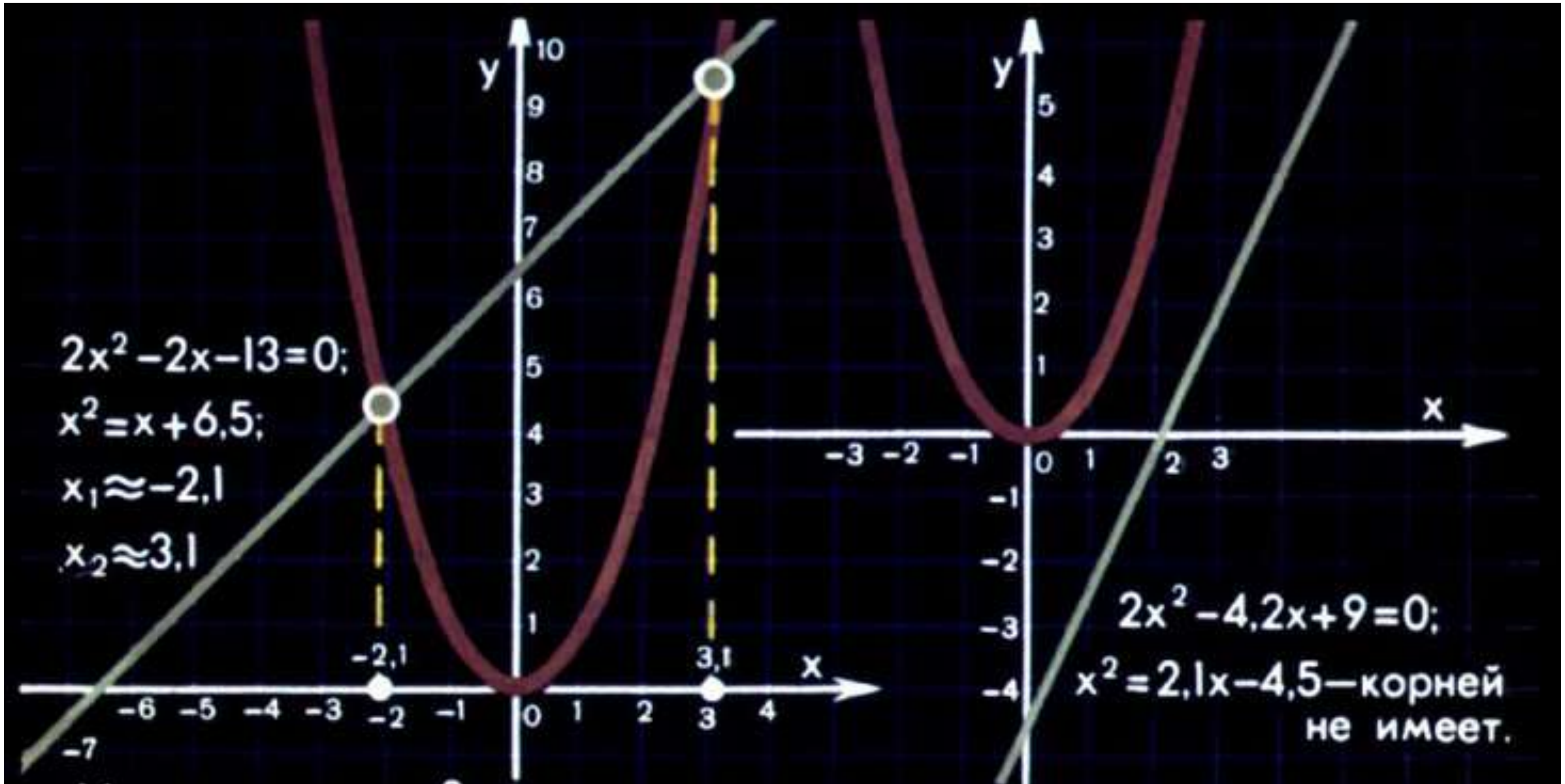
Корни уравнения

$x^2-2x+1=0$

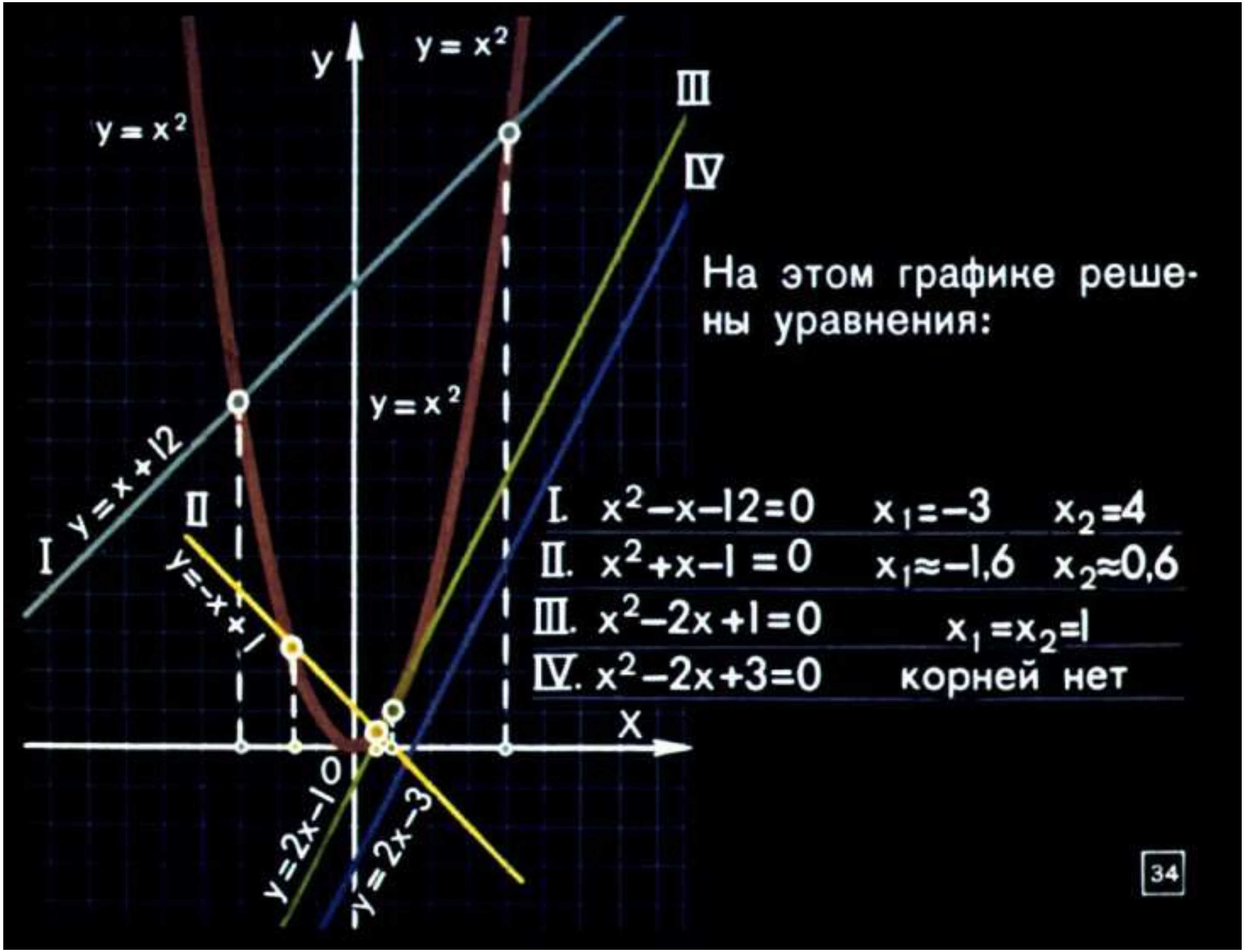
$x_1=x_2=1$



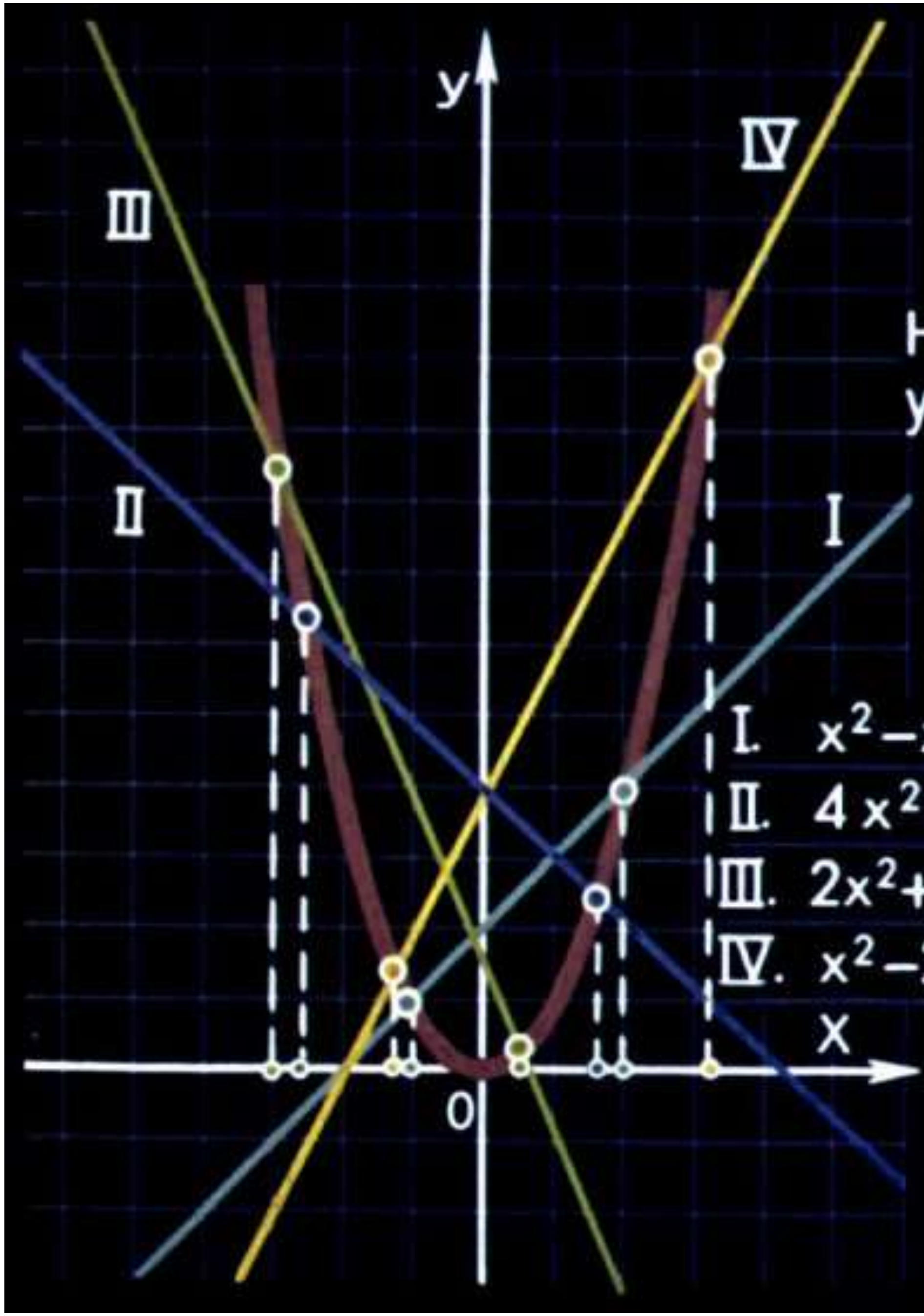
Уравнение $x^2-2x+3=0$ действительных корней не имеет



Уравнение $ax^2+bx+c=0$ можно решить другим способом. Если привести уравнение к виду $x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$, то достаточно построить на одной координатной сетке параболу $y=x^2$ и прямую $y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$, тогда абсциссы точек пересечения параболы и прямой дадут искомые корни квадратного уравнения.



y
y = x²
y = x²
y = x²
III
IV
На этом графике решены уравнения:
y = x + 12
I
II
y = -x + 1
I. x²–x–12=0 x₁=–3 x₂=4
II. x²+x–1 = 0 x₁≈–1,6 x₂≈0,6
III. x²–2x+1=0 x₁ =x₂=1
IV. x²–2x+3=0 корней нет
X
0
y=2x–1
y = 2x–3
34



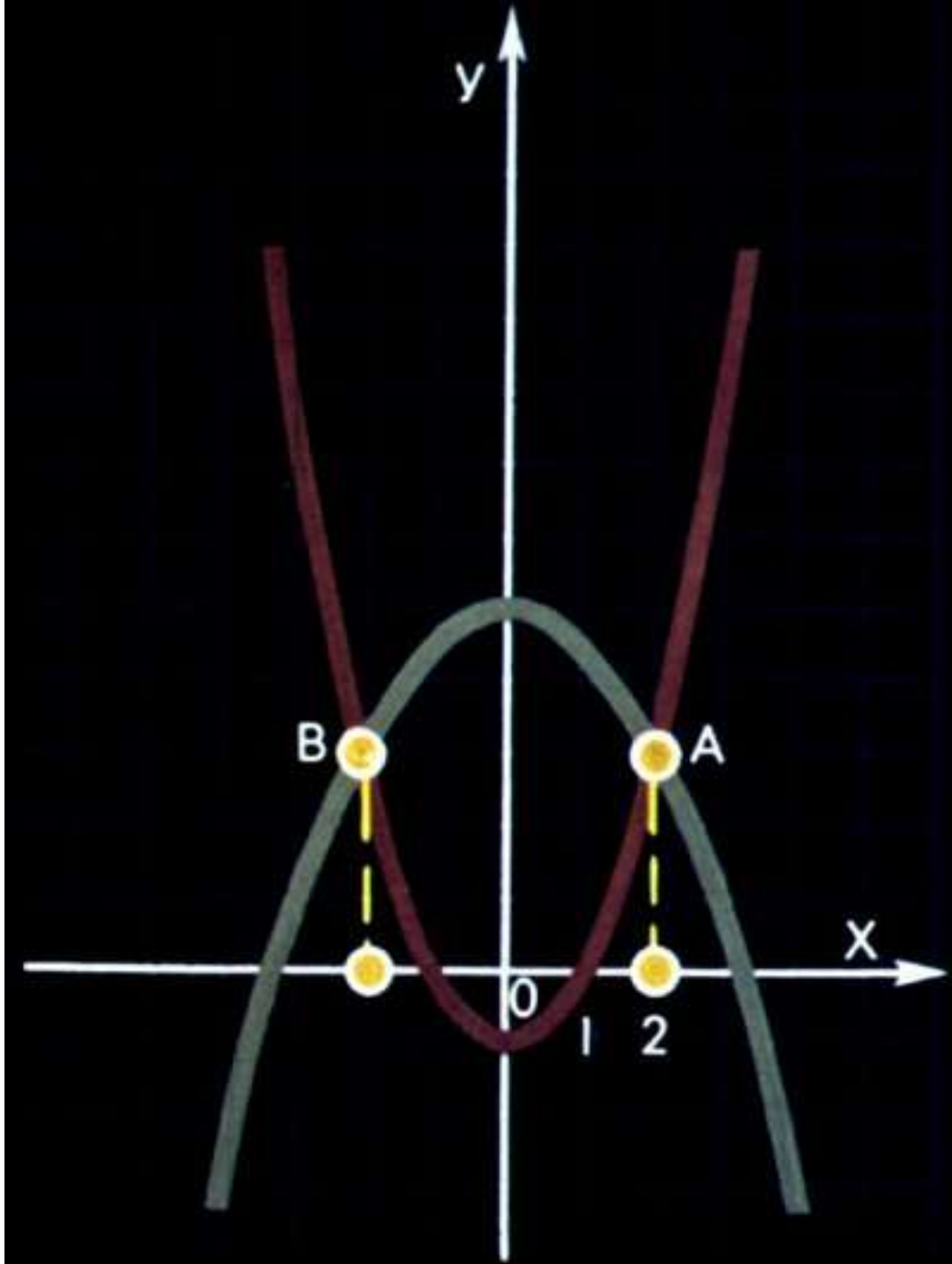
На этом графике решены уравнения:

I. $x^2-x-2=0$ $x_1=-1$ $x_2=2$

II. $4x^2+4x-15=0$ $x_1=-2{,}5$ $x_2=1{,}5$

III. $2x^2+5x-3=0$ $x_1=-3$ $x_2=0{,}5$

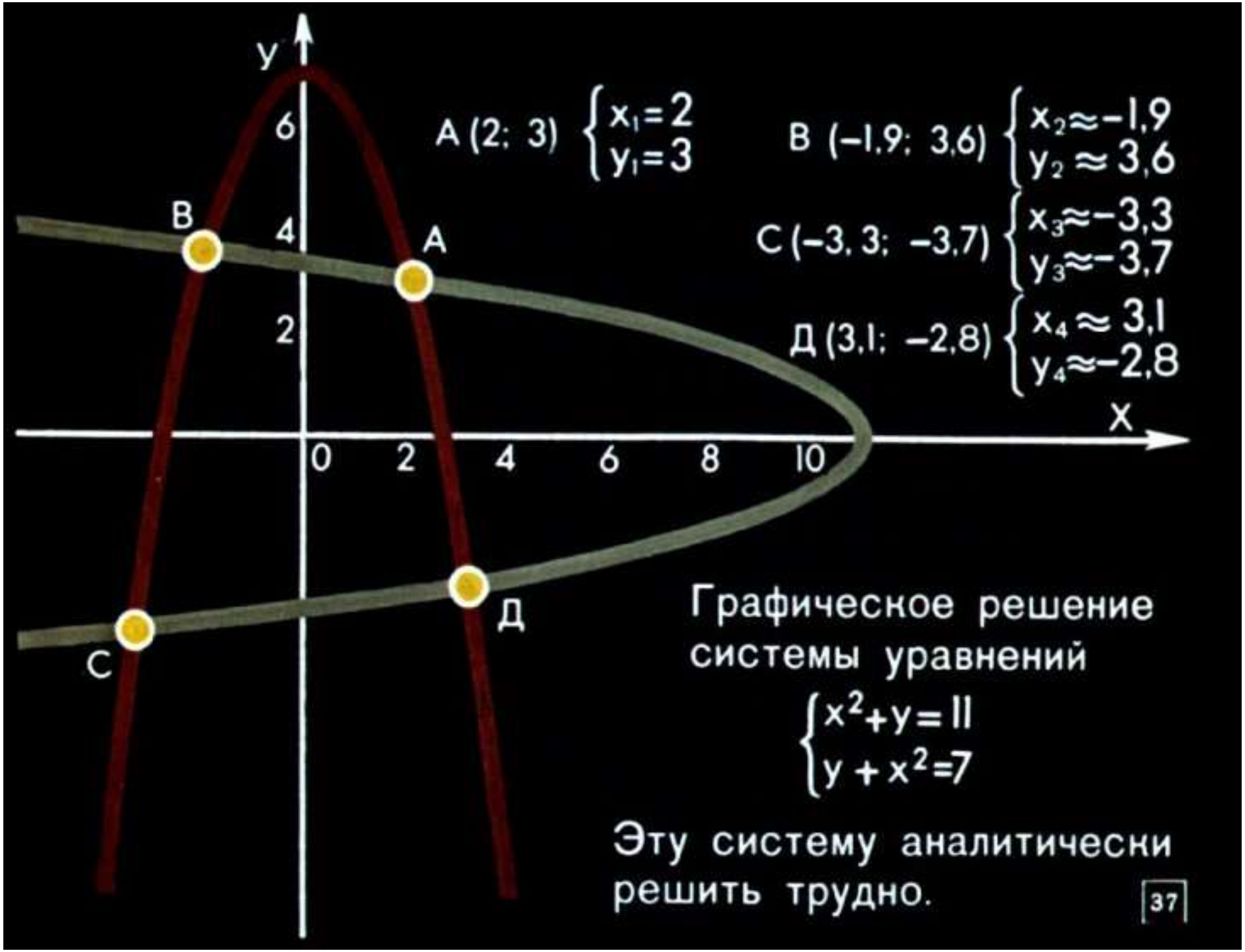
IV. $x^2-2x-4=0$ $x_1\approx-1{,}1$ $x_2\approx3{,}3$



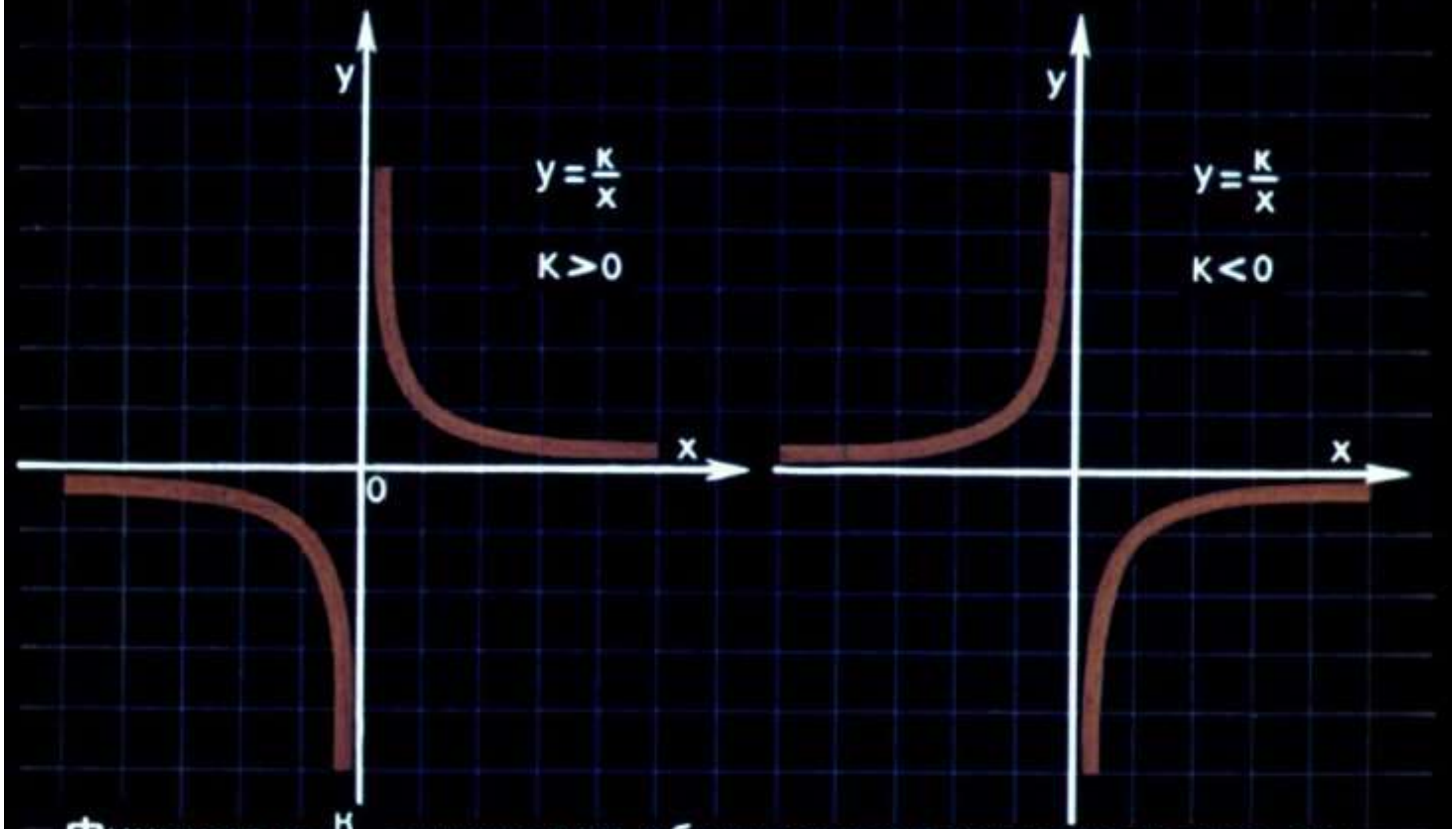
Графическое решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 10 \\ x^2 - y = 1 \end{cases}$$

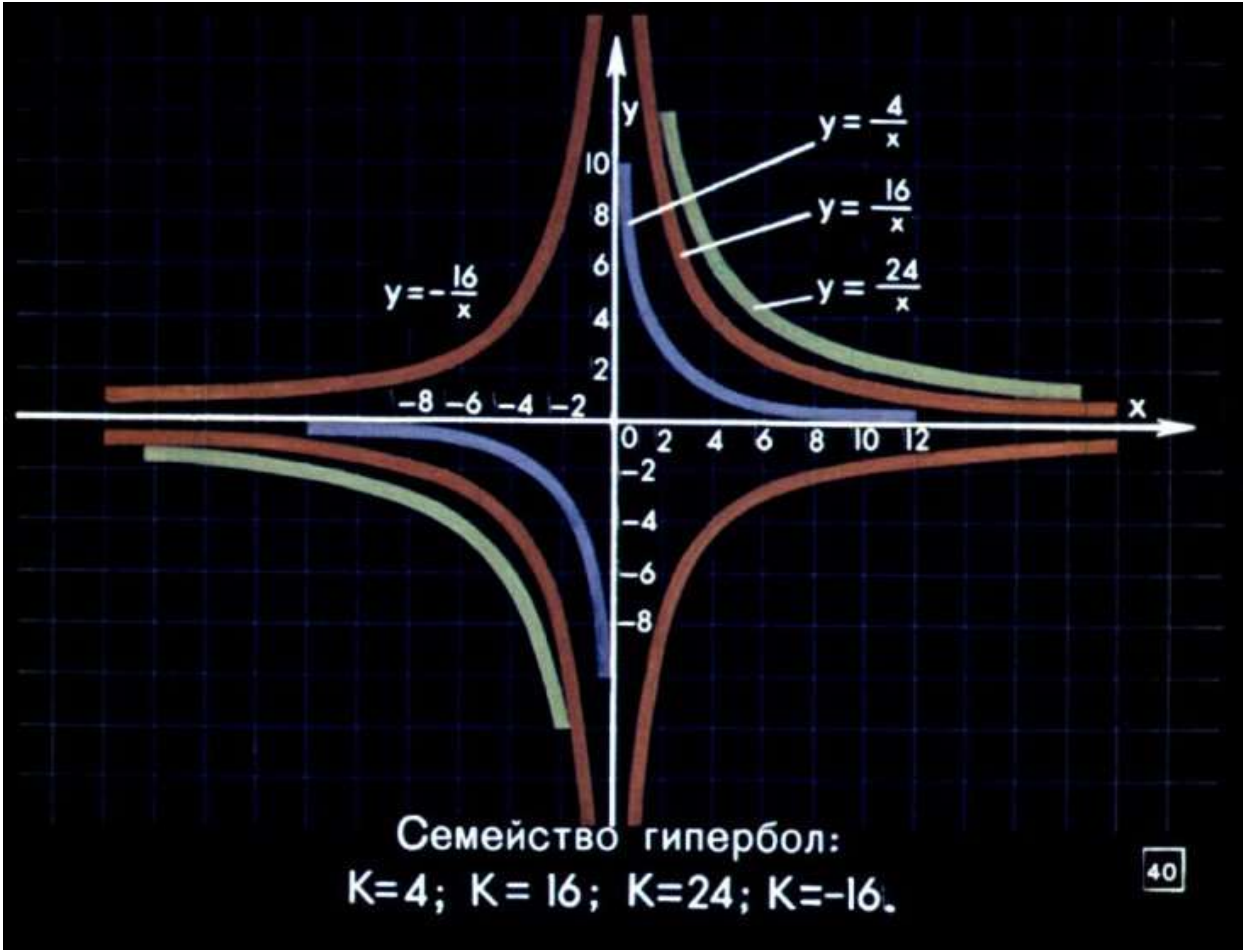
$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

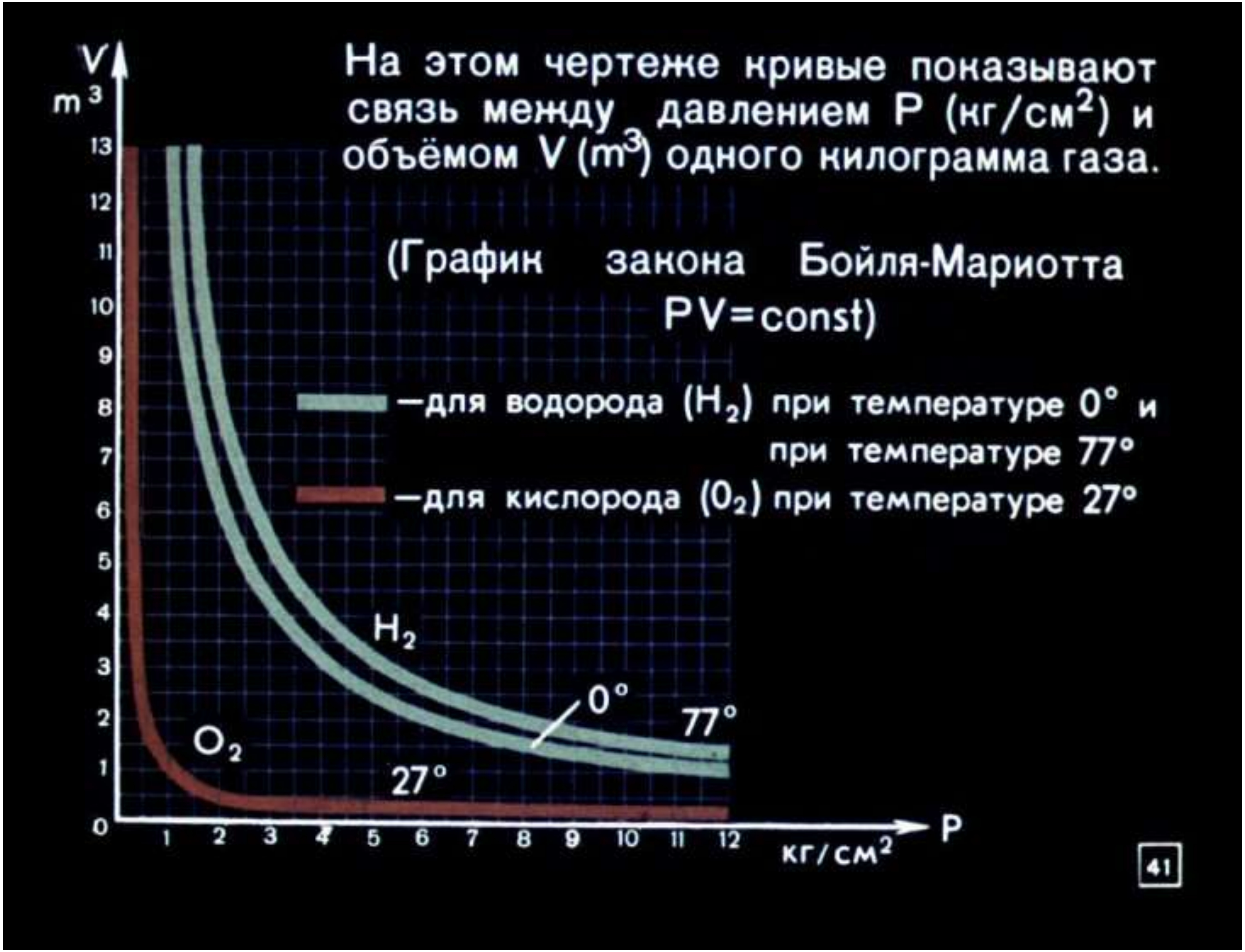

y
x
6
4
2
0
2
4
6
8
10
B
A
C
Д
A (2; 3) $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases}$
B (−1,9; 3,6) $\begin{cases} x_2 \approx -1,9 \\ y_2 \approx 3,6 \end{cases}$
C (−3,3; −3,7) $\begin{cases} x_3 \approx -3,3 \\ y_3 \approx -3,7 \end{cases}$
Д (3,1; −2,8) $\begin{cases} x_4 \approx 3,1 \\ y_4 \approx -2,8 \end{cases}$
Графическое решение системы уравнений
$\begin{cases} x^2 + y = 11 \\ y + x^2 = 7 \end{cases}$
Эту систему аналитически решить трудно.
37

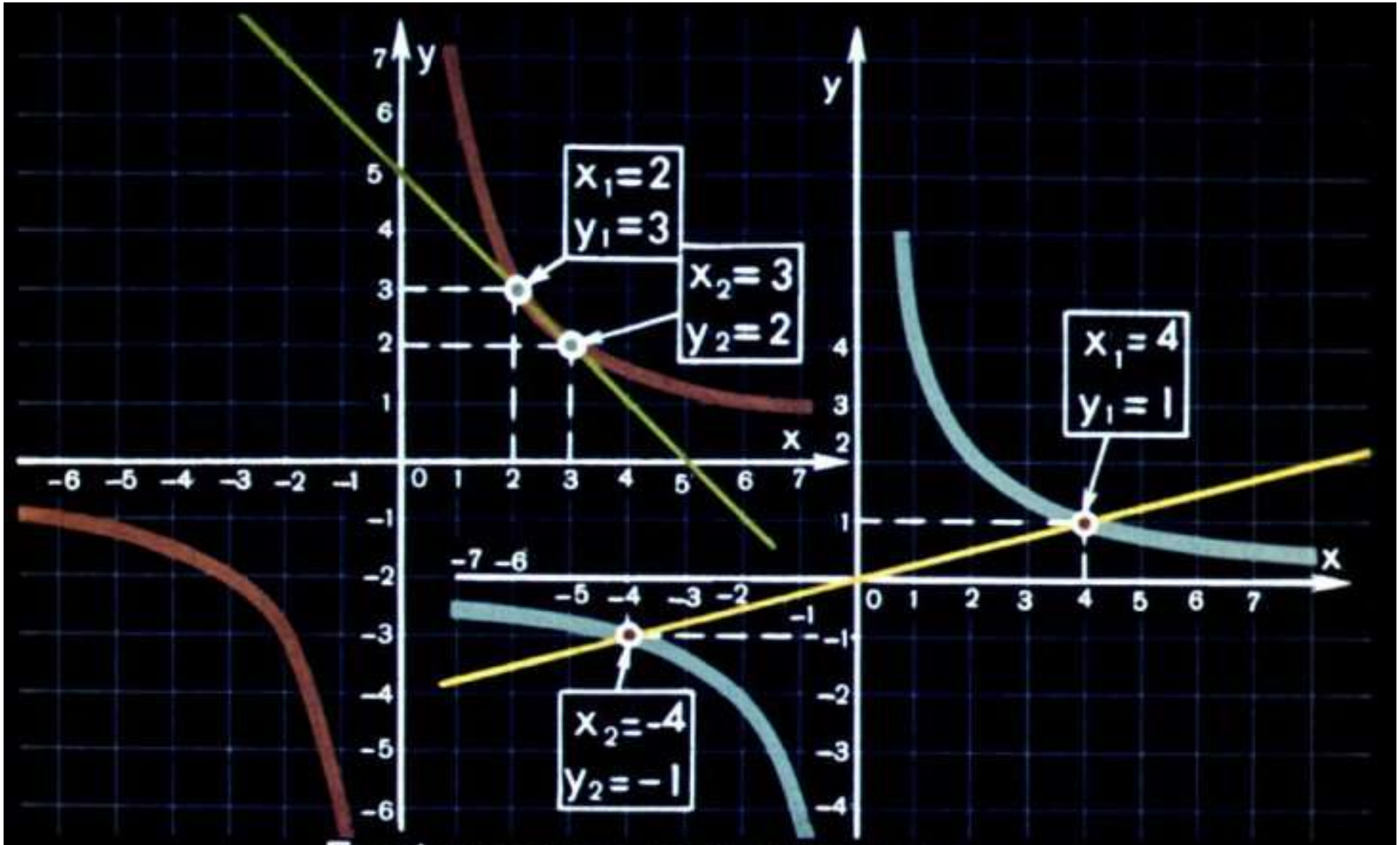
IV. Графики степенных функций



Функция $y=\frac{k}{x}$ выражает обратнопропорциональную зависимость. Графиком функции $y=\frac{k}{x}$ служит гипербола, которая имеет две ветви.

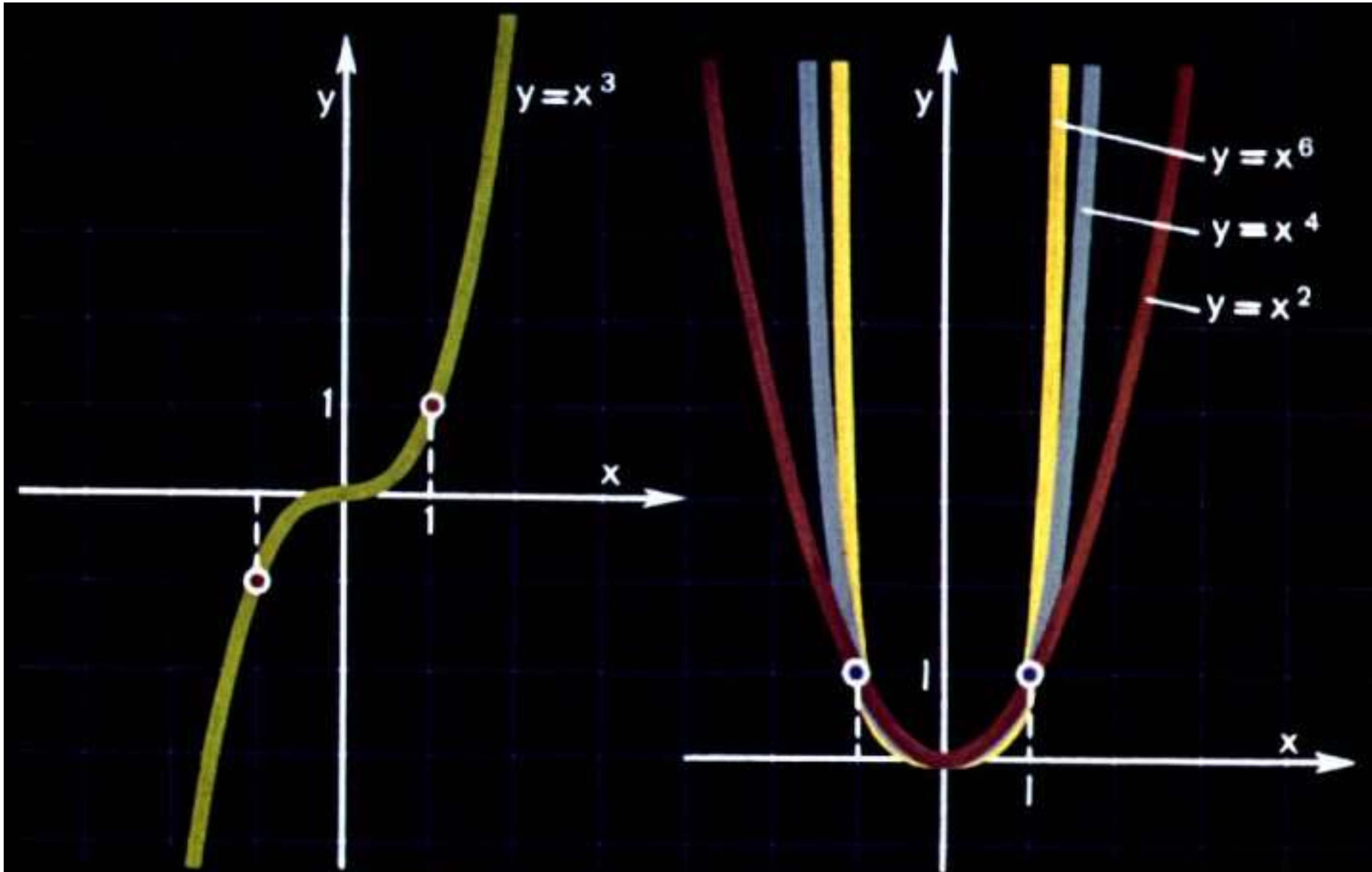

y
x
$y = \frac{4}{x}$
$y = \frac{16}{x}$
$y = \frac{24}{x}$
$y = -\frac{16}{x}$
10 8 6 4 2 −2 −4 −6 −8
−8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8 10 12
Семейство гипербол:
K=4; K= 16; K=24; K=–16.
40


На этом чертеже кривые показывают связь между давлением P (кг/см^2) и объёмом V (m^3) одного килограмма газа.
(График закона Бойля-Мариотта PV=const)
—для водорода (H_2) при температуре 0° и при температуре 77°
—для кислорода (O_2) при температуре 27°
V
m^3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
P
кг/см^2
H_2
0°
77°
O_2
27°
41



Графическое решение систем:

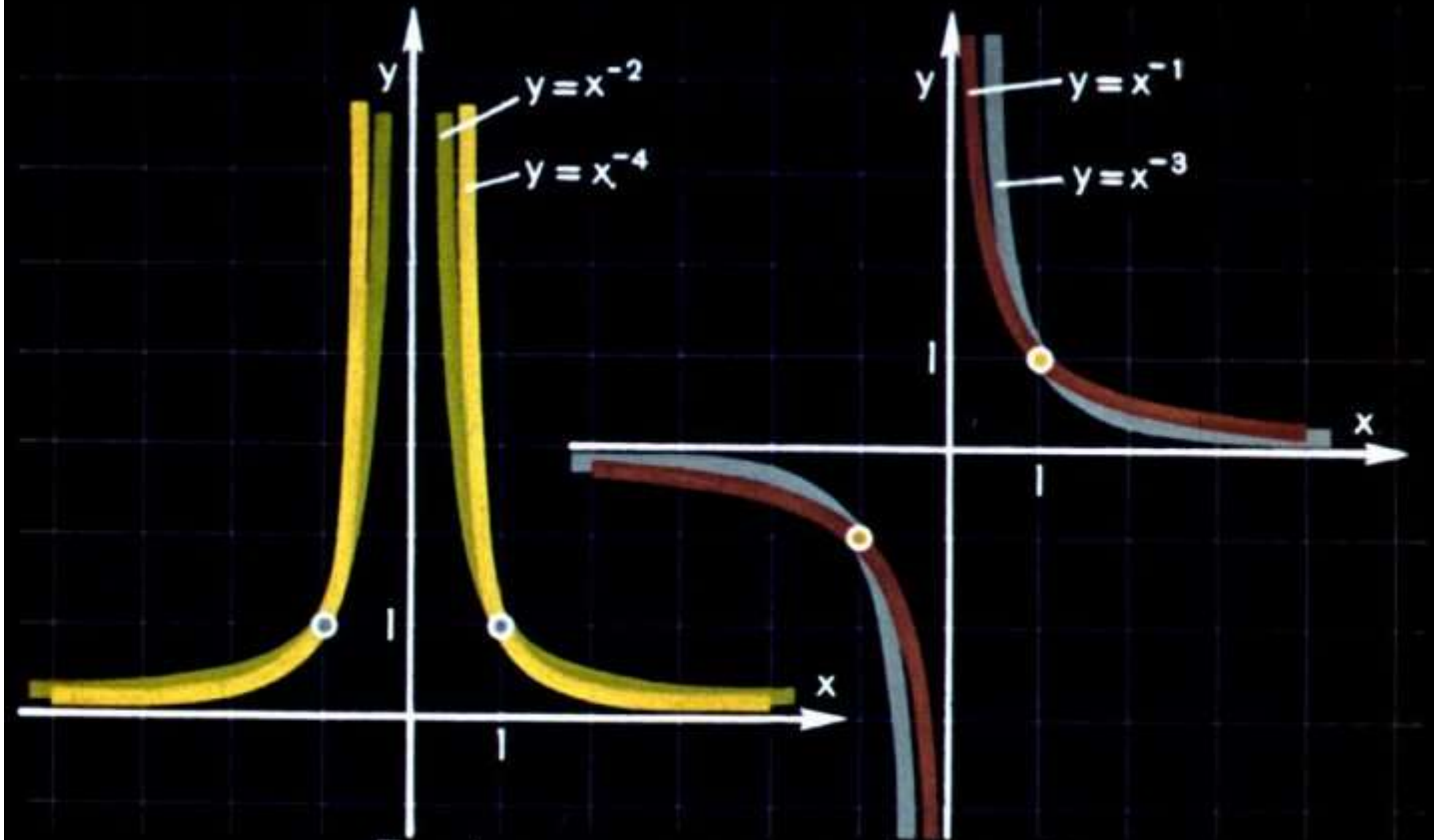
$$\begin{cases} xy=6 \\ x+y=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} xy=4 \\ x-4y=0 \end{cases}$$



Графики степенных функций:

$y=x^3$

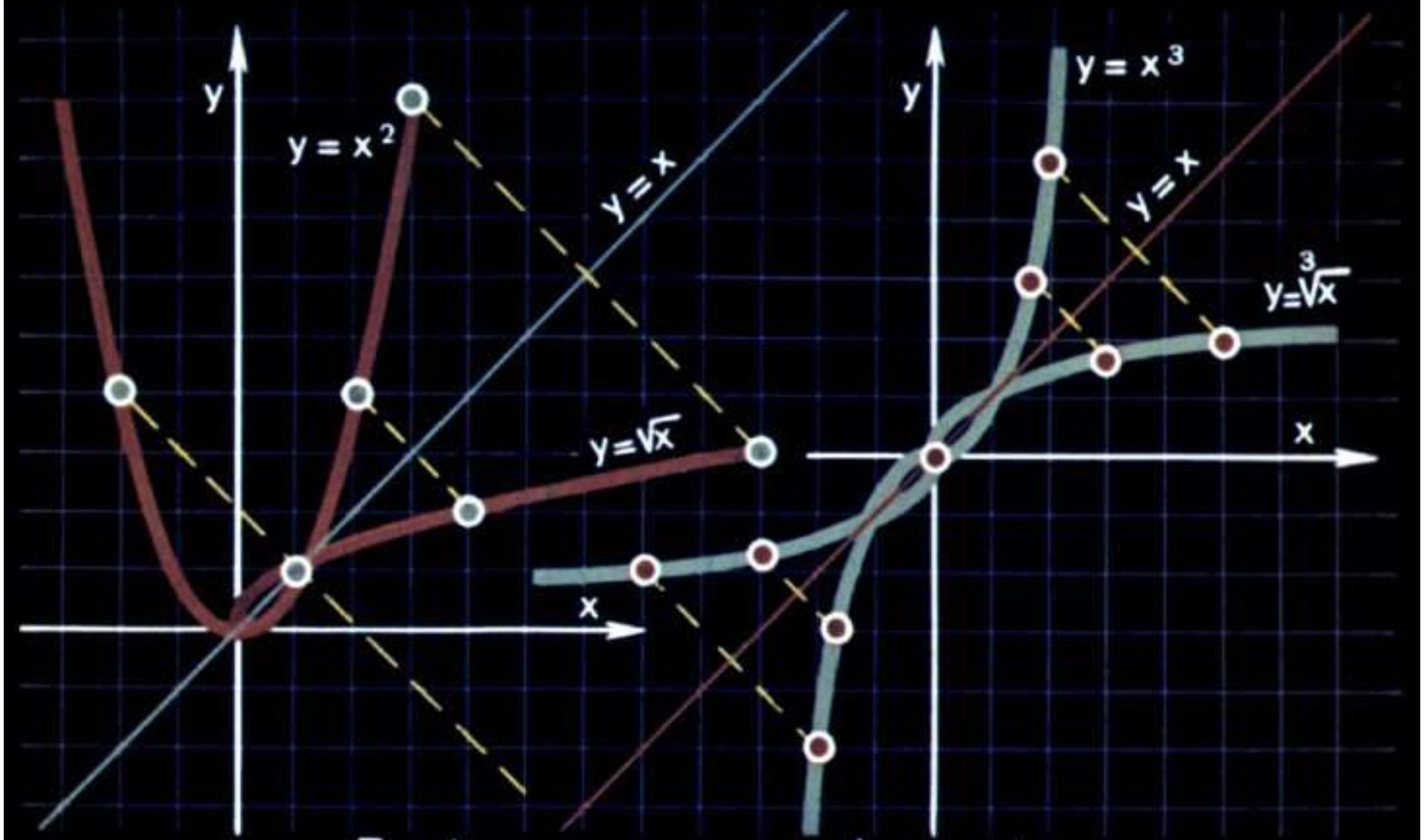
$y=x^2$, $y=x^4$, $y=x^6$.



Графики степенных функций:

$y = x^{-2}$ $\left(y = \frac{1}{x^2}\right)$ $y = x^{-1}$ $\left(y = \frac{1}{x}\right)$

$y = x^{-4}$ $\left(y = \frac{1}{x^4}\right)$ $y = x^{-3}$ $\left(y = \frac{1}{x^3}\right)$



Графики степенных функций:

$y = x^2$

$y = \sqrt{x}$ $(y = x^{\frac{1}{2}})$

$y = x^3$

$y = \sqrt[3]{x}$ $(y = x^{\frac{1}{3}})$

Переменная величина, лежащая в основе понятия функции, была введена замечательным математиком Рене Декартом.

«Поворотным пунктом в математике была декартова ПЕРЕМЕННАЯ ВЕЛИЧИНА. Благодаря этому в математику вошли ДВИЖЕНИЕ и ДИАЛЕКТИКА...»

Ф. Энгельс.

Конец

Автор И. Вейцман
Художник-оформитель Г. Рожковский
Чертежи Г. Рожковского
Редактор В. Чернина

Д-340-67

Студия «Диафильм», 1967 г.
Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7
Цветной 0-30