А.И. Шапиро, В.А. Бодик

ОРИГИНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пособие для учителя

КИЕВ
«ОСВІТА»
1992

ББК 74.265.1
Ш23

Рекомендовано Головним навчально-методичним управлінням загальної середньої освіти України

Шапиро А. И., Бодик В. А. Оригинальные методы решения физических задач: Пособ. для учителя.— К.: «Освіта», 1992.

В пособии рассмотрено более 20 различных методов решения физических задач. Оно содержит более 300 задач повышенной трудности со всего курса физики средней школы. Для большинства из них приведены краткие решения.

Пособие можно использовать для индивидуальной работы в общеобразовательной школе, школе (классах) с углубленным изучением физики, для подготовки к вступительным экзаменам в вузы.

Для учителей физики, учеников общеобразовательной школы.

Шапіро А. І., Бодик В. А. Оригінальні методи розв'язування фізичних задач: Посібн. для вчителя.— К.: «Освіта», 1992

У посібнику розглянуто понад 20 різних методів розв'язування фізичних задач. Він містить понад 300 задач підвищеної складності з усього курсу фізики середньої школи. До більшості з них наведено короткі розв'язання.

Посібник можна використовувати для індивідуальної роботи у загальноосвітній школі, школі (класах) з поглибленим вивченням фізики, для підготовки до вступних екзаменів у вузи.

Для вчителів фізики, учнів загальноосвітньої школи.

Редактор *Л. П. Слабошпицька*

Ш $\frac{4306011200-205}{210-92}$ 324-92

ISBN 5-330-01779-3

ВСТУПЛЕНИЕ

Роль задач в сознательном усвоении курса физики переоценить невозможно. Но зачастую задачи решаются лишь для тренинга, служат иллюстрацией правила, формулы, закона. При этом теряется такая важная цель обучения, как развитие творческих способностей. Кроме того, однообразие в решениях физических задач, извечный проективный (алгебраический) метод, излишняя заматематизированность решения отнюдь не способствуют глубокому пониманию физической сути явлений. Напротив, знакомство с методами решения физических задач — есть знакомство с методами самой физики, ее теорией, поскольку хорошая задача — всегда хорошая теория и наоборот.

В физической науке существует огромное количество методов познания, которые дают возможность решать задачи изящно, рационально, красиво, а значит, будят эмоции и интерес, побуждают знать глубже и шире, рождают желание искать. Мы выбрали лишь некоторые нестандартные методы решения задач, что сообразуется с нашим опытом, вкусами и симпатиями. Предлагаемое пособие нельзя рассматривать ни как учебник, предназначенный для систематического изучения курса физики в школе, ни как «ключ» к программе для конкурсных экзаменов по физике. Книгу, которую Вы держите в руках, можно рассматривать как краткий путеводитель по методам решения физических задач. В ней преследовалась цель систематизировать методы, показать их преимущества, утвердить их «гражданство». Широта взглядов на предложенную задачу, умение связать ее с законами природы и с другими смежными задачами должны решительно противопоставляться единообразному ремесленническому подходу — поиску нужной формулы, содержащей набор данных величин. Для развития физического мышления важно умение решать одну и ту же задачу разными методами, а также исследовать решения задачи.

Авторы старались избегать легких задач (упражнений), а к трудным найти несложное, понятное и негромоздкое решение.

Наряду с известными задачами в книге содержатся авторские, кроме известных методов решения задач, имеются малоизвестные.

Применяемый в настоящей книге математический аппарат не выходит за рамки школьного курса математики, хотя и содержит элементы дифференциального и интегрального исчисления.

Книга предназначена в первую очередь для учащихся, интересующихся физикой, она будет полезна и студентам, надеемся, не только педагогических вузов, и, безусловно, для учителей физики школ и технических училищ, техникумов, руководителей факультативов, организаторов олимпиад, членов приемных комиссий А просто любознательному читателю подарит радостные минуты и ощущение собственных открытий. Данная книга задумана как пособие для лиц, не боящихся упорным трудом освоить нетрадиционные подходы к решению физических задач.

Основной материал был апробирован в разные годы на факультативных занятиях в Республиканском физико-математическом интернате при КГУ, на уроках в школах № 145 и № 15 г. Киева, при подготовке и проведении школьных, районных, городских олимпиад и выездных олимпиад МФТИ.

Авторы с признательностью примут замечания заинтересованных читателей по поводу улучшения книги.

Авторы благодарят Варламова А. А., Стрешинского И. Я. за любезное согласие на использование при написании этой книги статей, опубликованных ранее с ними в соавторстве, и своих талантливых учеников, благодаря работе с которыми и родилась эта книга.

1. ВЫБОР СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

На примерах решения задач показано, как удачный выбор системы отсчета (инерциальной, неинерциальной, СОЦМ, ЛСО) дает возможность существенно упростить решение задачи.

Для описания всевозможных явлений природы необходимо выбирать систему отсчета, зависящую от цели исследования.

В механике под системой отсчета понимают реальное тело, условно принимаемое за неподвижное, связанную с ним систему координат (особенно употребительна прямоугольная — декартова) и набор синхронизованных часов.

В *кинематике* все системы отсчета равноправны, так как нас не интересует, какие силы обеспечивают данные параметры движения.

В задачах *динамики* преимущественную роль играют, как правило, инерциальные системы отсчета, по отношению к которым уравнения движения имеют наиболее простой вид.

За многовековую историю физики человечество выработало не так уж много различных систем отсчета. Еще древнегреческий ученый Клавдий Птолемей (II в. н. э.) в трактате «Великое математическое построение астрономии», разрабатывая идеи Аристотеля и Гиппарха, связал систему отсчета с Землей (*геоцентрическая система мира*). Движения планет в ней выглядели столь сложно, что в течение многих веков астрономам не удавалось найти их общие законы. И лишь замена выдающимся польским астрономом Николаем Коперником (1473—1543) геоцентрической системы отсчета на *гелиоцентрическую*, связанную с Солнцем, радикально упростила описание движения планет, что дало возможность в самом общем виде сформулировать законы их движения.

Ныне за эталон в физике принята инерциальная система, в которой изотропно (от *«изос»* — одинаковый и *«тропос»* — направление) реликтовое излучение * (от *«реликт»* — остаток).

---

* Это излучение является остатком той эпохи, когда вещество Вселенной было горячей плазмой.

Нельзя однозначно утверждать, что в будущем не появятся другие эталоны, которые могут и не быть инерциальными.

Удобно также использовать иногда и другие системы, руководствуясь принципом целесообразности, который можно легче понять на конкретных примерах.

Задача 1.1. Из двух портов, расстояние между которыми l, одновременно выходят два катера со скорос-

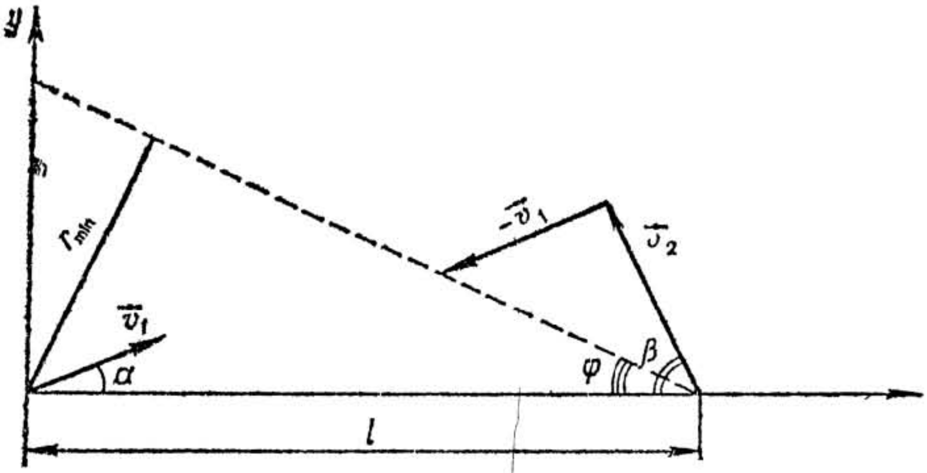


Рис. 1

тями v_1 и v_2, направленными соответственно под углами α и β к прямой, соединяющей порты (рис. 1). Каково минимальное расстояние между ними?

Р е ш е н и е. Приведем вначале план традиционного решения. $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, $r = \sqrt{[l - (v_2 \cos\beta + v_1 \cos\alpha)\, t]^2 + [t \cdot (v_2 \sin\beta - v_1 \sin\alpha)]^2}$. Далее необходимо, найдя производную и приравнивая ее к нулю, подставить найденное таким образом время (минимальное) в исходное уравнение и получить значение r_{min}. Очевидно, что этот путь решения достаточно громоздкий.

Свяжем неподвижную систему отсчета с первым катером. Тогда второй будет иметь скорость $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, направленную под углом φ и численно равную $v_{21} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(\alpha + \beta)}$. Очевидно, что $r_{min} = l \cdot \sin\varphi$. Найдем $\sin\varphi$ из $v_{21} \sin\varphi = v_2 \sin\beta - v_1 \sin\alpha$.

Окончательно $r_{min} = \dfrac{l \cdot (v_2 \sin\beta - v_1 \sin\alpha)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(\alpha + \beta)}}$.

В некоторых задачах удобно использовать неподвижную систему отсчета, называемую *лабораторной* (ЛСО), в иных — систему отсчета, связанную с центром масс (СОЦМ).

Задача 1.2. Рассмотрим упругий удар в системе центра масс (рис. 2).

Решение. Центр масс в СОЦМ неподвижен. Напомним, что относительно ЛСО (системы отсчета, связан-

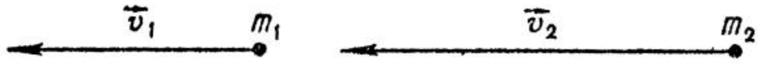


Рис. 2

ной с неподвижным наблюдателем) на основании теоремы о движении центра масс его скорость:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Закон сохранения энергии и импульса в СОЦМ:

$$\begin{cases} m_1 v_{1ц} + m_2 v_{2ц} = m_1 v'_{1ц} + m_2 v'_{2ц} = 0, \\ m_1 v'^2_{1ц} + m_2 v'^2_{2ц} = m_1 v^2_{1ц} + m_2 v^2_{2ц}. \end{cases}$$

Полученная система имеет два решения.

1) $v_{1ц} = v'_{1ц}$, $v_{2ц} = v'_{2ц}$. Удар отсутствует.

2) $v_{1ц} = -v'_{1ц}$, $v_{2ц} = -v'_{2ц}$. В системе центра масс столкновение приводит к изменению знака скорости.

Перейдем в ЛСО:

$$v_{1ц} = v_1 - v \quad v'_{1ц} = v'_1 - v,$$
$$\text{и}$$
$$v_{2ц} = v_2 - v, \quad v'_{2ц} = v'_2 - v,$$

где $v = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$.

Весьма важными являются следствия из полученных результатов.

1. Если $v_2 = 0$, то

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ и } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Первое тело при $m_1 > m_2$ после удара движется в том же направлении, при $m_1 < m_2$ — в противоположном.

2. При $m_1 = m_2 = m$

$v'_1 = v_2$ и $v'_2 = v_1$, то есть происходит обмен скоростями.

К этим следствиям мы вернемся в других главах нашей книги.

Задача 1.3. С поверхности Земли бросили вертикально вверх кусочек пластилина со скоростью v_0. Одновременно такой же кусочек пластилина начал падать без начальной скорости с высоты H. При столкновении кусочки слиплись. Через какое время после начала бросания и с какой скоростью слипшийся комок упадет на Землю? (рис. 3).

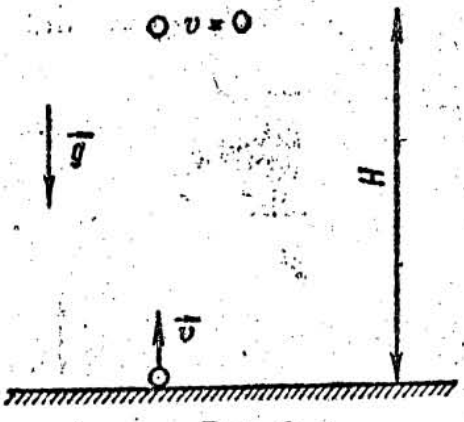


Рис. 3

Р е ш е н и е.

Решим задачу в системе отсчета, связанной с центром масс. Она сводится к движению тела с высоты $\frac{H}{2}$ со скоростью $\frac{v_0}{2}$ вверх:

$$0 = \frac{H}{2} + \frac{v_0}{2}t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4gH}}{2g};$$

$$v = \frac{\sqrt{v_0^2 + 4gH}}{2}.$$

Если нас интересуют внутренние процессы в движущихся системах, то для того, чтобы отвлечься от их движения, удобно перейти в СОЦМ. В изолированной системе центр масс движется с постоянной скоростью, и такая система будет инерциальной. Аналогичный пример. Известно, что γ-кванты могут рождать пары частиц: электрон и позитрон. А может ли этот процесс рождения происходить с одним квантом? Для того, чтобы ответ стал очевидным, воспользуемся СОЦМ. В этой системе суммарный импульс электрона и позитрона равен нулю (так как массы частиц одинаковы, то центр масс всегда находится посредине, и относительно него $\vec{v}_э = -\vec{v}_п$).

В то же время испульс γ-кванта, из которого родились частицы, отличен от нуля, так как в любой системе отсчета он движется со скоростью света. Поэтому закон сохранения импульса «запрещает» такой процесс. Он может происходить при столкновении, например двух γ-квантов или, когда есть еще другие частицы, которым передается лишний импульс. Аналогично, по принципу обратимости, при аннигиляции* их должно происхо-

---

* *Аннигиляция* — процесс превращения частицы и античастицы в другие частицы, происходящий при их столкновении.

дить парное рождение γ-квантов. Как видим, в системе отсчета центра масс просто и удобно исследовать процессы ядерной физики и физики элементарных частиц. Фундаментальные законы наглядно «накладывают» запреты на невозможное.

Задача 1.4. Два электрона находятся на бесконечно большом расстоянии один от другого, причем один покоится, другой имеет скорость v, направленную к первому. На какое наименьшее расстояние они сблизятся? Масса электрона m, заряд l.

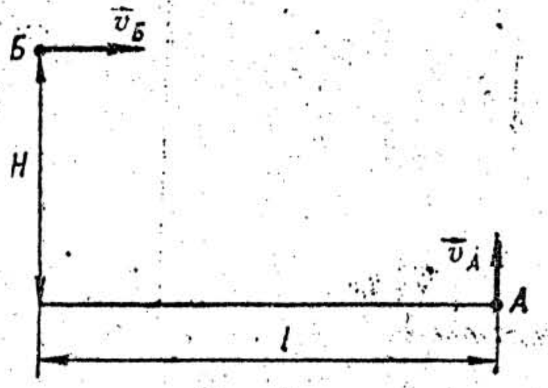


Рис. 4

Решение.

В СОЦМ оба электрона движутся навстречу друг другу со скоростью $\frac{v}{2}$.

Из закона сохранения энергии:

$$\frac{2m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l^2}{r_{\min}} \Rightarrow r_{\min} = \frac{l^2}{\pi\varepsilon_0 m v^2}.$$

Для решения задач на столкновение двух падающих тел систему отсчета выбирают по методу «падающего лифта». Представим себе, что мы находимся в свободно падающем лифте. Тогда все тела, брошенные нами внутри этого лифта, будут двигаться прямолинейно и равномерно.

Задача 1.5. Тело A бросают вертикально вверх со скоростью v_A. На какой высоте H находится тело $Б$, которое, будучи брошенным с горизонтальной скоростью $v_Б$ одновременно с телом A, столкнулось с ним в полете? Расстояние по горизонтали между исходными положениями тел равно l. Найти также время движения тел до столкновения (рис. 4).

Решение.

Поместим всю систему в падающий лифт. Здесь столкновение тел произойдет на высоте H. Тело $Б$ пролетит за время T расстояние l: $T = \frac{l}{v_Б}$. Тело A до столкновения преодолеет расстояние H: $H = \frac{v_A}{v_Б}\cdot l$.

До сих пор мы не объясняли правомерность произвольного выбора системы отсчета, полагаясь на интуицию читателя. Покажем, что физический закон в векторной форме не зависит от выбора системы координат.

Рассмотрим вектор $\vec{a}$, который в декартовых прямоугольных координатах запишется как $a = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ (рис. 5). При переходе к любой другой декартовой системе координат $\vec{a}$ сохраняется, поскольку это диагональ параллелепипеда. Говорят, что вектор $\vec{a}$ *инвариантен* по отношению к переносу начала и повороту координатных осей.

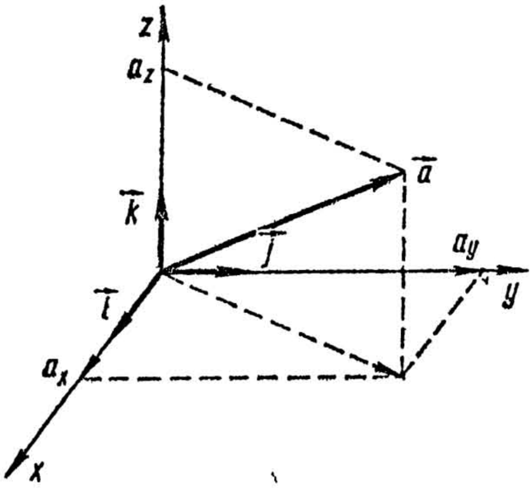


Рис. 5

Рассмотрим выражение $\vec{a} = \vec{b}$. Оно означает, что $a_x = b_x$; $a_y = b_y$; $a_z = b_z$. И в новой системе координат эти равенства выполняются, т. е. векторное равенство $\vec{a} = \vec{b}$ инвариантно по отношению к переносу начала и повороту координатных осей. Таким образом, физический закон, записанный в векторной форме, не зависит от выбора осей координат, связанного с требованием рационального решения задачи.

Задача 1.6. Два тела, находившихся первоначально на расстоянии l друг от друга, на гладкой наклонной плоскости начали движение навстречу друг другу со скоростями v. Угол наклона плоскости α (рис. 6). Найти время, пройденное до столкновения.

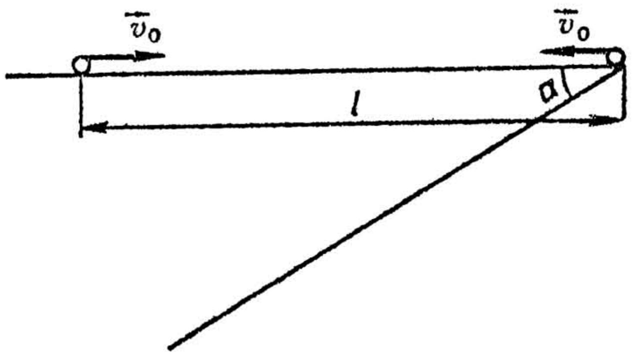


Рис. 6

Решение.

По методу падающего лифта с учетом поворота осей выберем систему отсчета, скользящую вниз по наклонной плоскости с ускорением $g \sin \alpha$. Искомое время $T = \frac{l}{2v}$.

Чтобы решить следующую задачу, выбираем вращающуюся систему отсчета.

Задача 1.7. Четыре черепахи находятся в углах квадрата. Первая ползет по направлению ко второй, вторая к третьей, третья к четвертой, четвертая к первой. Найти время движения черепах до столкновения (рис. 7). Известны a и v.

Решение.

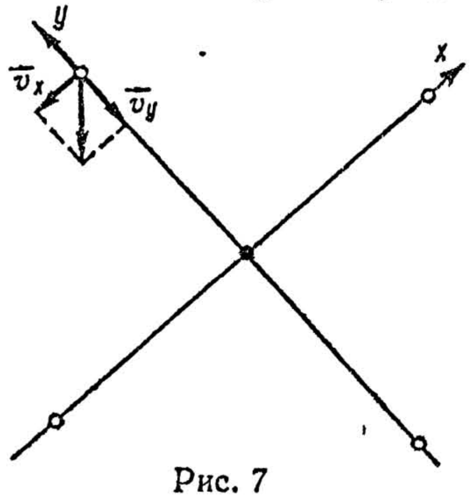


Рис. 7

Введем систему координат, которая в каждый момент времени будет иметь на оси y первую и третью черепахи, на оси x — вторую и четвертую. В любой момент времени черепахи будут в вершинах квадрата.

Вращение системы отсчета компенсирует $v_x = \text{const}$ ($\alpha = 45°$) (подумайте, как ω зависит от t качественно, определите длину траектории и координаты места встречи).

В итоге $t = \frac{s_y}{v_y} = \frac{a}{v}$.

Решение одной и той же задачи в различных системах отсчета способствует более глубокому усвоению сути происходящих процессов и, в конечном счете, помогает выбору рационального решения.

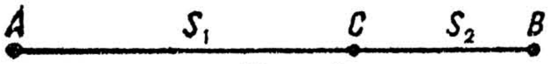


Рис. 8

Задача 1.8. Плот и моторная лодка одновременно начинают движение из пункта A. Лодка проходит путь $AB = S_1$ за время t и возвращается обратно. На расстоянии $BC = S_2$ лодка встречает плот. Найти скорость течения и собственную скорость лодки (рис. 8).

Решение.

1. Система отсчета «земля». Система двух уравнений с двумя неизвестными дает возможность найти u и v.

$$\begin{cases} \frac{s_1}{v+u} = t; \\ \frac{s_2}{v-u} + t = \frac{s_1 - s_2}{u}. \end{cases}$$

2. Система осчета «плот». В этой системе отсчета плот и вода покоятся, а лодка относительно плота имеет собственную скорость v, за счет которой она в течение времени t удаляется от плота и, очевидно, такое же время к нему приближается: $v = \frac{S_1 + S_2}{2t}$. За это же время плот проходит расстояние $S_1 - S_2$: $u = \frac{S_1 - S_2}{2t}$.

В заключение предлагаем решить эту задачу в системе «лодка».

Задачи для самостоятельного решения

1.9. Колонна бегунов имеет скорость v и длину l. Навстречу бегунам бежит тренер со скоростью u ($u < v$) Поравнявшись с тренером, каждый бегун поворачивает в противоположном направлении и бежит со скоростью v. Какова будет длина колонны, когда тренер поравняется с последним бегуном? Решить задачу в системе отсчета а) «тренер», б) «колонна», в) «земля».

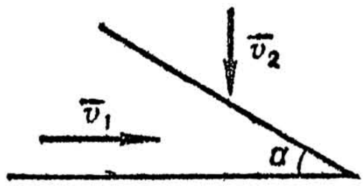


Рис. 9

Ответ. $l' = \dfrac{v-u}{v+u} \cdot l$.

1.10. Под каким углом к нормали к плоскости будет двигаться шарик после упругого соударения с движущейся наклонной плоскостью. (Рис. 1.9).

Ответ.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_2 \cos\alpha - v_1 \sin\alpha}{v_2 \sin\alpha + v_1 \cos\alpha}.$$

2. МЕТОД УСЛОЖНЕНИЯ — УПРОЩЕНИЯ

Рассмотрены некоторые способы введения новых элементов, казалось бы усложняющих задачу, но всегда дающих эффектные решения.

Рассматриваемый ниже метод усложнения — упрощения — это своеобразное использование анализа и синтеза Думается, что любая физическая задача решается с применением каких-то упрощений с последующим усложнением Да и в теории мы знакомимся с физическими идеализациями — материальной точкой, абсолютно черным телом, идеальным газом и другими А как быть, например, с реальным газом, если мы изучили идеальный?

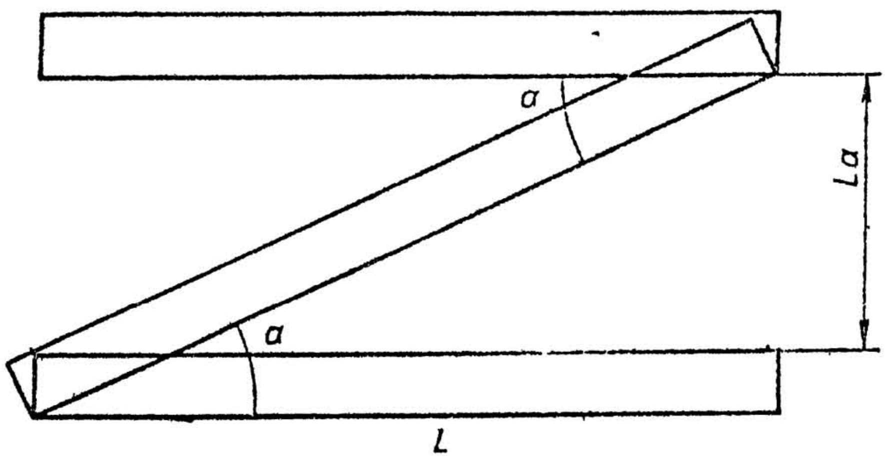
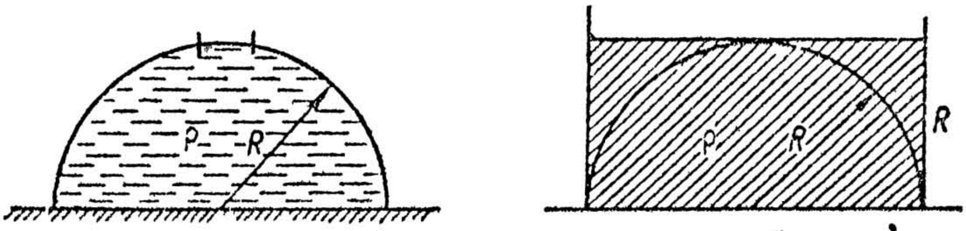


Рис. 10

Для реальных газов вводятся поправки на молекулярный обьем и межмолекулярное взаимодействие.

В некоторых задачах удобно разбить систему на составные части или, наоборот, «достроить» ее, упрощая тем самым ход решения. Впрочем готовых рецептов здесь нет, а опыт и видение метода достигаются упражнениями.

Задача 2.1. Доска массой m и длиной l лежит на горизонтальном полу. Коэффициент трения доски о пол равен



а *б*

Рис 11

k. Какую работу надо совершить, чтобы повернуть доску в горизонтальной плоскости на малый угол α вокруг одного из концов? (Рис. 10).

Р е ш е н и е.

1-й способ. Рассмотрим элемент доски dx массой $dm = \frac{mdx}{l}$, который при повороте на α проходит расстояние $x \cdot \alpha$.

При этом совершается работа $dA = kg\frac{mdx}{l} \cdot x\alpha$ или

$$A = l\int_0 \frac{kgm\alpha}{l} \cdot xdx = \frac{1}{2}kmgl\alpha.$$

2-й способ.

$$A = \frac{FL\alpha}{2} = \frac{1}{2}kmgl\alpha.$$

Результат получен после поворота и второго конца на угол α. Очевидно, что искомая работа равна половине работы по перемещению доски на $L\alpha$

Задача 2.2. В полусферический колокол, плотно лежащий на столе, наливают через отверстие вверху воду. Когда вода доходит до отверстия, она приподнимает колокол и начинает вытекать снизу. Радиус колокола R, плотность воды ρ. Найти массу колокола M.

Р е ш е н и е.

1-й способ. Прямое динамическое решение задачи (рис. 11, *а*).

$$F = Mg + \frac{2}{3}\pi R^3\rho g.$$

Но $F = \rho g R \cdot \pi R^2$,

$$M = \frac{1}{3}\pi R^3\rho.$$

2-й способ. Поместим систему в цилиндрический сосуд высотой и радиусом R. (Рис. 11, *б*).

Пусть колокол тонок, его масса мала. Давление на колокол снаружи и изнутри равно во всех точках. Если колокол убрать, то $M = (V_{\text{цилиндра}} - V_{\text{полушара}})\,\rho$,

$$M = \left(\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3\right)\rho = \frac{1}{3}\pi R^3\rho.$$

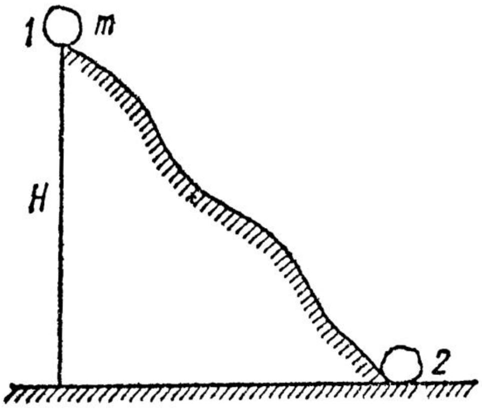


Рис 12

Задача 2.3. Тело массой m по произвольной траектории соскальзывает с высоты H на горизонтальную плоскость. Известно, что его конечная скорость равна нулю. Какую работу необходимо совершить, чтобы втащить тело назад по той же траектории?

Решение. Работа сил трения равна mgH. Из свойства обратимости работа против сил трения при подъеме также равна mgH.

Тогда $A = 2mgH$ (рис. 12).

Задача 2.4. Плотности поверхностного заряда на прямоугольных пластинах плоского конденсатора равны $+\sigma$ и $-\sigma$. Расстояние между пластинами меньше размера пластин. Определить напряженность электрического поля в точке A.

Решение. Дополнить тремя парами пластин до получения плоского конденсатора с напряженностью поля внутри него $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (рис. 13).

$$E = 4E_A; \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_A = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

Задача 2.5. Сплошной однородный медный диск радиусом R подключен к двум радиально идущим проводам, по которым подводится и отводится постоянный ток J. Точки подключения расположены на краю диска и видны из его центра под углом $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Определить магнитное поле в центре диска.

Решение. Выполним усложнение (рис. 14). $B_{12} = 6B$, но $B = 0$, значит $B_{12} = 0$.

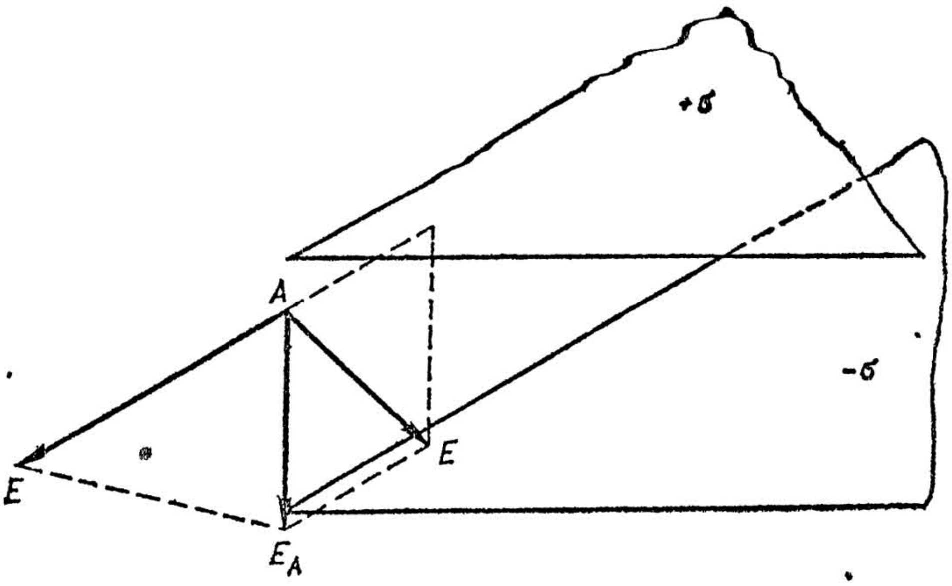


Рис. 13

Покажем примеры разбиения системы на составные части

Задача 2.6. Какая сила действует в сечении однородного стержня длиной l на расстоянии x от конца, к которому приложена сила F, направленная вдоль стержня? (Рис. 15, *а*.)

Р е ш е н и е. Разделим стержень на части, длины которых x и $(l - x)$ (рис. 15, *б*). Соединим их невесомой нитью (покажите, что натяжение такой нити одинаково в любом ее сечении).

Из II закона динамики $F - T = m_1 a$; $T = m_2 a$.

После деления получим $\frac{F-T}{T} = \frac{x}{l-x}$, откуда $T = F \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)$.

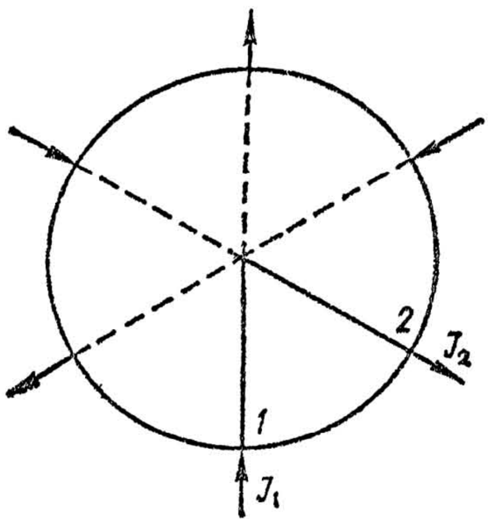


Рис. 14

Задача 2.7. Найти кинетическую энергию стержня, вращающегося в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Известны w; m; l (рис. 16, *а*)

Р е ш е н и е. Для половины стержня (рис. 16, *б*) $K_1 = \frac{m/2\ w^2 l^2/4}{6}$ (см. гл. 3). Но $K = 2K_1$, поэтому $K = \frac{mw^2 l^2}{24}$.

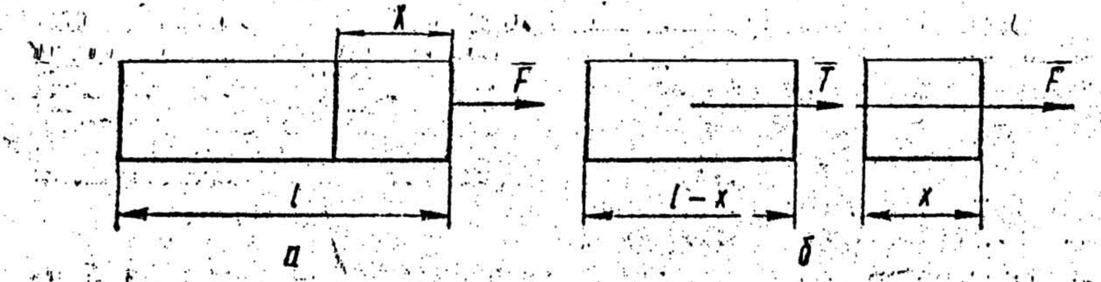


Рис. 15

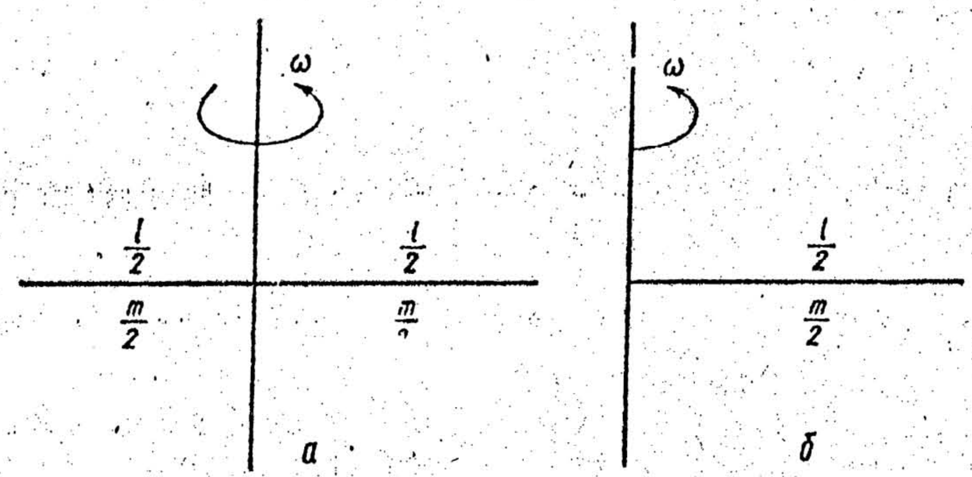


Рис. 16

Задача 2.8. Две диэлектрические заряженные нити бесконечной длины расположены в пространстве как две скрещивающиеся перпендикулярные прямые. Линейная плотность зарядов на нитях ρ. Найти силу их взаимодействия.

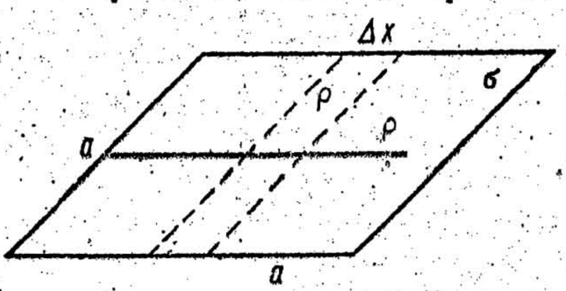


Рис. 17

Решение. Точно данная задача решается методом ДИ (см. гл. 3). Однако упрощение не вносит в результат существенных изменений. Рассмотрим взаимодействие прямой и плоскости.

Плоскость (квадрат со стороной a) разобьем на полосы Δx (рис. 17): $\Delta x = \frac{\rho}{\sigma}$, $F = 2\pi R\sigma \cdot \rho l$.

Тогда $F = f \cdot \frac{a}{\Delta x} = f \frac{l}{\Delta x} = f \cdot \frac{l \cdot \sigma}{\rho}$, откуда $f = \frac{\rho^2}{2\varepsilon_0}$.

Задачи для самостоятельного решения

2.9. Внизу запаянной с обоих концов пробирки высотой h находится маленький пузырек воздуха. Плотность жидкости ρ. Пробирку перевернули. Каково давление на ее дно?

Ответ. $p = 2\rho g h$.

2.10. Найти напряженность поля плоского конденсатора в точке A. Известны σ и ε (рис. 18).

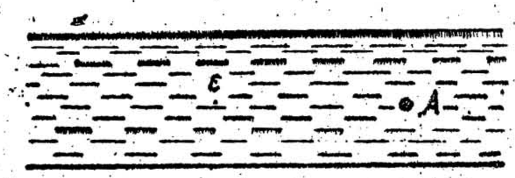


Рис. 18

Ответ. $E_A = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$.

2.11. Кольцо радиуса R имеет сопротивление r и находится в однородном магнитном поле. Вектор магнитной индукции B направлен перпендикулярно кольцу. Какой заряд протечет по кольцу, если его перевернуть?

Ответ. $q = 2\dfrac{B\pi R^2}{r}$.

3. МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ (ДИ)

Показано становление метода, его применение для решения задач и вывода формул.

Развитие метода дифференцирования и интегрирования связано с именами Ньютона и Лейбница. В основе его лежат два принципа: 1) *принцип возможности представления закона в дифференциальной форме* и 2) *принцип суперпозиции.*

Суть метода состоит в том, что если физический закон выражается в виде $Z = xy$ (1), где x, y, z — некоторые физические величины, причем $x = x(\varphi)$, то для нахождения z на интервале $[y_1; y_2]$ выражение (1) неприменимо из-за изменения x. Тогда интервал $[y_1; y_2]$ разбивают на конечное число малых промежутков dy (Δy), в пределах каждого из которых можно пренебречь изменением x (y).

Тогда $dZ = x(Y)\,dY$ или $Z = \int\limits_{y_1}^{y_2} x(Y)\,dY$.

Несколько слов о производной и интеграле в физике. Решая задачу о скорости произвольного движения, Ньютон пришел к понятию производной:

$$v = \dot{x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

То есть производная характеризует быстроту изменения параметров любого физического явления. Лейбниц ввел для производной такое обозначение: $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$. Таким образом, $\dfrac{dx}{dt}$ означает отношение конечных соответственных значений малых приращений dx и dt.

Известную формулу Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $f(x) = \frac{dF}{dx}$, в физике следует понимать как сумму большого числа слагаемых $\Sigma f(x_i)\,\Delta x_i$.

На первом этапе метода ДИ следует разделить тело на материальные точки либо траекторию или время на

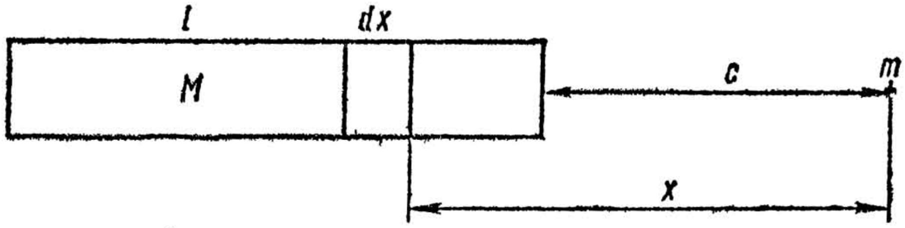


Рис 19

такие промежутки, на которых процесс можно считать равномерным. Затем по *принципу суперпозиции* произвести суммирование (интегрирование). Иными словами, на первом этапе мы находим вклад одного участка в искомую величину, затем производим суммирование по всем участкам. Рассмотрим конкретные задачи.

Задача 3.1. Найти силу гравитационного взаимодействия между расположенными на одной прямой материальной точкой массой m и однородным стержнем длиной L и массой M. Расстояние от точки до ближайшего конца стержня равно C (рис. 19).

Решение. Выделим на расстоянии x от точки элемент стержня длиной dx и массой $\frac{M}{L}\cdot dx$. Сила его взаимодействия с точкой

$dF = \gamma\frac{mM}{L\cdot x^2}dx$. Поэтому $F = \int_C^{C+L}\gamma\frac{mM}{L\cdot x^2}dx = \gamma\cdot\frac{mM}{C+L}\cdot C$

Задача 3.2. Однородный стержень длиной L и массой M вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через один из его концов. Найти кинетическую энергию стержня.

Решение. Вклад элемента dx стержня в кинетическую энергию всего стержня $dK = \frac{1}{2}\frac{M}{L}dx\,(\omega x)^2$, где $\frac{M}{L}dx$ — масса этого элемента, а x — расстояние до оси. Тогда ωx — его скорость. Осталось проинтегрировать полученное выражение от 0 до L:

$$K = \int_0^l \frac{1}{2}\frac{M}{L}dx\,(\omega^2x^2) = \frac{1}{6}ML^2\omega^2.$$

В некоторых задачах получение дифференциального выражения требует дополнительных упрощений.

Задача 3.3. Найти кинетическую энергию однородного диска радиуса R и массы M, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости.

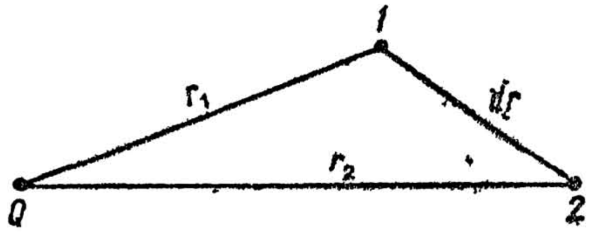


Рис. 20.

Р е ш е н и е. Разобьем диск на кольца шириной dx, каждое из которых отстоит от оси вращения на $x \in [0; R]$. Масса каждого кольца, вращающегося с линейной скоростью ωx:

$$dm = \frac{\pi M}{\pi R^2}[(x+dx)^2 - x^2] \approx 2\frac{M}{R^2}xdx.$$

Величиной $(dx)^2$ в сравнении с $2xdx$ можна пренебречь.

$$dk = \frac{1}{2}\cdot 2\frac{M\omega^2}{R^2}\cdot x^3dx.$$

$$\text{Откуда } K = \int_0^R \frac{M\omega^2}{R^2}x^3dx = \frac{1}{4}M\omega^2R^2.$$

Метод ДИ с успехом применяется для вывода формул.

Задача 3.4. В поле заряда Q на расстоянии r_1 от него находится заряд q. Какую работу необходимо совершить, чтобы изменить расстояние между зарядами до r_2? (Рис. 20)

Р е ш е н и е. Разобьем отрезок 1—2 на такие dr, в пределах каждого из которых силу взаимодействия между зарядами можно считать постоянной. Тогда $dA = k_2\frac{Qq}{r^2}dr$, откуда

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k\frac{Qq}{r^2}dr = q\cdot\left(k\frac{Q}{r_2} - k\frac{Q}{r_1}\right).$$

Сравнивая с $A = q\cdot(\varphi_2 - \varphi_1)$, получаем формулу для потенциала поля точечного заряда

$$\varphi = k\frac{Q}{r}.$$

Задача 3.5. Найти количество теплоты, выделяемое переменным током $i = I\sin(\omega t + \varphi)$ в течение одного периода в проводнике с сопротивлением R.

Решение. За время dt в проводнике выделяется $dQ = i^2Rdt$. Поэтому

$$Q = \int_0^T RI^2\sin^2(\omega t + \varphi)\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{I^2R}{\omega}\,\omega\sin^2(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{\pi}{\omega}RI^2.$$

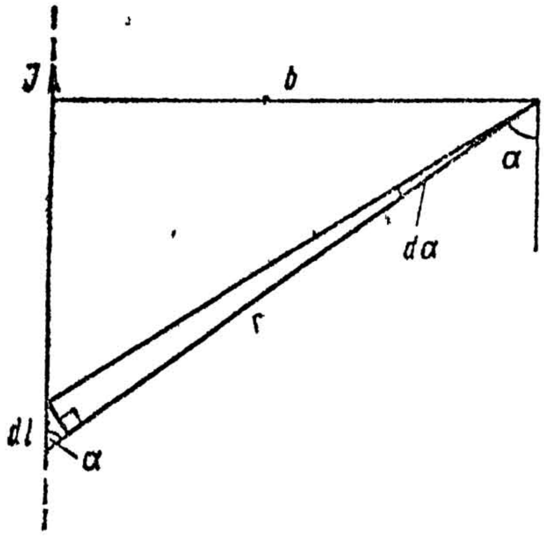


Рис. 21

Задача 3.6. Закон Био—Савара—Лапласа устанавливает вклад, вносимый в индукцию магнитного поля элементом dl проводника, по которому течет ток I:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{Idl\sin\alpha}{r^2},$$

l — расстояние до точки, в которой изменяется модуль вектора магнитной индукции B, а α — угол между направлением тока и радиус-вектором этой точки. Найти модуль вектора индукции магнитного поля прямого бесконечного тока на кратчайшем расстоянии от проводника. (Рис. 21)

Решение. Из рисунка 21 найдем $r = b : (\sin\alpha)$,

$$dl = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha} = \frac{bd\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Переменная интегрирования — α — лежит в пределах от 0 до π. Значит,

$$B = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\cdot b\cdot d\alpha\cdot\sin\alpha}{\frac{b^2}{\sin^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}.$$

Если проводник имеет конечную длину (рис. 22), то

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\cdot(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

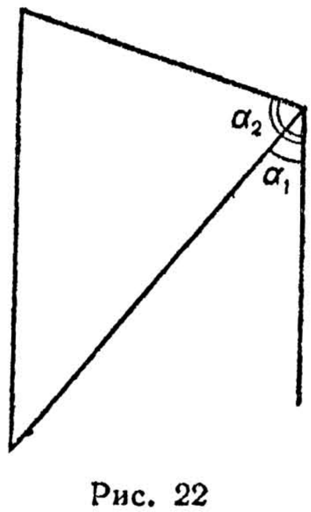


Рис. 22

Задача 3.7. Найти модуль вектора индукции магнитного поля кругового тока в центре витка радиуса R

Решение. Легко видеть, что для любого элемента $dl \sin\alpha = dl$. Поэтому $B = \int\limits_0^{2\pi r} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

Задачи для самостоятельного решения

3.8. Какую работу необходимо совершить, чтобы перетянуть брусок массой m и длиной l через шероховатую полосу шириной L? Коэффициент трения μ

Ответ. $A = \mu mgL$.

3.9. Найти модуль вектора индукции магнитного поля в точке O. (Рис. 23).

Ответ. $B = \frac{\mu_0 I (\pi + 1)}{2\pi R}$.

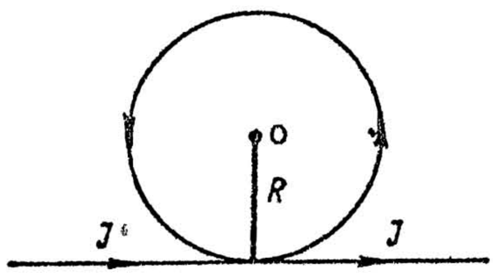


Рис. 23

4. МЕТОД ОБРАТИМОСТИ

Рассмотрены задачи кинематики, динамики, термодинамики, электростатики, которые можно решать «наоборот»

Обратимость — это свойство равновесных процессов, т. е. таких, которые можно осуществить в обратном направлении, повторяя все промежуточные состояния прямого процесса. Строго говоря, реальные процессы необратимы, но в физике изучается довольно много квазистационарных процессов (*квази* — почти)

Метод обратимости дает возможность упростить решение прямой задачи, когда удается переформулировать ее условие с тем, чтобы воспользоваться известными соотношениями.

Обратимы, например, прямая и обратная задачи механики. В термодинамике обратимы все замкнутые процессы — например циклы Карно, Отто, Дизеля

В электродинамике идея обратимости электрических и магнитных явлений, предугаданная Фарадеем после открытия Эрстеда в 1820 г., привела к формулировке закона электромагнитной индукции в 1831 г. Обратимость электромагнитных явлений материализована в двигателях и генераторах.

Яркой иллюстрацией ее могут служить все периодические процессы: от механических колебаний маятника до электромагнитных колебаний в контуре.

Известно, что все законы геометрической оптики обладают обратимостью. Применяемые для получения позитивного изображения пластинки и пленки являются еще одним примером ее.

Не является исключением обратимость и в ядерной физике. Наглядным тому примером могут служить взаимопревращения элементарных частиц.

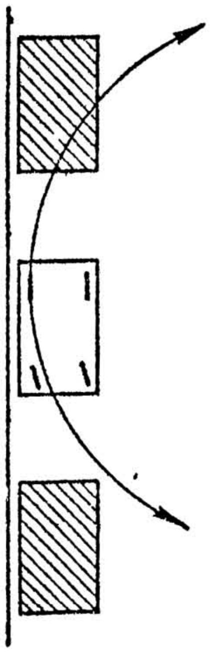


Рис. 24

Понять суть метода помогут следующие задачи.

Задача 4.1. За последние полсекунды свободно падающее тело проходит путь, равный 30 м. Найти скорость тела в момент приземления.

Решение. Из уравнений движения $S = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$ и скорости $v = v_0 + gt$, исключая v_0, получаем $v = \frac{s + \frac{gt^2}{2}}{t}$.

Последнее выражение запишем иначе:

$$S = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

Движение из ускоренного «превратилось» в замедленное. Конечная скорость стала «начальной».

Представьте себе, что в кино снятый эпизод падения прокручивают в обратном порядке. Таким образом, по методу обратимости значение скорости в момент падения тела следовало получить сразу.

Задача 4.2. За пятую секунду равнозамедленного движения тело проходит 5 см и останавливается. Какой путь тело прошло за третью секунду?

Решение. Используя обратимость, переформулируем задачу так. За первую секунду равноускоренного движения без начальной скорости тело проходит 5 см. Каков его путь за третью секунду?

Пути, проходимые телом при равноускоренном движении без начальной скорости за последовательные равные промежутки времени, относятся как нечетные числа натурального ряда (в книге содержится только графическое доказательство этого факта, а аналитически докажите это самостоятельно). Поэтому искомый путь равен 25 см.

Задача 4.3. Необходимо поставить в небольшой просвет между вереницей автомашин, стоящих вдоль тротуара, еще одну. Как следует заезжать в просвет: передним или задним ходом, если поворачиваются только передние колеса?

Р е ш е н и е. Рассмотрим выезд автомобиля (рис 24). При любом маневрировании центр окружности выезда лежит на прямой, проходящей через задние колеса. Таким образом, при выезде задним ходом вероятность задеть машину больше.

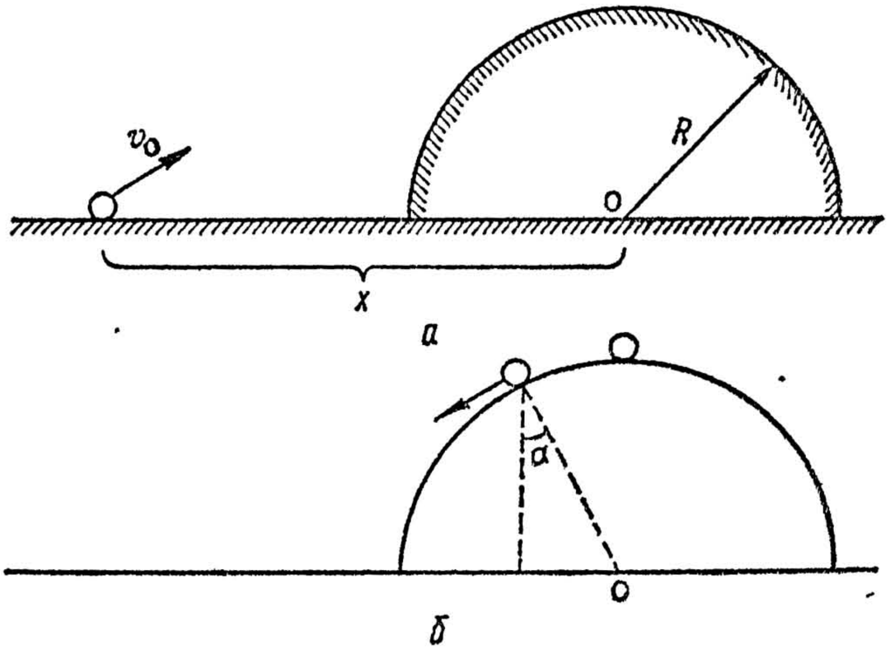


Рис. 25

Поэтому следует заезжать задним ходом.

Задача 4.4. Откуда необходимо бросить маленький шарик на жестко закрепленную на горизонтальной плоскости полусферу радиусом R, чтобы он остановился в ее вершине? (Рис. 25, *а*.)

Р е ш е н и е. Пусть шарик начинает без начальной скорости свободно двигаться с вершины полусферы (рис. 25, *б*).

$$\begin{cases} \dfrac{v_{\text{отр}}^2}{R} = g\cos\alpha; \\ \dfrac{mv_{\text{отр}}^2}{2} = mgR\,(1-\cos\alpha); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{2}{3}; \\ v_{\text{отр}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}gR}. \end{cases}$$

Дальнейшее движение описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\sin\alpha + v_{\text{отр}}\cos\alpha t; \\ R\cos\alpha = v_{\text{отр}}\sin\alpha\cdot t + \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow x \approx 1{,}13R.$$

Из закона сохранения энергии *следует*, что *начальная скорость может иметь единственное значение.*

$$mgR = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gR}$$

Задача 4.5. В калориметре медленно остывает расплав исследуемого вещества Удельная теплота плавления этого вещества 200 кДж/кг По графику зависимости температуры вещества от времени определить удельные

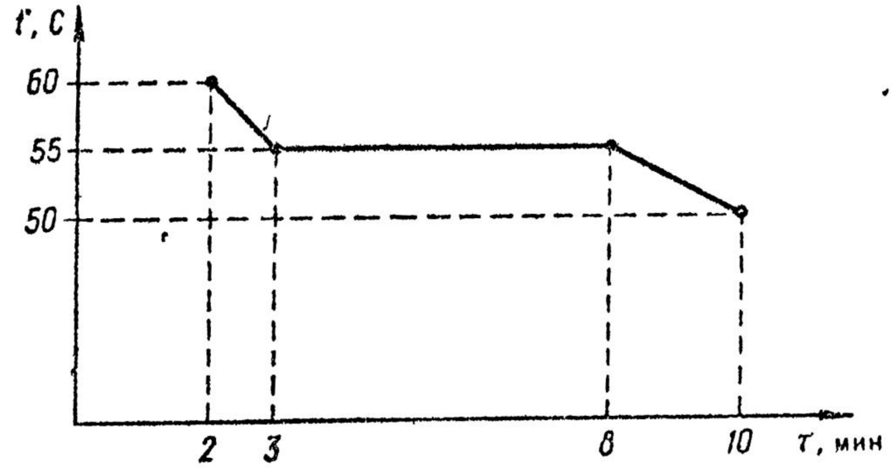


Рис 26

теплоемкости вещества в твердом и жидком состояниях. Теплоемкостью калориметра пренебречь (рис 26).

Решение. Рассмотрим процесс, обратный данному — нагревание При постоянной мощности нагревателя:

$$\frac{c_1 \cdot m \cdot 5}{120} = \frac{\lambda m}{300} = \frac{c_2 \cdot m \cdot 5}{60}.$$

Откуда $c_1 = 16 \frac{кДж}{кг \cdot к}$, $c_2 = 8 \frac{кДж}{кг \cdot к}$.

Задача 4.6. Проводящая сфера разбилась на несколько осколков, разлетающихся на большие расстояния друг от друга. Осколки в произвольном порядке соединяют тонкими проводами Что больше $C_{сферы}$ или $C_{системы}$? Емкостью проводов пренебречь

Решение Сообщим системе заряд $q > 0$.

$$W_{сф} = \frac{q^2}{2C_{сф}}; \quad W_{сист} = \frac{q^2}{2C_{сист}}$$

Собирая из осколков сферу, производим работу

$$A > 0. \; A = W_{сф.} - W_{сист} \Rightarrow \frac{q^2}{2C_{сф}} > \frac{q^2}{2C_{сист\ оск}}.$$

$$C_{оск.} > C_{сф}$$

4.7. Тормозной путь автомобиля 320 м. Считая движение равнозамедленным, разбить весь путь на такие 4 участка, на прохождение каждого из которых затрачено одинаковое время.

Ответ. 140 м; 100 м; 60 м; 20 м.

4.8. Кастрюлю, в которую налит 1 л воды, никак не удается довести до кипения при помощи нагревателя мощностью 100 Вт. Определить, за какое время вода нагрелась на последний градус.

Ответ. $\tau = 42$ с.

5. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС

Изложены способы нахождения центра масс, в том числе теорема Вариньона; показано различие между центром тяжести и центром масс.

Центром масс системы называется воображаемая точка, радиус — вектор которой

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

Обозначим массу системы $M = \sum\limits_{i=1}^{n}$ i

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n.$$

Найдем производную по времени:

$$M\vec{v}_{\text{ц}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n.$$

В правой части стоит суммарный импульс системы, а $\vec{v}_{\text{ц}}$ — скорость центра масс.

Таким образом, *центр масс системы движется как материальная точка массы M*. Это **теорема о движении центра масс.**

Найдя еще одну производную, получим

$$M\vec{a}_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ex} = \vec{F}.$$

Здесь $\vec{a}_{\text{ц}}$ — ускорение центра масс, $\vec{F}_i^{ex}$ — внешняя сила, действующая на i-тое тело системы, а F — равнодействующая всех сил, действующих на систему. Напомним, что на основании третьего закона Ньютона сумма внутренних сил равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{in} = 0.$$

Этот результат дает возможность сформулировать следующее определение центра масс системы, подверженной внешним воздействиям вне зависимости от их природы. Центр масс такой системы — точка приложения равнодействующей всех сил. В случае действия одних лишь сил тяжести центр масс системы заменяют совпадающим с ним, но более узким по содержанию понятием центра тяжести.

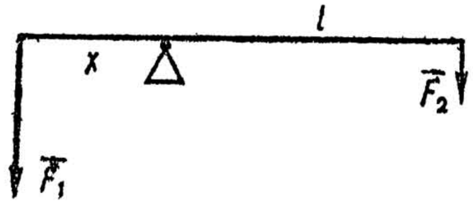


Рис. 27

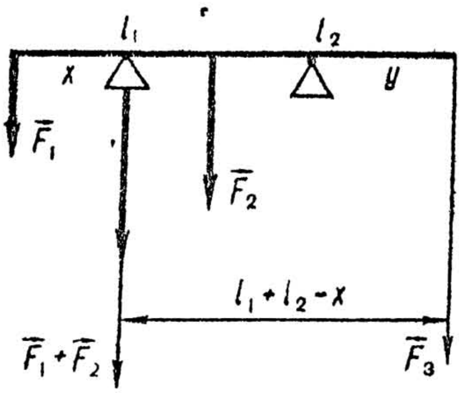


Рис. 28

В настоящей главе мы рассмотрим способы нахождения центра масс, а в следующей главе продемонстрируем применение теоремы о его движении.

Задача 5.1. К концам невесомого стержня длиной l приложены силы F_1 и F_2 (рис. 27). Найти точку приложения равнодействующей.

Р е ш е н и е. Пусть O — искомая точка. По правилу моментов $F_1 x = F_2 (l - x)$, откуда $x = \dfrac{F_2 l}{F_1 + F_2}$.

Задача 5.2. Найти центр масс системы, изображенной на рисунке 28.

Р е ш е н и е. Для сил F_1 и F_2 воспользуемся результатом задачи 5.1.

$$x = \frac{F_2 l_1}{F_1 + F_2}.$$

Вторично воспользуемся им для сил $(\vec{F} + \vec{F}_2)$ и $\vec{F}_3$:

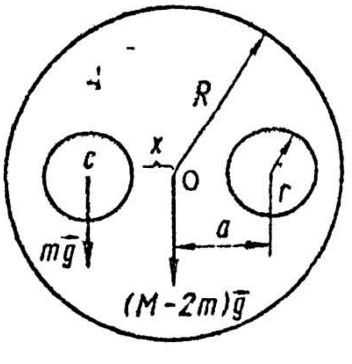
$$y = \frac{(F_1 + F_2) \cdot (l_1 + l_2 - x)}{F_1 + F_2 + F_3}.$$

Подставив значение x, получим

$$y = \frac{F_2 l_2 + F_1 (l_1 + l_2)}{F_1 + F_2 + F_3}.$$

Решив эти две задачи, мы фактически методом математической индукции доказали *теорему Вариньона*: момент равнодействующей относительно произвольно выбранной оси равен сумме моментов всех сил относительно этой же оси. Эта ось на рисунках 27 и 28 проходит через точку A. Теорема дает возможность находить центр масс, причем ось удобно выбирать в точке приложения нескольких сил (моменты этих сил будут равны нулю).

Задача 5.3. Из тонкого однородного диска радиуса R вырезан диск радиуса r $\left(r < \frac{R}{2}\right)$.



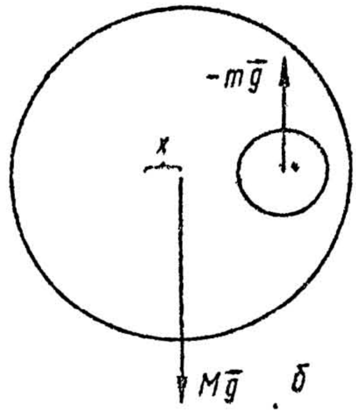


Рис. 29

Расстояние между центрами диска O и полости равно a $(a > r)$. Найти положение центра масс.

Р е ш е н и е. *1-й способ.* Вырежем диск C радиуса r симметрично относительно центра O (рис. 29, *а*).

$$\pi r^2 (a - x) = \pi (R^2 - 2r^2)\, x,$$

$$x = \frac{a}{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1}.$$

2-й способ (рис. 29, *б*).

Задачу решаем методом отрицательных масс.

Мысленно заполним полость однородным веществом той же плотности, что и диск. Чтобы такая операция была правомерной, введенную массу удобно считать «отрицательной».

$$\pi R^2 x + (-\pi r^2) \cdot (x + a) = 0,$$

$$x = \frac{a}{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1}.$$

Задача 5.4. На рис. 30 изображены цепочка длиной L и два стержня длиной $\frac{L}{2}$ каждый. Чей центр масс выше?

Решение. Оттянув цепочку вниз, мы придадим ей форму стержней. Следовательно, ц. м. стержней выше ц. м. цепочки.

Задача 5.5. На поверхности воды плавает деревянный кубик квадратного сечения $\left(\rho_{куб.} = \frac{\rho_{воды}}{2}\right)$. Какое из двух положений равновесия будет устойчивым?

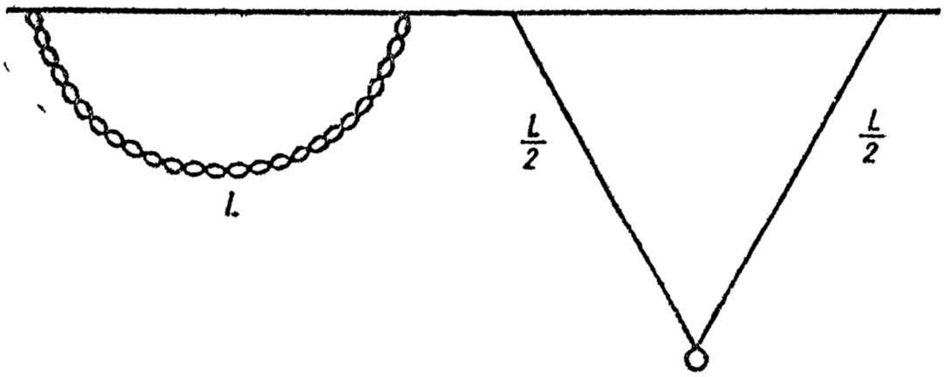


Рис. 30

Решение (рис. 31). В воде находится половина кубика, поэтому его центр тяжести в обоих случаях расположен на одной высоте. Центр тяжести вытесненной воды в первом случае находится на расстоянии $\frac{a}{4}$ от ее поверхности, во втором — $\frac{1}{3} a \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{a}{4}$. Это означает, что устойчивым будет положение 2.

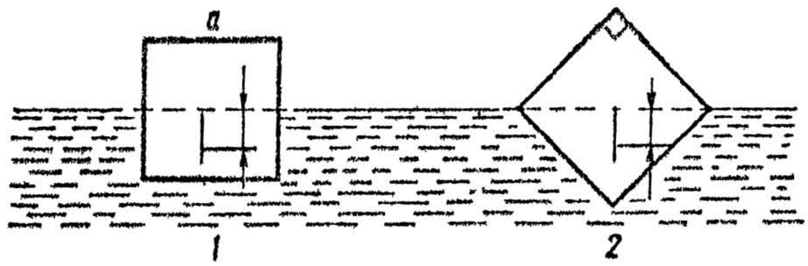


Рис. 31

Задача 5.6. Найти центр масс тонкой однородной проволоки, согнутой в виде полуокружности радиуса r.

Решение. Впишем в окружность правильный многоугольник (рис. 32). Пусть сила тяжести действует перпендикулярно чертежу. Момент сил тяжести, приложенных к серединам сторон многоугольника, относительно оси AK':

$$M = \rho g (AB \cdot x_1 + BC \cdot x_2 + CD \cdot x_3 + \cdots),$$

где ρ — масса единицы длины.

Поскольку

$$AB \cdot x_1 = AB' \cdot h,$$
$$BC \cdot x_2 = B'C' \cdot h,$$
$$CD \cdot x_3 = C'D' \cdot h,$$

то

$$M = \rho gh \cdot (AB' + C'B' + \dots) = \rho gh \cdot 2r = 2\rho ghr.$$

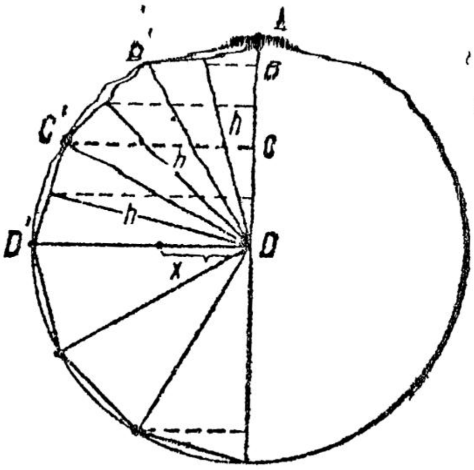


Рис. 32

Будем увеличивать число сторон многоугольника. Тогда $h \to r$ и, следовательно, $M = 2\rho gr^2$.

С другой стороны, $M = \pi r\rho g \cdot x$, отсюда $x = \frac{2r}{\pi}$.

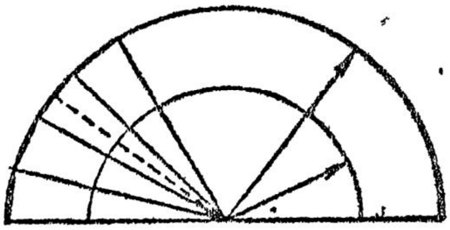
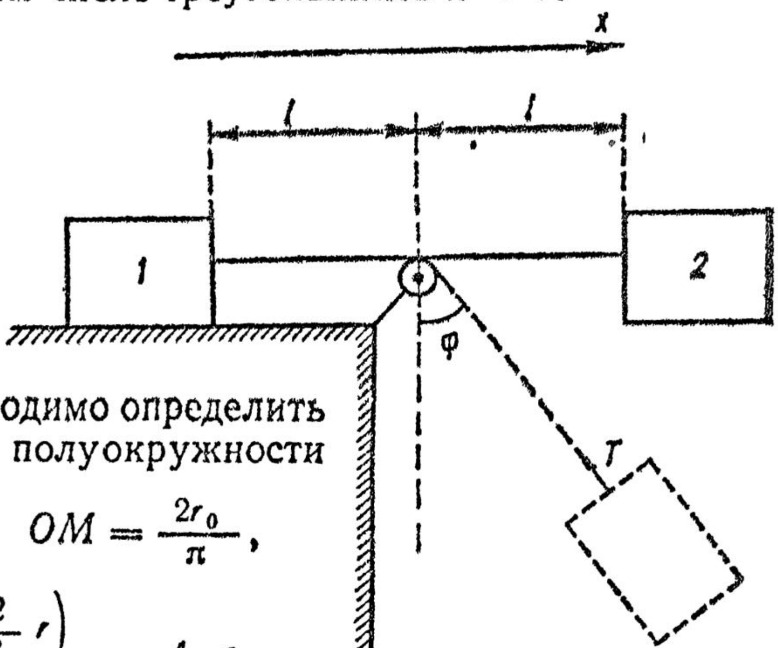


Рис. 33

Задача 5.7. Определить положение центра тяжести однородного тонкого полукруга радиуса r.

Р е ш е н и е. Разбиваем полукруг на треугольники и сегменты (рис. 33). Центры тяжести треугольников лежат на расстоянии $\frac{r}{3}h$ от точки O.

При большом числе треугольников $h \to r$.



Далее необходимо определить центр тяжести полуокружности

$$c \cdot r_0 = \frac{2}{3}; \quad OM = \frac{2r_0}{\pi},$$

$$OM = \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3} r\right)}{\pi} = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}.$$

Рис. 34

Центр масс дает возможность решать не только статические задачи.

Задача 5.8. Брусок 2 отпускают (рис. 34). Что произойдет раньше: 2 ударится о стену, или 1 упрется в блок?

Решение. На центр масс системы, первоначально находившейся на уровне стены, действует неотрицательная сила $T \cdot (1 - \cos\varphi)$, направленная вправо от оси x. Поэтому случай, когда 2 раньше ударится о стену, исключается, поскольку тогда центр масс будет левее плоскости стены.

Задачи для самостоятельного решения

5.9. Определить положение центра тяжести тонкой однородной проволоки, прогнутой по дуге радиуса r (рис. 35).

Ответ. $h = 2\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha} r.$

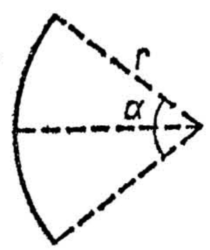


Рис. 35

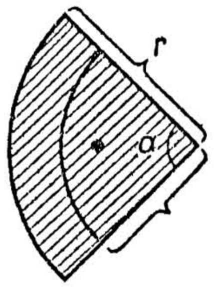


Рис. 36

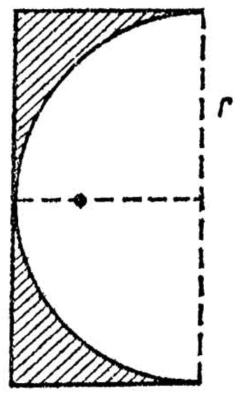


Рис. 37

5.10. Определить положение центра тяжести тонкой однородной пластинки, представляющей собой сектор радиуса r, имеющий центральный угол α (рис 36).

Ответ. $OM = \dfrac{4}{3}\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha} r.$

5.11. Найти центр масс фигуры (рис. 37).

Ответ. $OC = \dfrac{2}{3 \cdot (4 \cdot \pi)} r.$

6. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ. МЕТОД ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Этим методом решены задачи статики, гидростатики, динамики, электростатики. Показано применение метода для вывода формул.

Основная задача механики состоит в нахождении в любой момент времени параметров, характеризующих состояние движущейся системы. Наряду с другими способами описания (графический, табличный и т. д.) наиболее широкое распространение получил аналитический.

В основе механики лежат *принципы*. Это положения, которые отражают общие закономерности механических явлений, из которых можно получить уравнения движения. Различают *вариационные* и *невариационные* принципы механики. Их появление связано с именами Ньютона, Д'Аламбера, Лагранжа, Мопертюи, Бернулли и др.

Невариационные принципы механики устанавливают закономерности движения, совершаемого системой под действием приложенных сил. Это, например, широко используемый в школьном курсе физики второй закон Ньютона. Но в механике принципиально возможны два пути описания процессов: *силовой* (невариационный) и *энергетический*.

Путь силового описания ограничен тем, что не всегда в задаче известны или очевидны все силы взаимодействия, например силы реакции связей (натяжение нити, реакция плоскости). Другим недостатком является наличие большого числа уравнений, усложняющее решение. Энергетический подход (вариационные принципы) имеет то преимущество, что уравнения движения не содержат неизвестных реакций связи и дают негромоздкие, а порою и очень изящные решения.

Вариационные принципы механики в свою очередь подразделяются на *дифференциальные* и *интегральные*. Ниже мы рассмотрим в качестве дифференциального — метод виртуальных перемещений, интегрального — следствие из принципа наименьшего действия (экстремум энергии).

В 1717 г. Иоганн Бернулли в письме Вариньону описал новый способ решения статических задач. В основе этого способа лежит свойство сил реакции связи, полная работа которых при малом отклонении системы от положения равновесия равна нулю.

Это свойство сил реакции связано с законом сохранения энергии: поддержание связей в положении равновесия не требует расхода энергии (силы реакции приложены, однако нет смещения точек системы). Заметим, что в положении равновесия на точки системы действуют, кроме сил реакций, и внешние силы, которые существенно влияют на силы реакции При бесконечно малом положительном отклонении системы от положения равновесия работа внешних сил будет неотрицательной, то есть $A_{внешн} \geqslant 0$. Аналогично, при отрицательном отклонении $A_{внешн} \leqslant 0$.

Поскольку для системы принципиально возможны и положительные и отрицательные отклонения, то их единство в противоположности выражается условием $A_{внешн} = 0$.

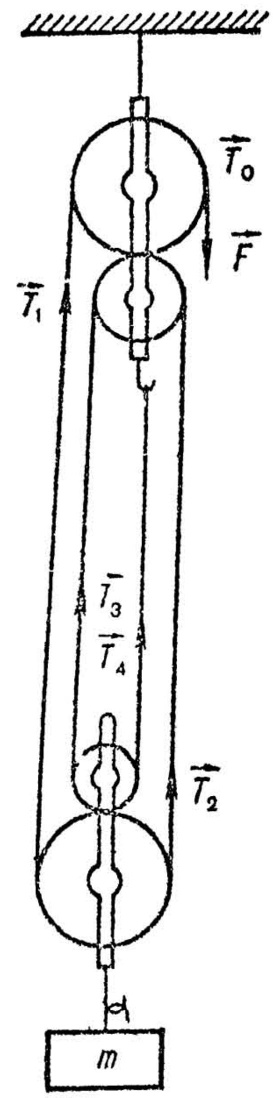


Рис 38

Формулировка принципа. Для равновесия любой механической системы с идеальными * связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ, действующих на систему сил при любом виртуальном перемещении, равнялась нулю.

Задача 6.1 (Лагранжа). В системе, изображенной на рисунке 38, к нижнему блоку подвешен груз массой m. Какую минимальную силу надо приложить к свободному концу нити, чтобы удерживать систему в равновесии? Нити нерастяжимы, блоки невесомы. Нити между блоками считать параллельными.

Р е ш е н и е. Пусть точка приложения силы перемещается вертикально вниз на расстояние δH (δ — обозначение приращения по Лагранжу). При этом груз m переместится вверх на расстояние $\delta h = \frac{1}{4}\delta H$.

$$\delta A_1 + \delta A_2 = 0, \quad F\delta H - mg\delta h = 0,$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg}{4}.$$

Традиционное решение.

Груз пребывает в равновесии, а значит силы натяжения, приложенные к любому участку нити, взаимно компенсируют друг друга: $T_0 = T_1$; $T_1 = T_2$; $T_2 = T_3$; $T_3 = T_4$ Кроме того, $F = T_0$; $mg = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 4F$.

$$F = \frac{mg}{4}.$$

---

* Идеальные связи невесомы, нерастяжимы и выдерживают любую заданную нагрузку.

В роли виртуального перемещения может выступать угол.

Задача 6.2. В коробке K (рис. 39) заключен передающий механизм неизвестной конструкции При повороте ручки P вертикальный винт B плавно поднимается. При одном полном обороте (радиус оборота r) винт перемещается на расстояние h На винт кладут груз массой m. Какое усилие надо приложить к ручке, чтобы удержать систему с грузом в равновесии?

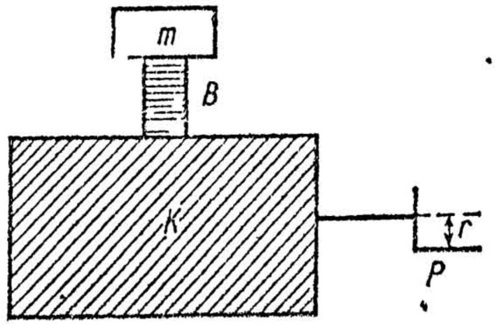


Рис. 39

Решение. Пусть искомая сила F при бесконечно малом повороте на угол $\delta\varphi$ совершает работу $\delta A_1 = = F\delta l = Fr\delta\varphi$. При этом груз m поднимается на высоту $\delta h = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi$ и работа силы тяжести $\delta A_2 = -mg\frac{h\delta\varphi}{2\pi}$. Тогда из $\delta A_1 + \delta A_2 = 0$ имеем $F = mg\frac{h}{2\pi r}$.

Заметим, что традиционными методами задача вообще решена быть не может, так как ничего не известно о скрытом в коробке механизме передачи

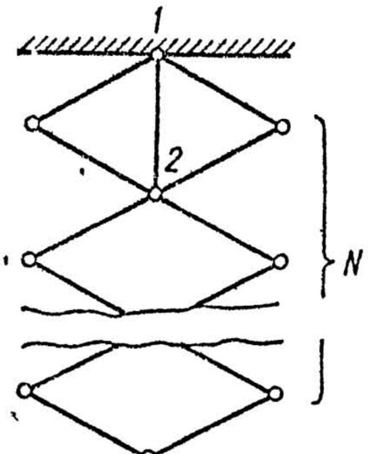


Рис. 40

Задача 6.3. Имеется цепочка, содержащая N одинаковых невесомых звеньев, скрепленных шарнирно (рис 40) Пренебрегая трением, определить, какое натяжение должна выдерживать нить, соединяющая точки 1 и 2, если к цепочке подвешен груз массой m

Решение Пусть груз m опустился на δh Работа силы тяжести $\delta A_1 = mg\delta h$ Работа силы натяжения $\delta A_2 = -T\delta H$ δH найдем из соображений симметрии Большая диагональ каждого из звеньев удлинилась на $\frac{\delta h}{N}$, что равно виртуальному перемещению точки 2. Поэтому $mg\delta h - T\frac{\delta h}{N} = 0$, или $T = Nmg$.

Метод виртуальных перемещений с успехом может быть применен и для вывода формул.

Задача 6.4. Вывести формулу избыточного давления внутри сферического пузыря.

Решение. Дадим радиусу r мыльного пузыря виртуальное перемещение δr. Работа сил избыточного давления $\delta A_1 = 4\pi r^2 p_{изб.}\delta r$. Работу сил поверхностного натяжения найдем как приращение поверхностной энергии.

$$\delta A_2 = 2\sigma 4\pi\,(r^2 - (r + \delta r)^2) = -16\pi\sigma r\delta r; \quad \delta A_1 + \delta A_2 = 0.$$

Поэтому $p_{изб.} = \dfrac{4\sigma}{r}$.

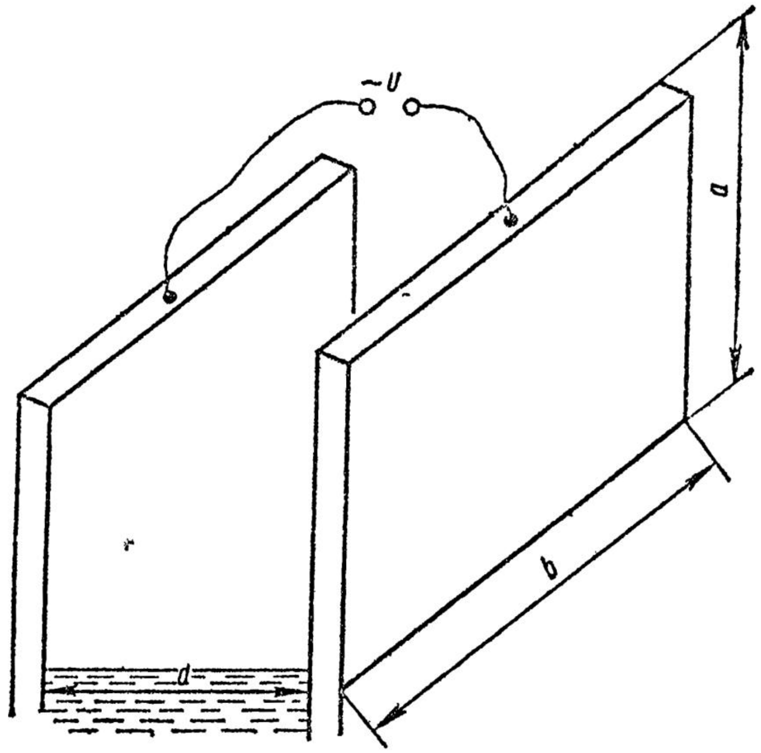


Рис. 41

Этой задачей мы расширили границы применимости метода виртуальных перемещений.

Задача 6.5. Каким станет $p_{изб}$, если равномерно по сфере распределить заряд q?

Решение.

$$\delta A_1 = 4\pi r^2 p_{изб}\,\delta r; \quad \delta A_2 = -16\pi\sigma r\delta r;$$

$$\delta A_3 = \frac{-q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon\,(r + \delta r)} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{q^2\delta r}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 r\,(r + \delta r)};$$

$$\delta A_1 + \delta A_2 + \delta A_3 = 0.$$

Пренебрегая δr в сравнении с r, получим $p_{изб} = \dfrac{4\sigma}{r} - \dfrac{q_2}{32\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^4}$.

Воспользуемся методом виртуальных перемещений для решения задачи по электростатике.

Задача 6.6. Жидкость с диэлектрической проницаемостью ε налита в большой сосуд. Две вертикально расположенные параллельные пластины касаются поверхности жидкости (рис. 41). Расстояние между пластинами d. Пластины подключают к источнику с разностью потенциалов U. Какова будет высота h столба жидкости между пластинами после установления равновесия?

Решение. Пусть жидкость поднялась на δh. Пренебрегая изменением массы жидкости, получим: $\delta A_1 = -mg\frac{\delta h}{2} = -\frac{1}{2}\rho ghdb\delta h$.

Работа сил электрического поля $\delta A_2 = \frac{U^2}{2}\delta C$. Найдем δC.

Рассматривая заполненную и незаполненную части конденсатора как два параллельно соединенных, найдем емкость эквивалентного конденсатора.

$$C = \frac{\varepsilon_0 S_1}{d} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S_2}{d} = \frac{\varepsilon_0 ab}{d} + \frac{(\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 bh}{d}.$$

Очевидно, $$\delta C = \frac{(\varepsilon - 1)\cdot\varepsilon_0\cdot b\cdot\delta h}{d}.$$

Таким образом, $$\delta A_2 = \frac{1}{2}U^2\frac{(\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 b\delta h}{d}.$$

Окончательно $\delta A_1 + \delta A_2 = 0$, или

$$h = \frac{U^2(\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0}{\rho gd^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.7. Петля из гибкой тяжелой цепи массы m надета на гладкий прямой круговой конус, высота которого H, а радиус основания R (рис. 42) Цепь покоится в горизонтальной плоскости. Найти натяжение цепи.

Ответ. $T = \frac{mgH}{2\pi R}$.

6.8. Электрический заряд Q равномерно распределен по тонкой, абсолютно жесткой металлической сфере радиуса R. Какая сила действует на единицу площади поверхности со стороны остального заряда?

Ответ. $F = \frac{Q_2}{32\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 R^4}$.

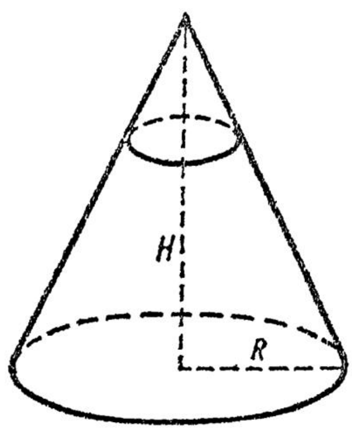


Рис. 42

6.9. На некотором расстоянии x от горизонтально поддерживаемой балки с грузами m_1 и m_2 находится нижний конец пружины, верхний конец которой закреп-

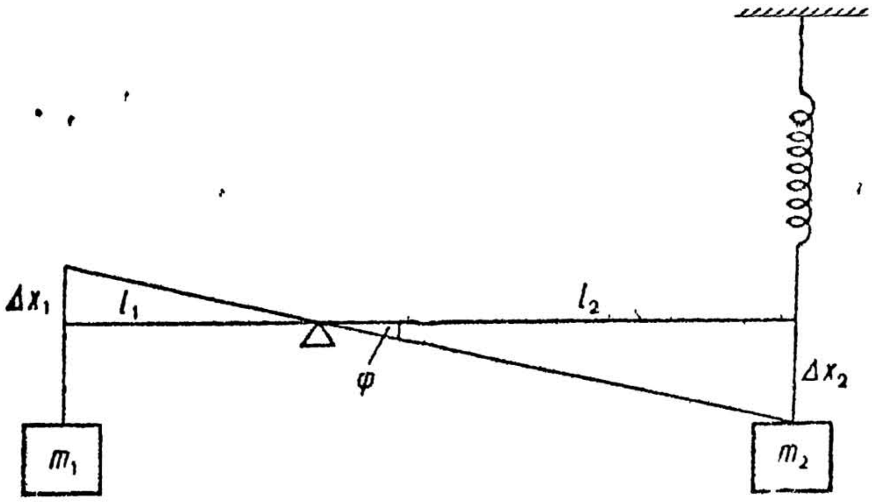


Рис. 43

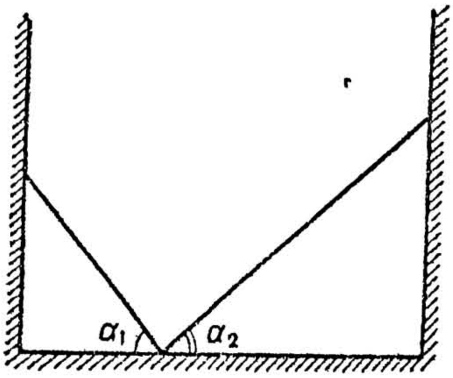


Рис. 44

лен. Пружину растянули и прикрепили к концу балки с грузом m_2, при этом балка осталась в горизонтальном положении после того, как ее отпустили. Жесткость пружины K, плечи рычага l_1 и l_2. Найти x (рис. 43).

Ответ. $x = \dfrac{m_2 l_2 - m_1 l_1}{k l_2} \cdot g.$

6.10. Два однородных стержня, массы которых m_1 и m_2, опираются на гладкие вертикальные стенки и гладкую горизонтальную поверхность (рис. 44). Найти соотношение между углами α_1 и α_2 при равновесии системы.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{m_1}{m_2} \operatorname{tg}\alpha_2.$

7. МЕТОД ЭКСТРЕМУМА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрены условия равновесия систем, подверженных одновременно нескольким воздействиям. Решаются задачи статики, гидростатики, динамики вращательного движения, молекулярной физики и электростатики.

Говоря о вариационных принципах механики, невозможно обойти вниманием «Трактат по динамике» Д'Аламбера (1743 г.). В нем изложены три принципа механики.

1. Принцип силы инерции.

Д'Аламбер наряду с Галилеем и Ньютоном признает за телами свойство сохранять то состояние, в котором они находятся.

2. Принцип сложения движений

Это обобщение опытных данных — принцип *суперпозиции* движений. Из него очевидны, например, параллелограммы скоростей и сил. Первые два принципа подробно рассматриваются в школьном курсе физики, и мы ниже также будем говорить о них. Подробнее мы остановимся на третьем.

3. Принцип равновесия

Д'Аламбер следует за Мопертюи, который в 1740 г. доказал, что в равновесии системы экстремальна величина «сумма сил покоя». Что же это за величина?

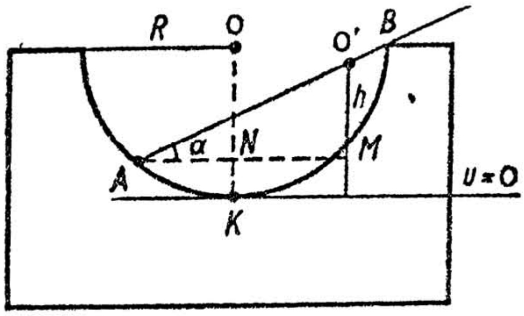


Рис. 45

Для равновесия системы необходима *стационарность* ее потенциальной энергии. Это означает, что при малых отклонениях системы изменение U незначительно. Ниже будет показано, что условием равновесия является экстремум потенциальной энергии Если в системе действуют *диссипативные силы* (силы жидкого трения, например), то и при их наличии условие равновесия — стационарность (экстремум) — выполнимо, так как в положении равновесия ($v = 0$) диссипативные силы равны нулю

Если система ограничена идеальными связями, не производящими работы при любых, как мы уже показали, виртуальных перемещениях, то стационарность U, U_{min} и U_{max} соответствуют равновесию, устойчивому и неустойчивому.

Пусть тело находится в поле консервативных сил. Каждой точке такого поля ставится в соответствие сила. Такие поля называются потенциальными Работа консервативных сил по замкнутому контуру равна нулю, не зависит от формы пути и равна убыли потенциальной энергии. При перемещении тела на малое расстояние dx сила F_x совершает работу $F_x dx$ Ясно, что $F_x = \frac{dU}{dx}$. Поскольку в положении равновесия $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$, то $\frac{dU}{dx} = 0$, то есть потенциальная энергия экстремальная

Для решения задач на нахождение условия равновесия системы необходимо найти выражение для потенциальной энергии, продифференцировать его и, приравняв к нулю, решить относительно неизвестного.

Задача 7.1. Гладкий однородный стержень длиной $2L$ опирается на край гладкой, неподвижной полусферической чаши радиуса R (рис. 45). Какой угол α образует стержень с горизонтом в положении равновесия? Трением пренебречь.

Решение. Выберем за нулевой уровень U горизонталь, проходящую через K. Расстояние от центра тяжести до этой прямой

$$h = R(1 - \sin 2\alpha) + L \sin \alpha.$$

В положении равновесия $\frac{dU}{d\alpha} = 0$.

$4R\cos^2\alpha - L\cos\alpha - 2R = 0$, откуда

$$\alpha = \arccos\left[\frac{1}{8R}\left(L + \sqrt{L^2 + 32R^2}\right)\right].$$

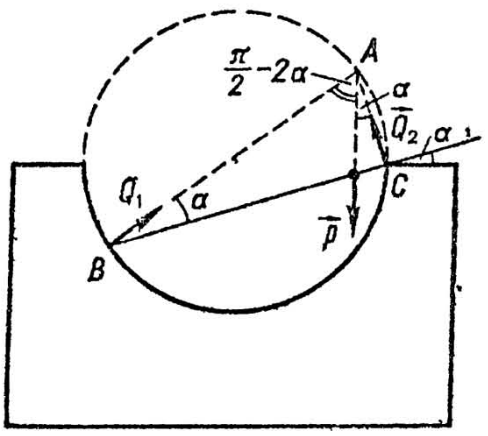


Рис. 46

Корень один, так как α — угол острый. Покажем также традиционное решение задачи

На стержень действуют три силы: сила тяжести mg, приложенная в середине стержня, и силы реакции чаши Q_1 и Q_2 (рис. 46). Так как трение отсутствует, сила Q_1, действующая на конец стержня, упирающегося в чашу, направлена перпендикулярно поверхности чаши, то есть по радиусу; сила Q_2 приложена к стержню со стороны края чашки и направлена перпендикулярно стержню. (Объясните сами почему.) Если стержень находится в положении равновесия, то линии, по которым действуют эти силы, пересекаются в одной точке A Действительно, рассмотрим точку пересечения линий действия каких-либо двух сил, например Q_1 и Q_2, и составим условие равенства нулю суммы моментов всех сил относительно этой точки. Моменты сил Q_1 и Q_2 относительно точки пересечения их направлений равны нулю, следовательно, момент силы P также должен быть равен нулю, то есть линия действия силы P проходит через эту же точку. Этого факта достаточно для нахождения положения равновесия стержня. Из элементарных геометрических соображений легко найти все углы, указанные на рисунке. Теперь можно составить уравнение для какой-нибудь тригонометрической функции искомого угла α Находя из прямоугольного треугольника ABC хорду $BC = 2R\cos\alpha$ и учитывая, что точка приложения силы тяжести лежит посредине стержня, получим $x = 2R\cos\alpha - L$. (1)

Далее, рассматривая радиус OC как сумму двух отрезков, на которые его делит линия действия силы тяжести P, находим

$$R = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + x\cos\alpha. \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получаем после простых преобразований квадратное уравнение для $\cos\alpha$:

$$4R\cos^2\alpha - L\cos\alpha - 2R = 0.$$

* Равновесие систем, в которых работа связи определяется изменением потенциальной энергии, также описывается условием экстремума. Пример тому — равновесие тела в жидкости. Найдем потенциальную энергию тела, погруженного в жидкость. Пусть тело массы m и объема V перемещается внутри жидкости плотности ρ на $\Delta h = h_1 - h_2$. Работа силы тяжести $A_1 = mg\Delta h$, архимедовой силы $A_2 = -\rho gV\Delta h$. Суммарная работа $A = A_1 + A_2 = (m - \rho V)\, gh_1 - (m - \rho V)\, gh_2$ равна убыли потенциальной энергии $A = U_1 - U_2$. Значит $U = (m - \rho V)\, gh$.

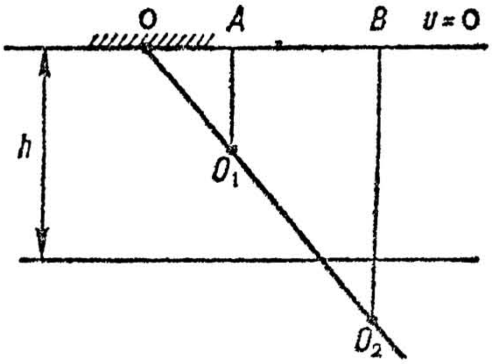


Рис. 47

Задача 7.2. Однородная тонкая палочка шарнирно укреплена за верхний конец. Нижняя часть ее погружена в воду, причем равновесие достигается тогда, когда она расположена наклонно к поверхности воды и в воде находится ее половина Какова плотность материала палочки?

Решение. За нулевой уровень U выберем горизонталь через O (рис. 47). Потенциальная энергия надводной части палочки $U_1 = -\frac{\rho V}{2} g \frac{h}{2}$, а подводной $U_2 = \left(\frac{\rho gV}{2} - \frac{\rho_b gV}{2}\right)\frac{3}{2}h$. Условие равновесия палочки $\frac{d(U_1 + U_2)}{dh} = 0$, откуда $\rho = \frac{3}{4}\rho_b$.

Консервативными могут быть не только природные силы, но и фиктивные. Это означает, что о поле *центро-*

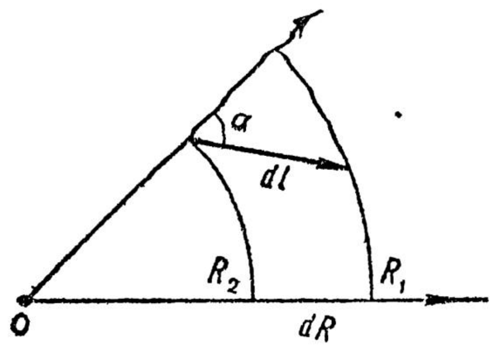


Рис. 48

бежных сил инерции можно говорить как о потенциальном. Пусть тело массы m вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω на расстоянии r от центра вращения. В *неинерциальной* системе отсчета на него действует центробежная сила инерции, направленная вдоль радиуса от центра вращения и равная $F_{\text{уб}} = m\omega^2 r$. Пусть тело переместилось на малое расстояние dl, в пределах которого $F_{\text{уб.}}$ *стационарна* (см. гл. о методе DU). Работа этой силы $dA = m\omega^2 r dl \cos\alpha$.

Но $dl\cos\alpha = dr$ (рис. 48). Поэтому

$$A = \int_{R_1}^{R_2} m\omega^2 r dr = \frac{1}{2} m\omega^2 r_2^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 r_1^2, \quad \text{откуда} \quad u = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2.$$

Задача 7.3. На гладкое проволочное кольцо радиуса R надет маленький шарик массой m (рис. 49). Кольцо вместе с шариком вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через диаметр кольца с угловой скоростью ω. Где находится шарик?

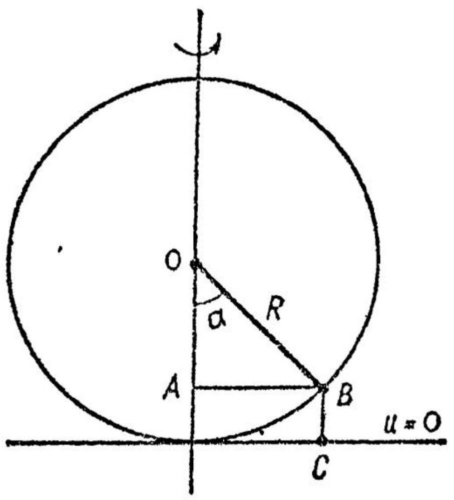


Рис. 49

Р е ш е н и е. За нулевой уровень u примем нижнюю точку кольца. Тогда потенциальная энергия шарика в поле тяжести $u_1 = mgR \times (1 - \cos\alpha)$, а потенциальная энергия в поле центробежных сил инерции $u_2 = -\frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2\alpha$. Но в положении равновесия шарика $\frac{d(U_1 + U_2)}{d\alpha} = 0$. Поэтому при $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$, $\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$, при $\omega \leqslant \sqrt{\frac{g}{R}}$; $\alpha = 0$. Подумайте, почему получилось два ответа.

Экстремум энергии обуславливает равновесие систем, подверженных одновременно нескольким взаимодействиям. Напомним, что потенциальная энергия упругой деформации $u = \frac{kx^2}{2}$, потенциальная энергия заряда q

в поле заряда Q $u = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$, энергия свободной поверхности жидкости $u = \sigma S$.

Задача 7.4. Тонкое резиновое кольцо массой m и радиуса R_0 раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω. Найти новый радиус кольца, если жесткость резины k.

Решение. Пусть R — новый радиус кольца. Тогда $x = 2\pi(R - R_0)$ и $u_1 = \frac{4\pi^2 k (R - R_0)}{2}$. Потенциальная энергия кольца в поле центробежных сил инерции $u_2 = -\frac{1}{2} m\omega^2 R^2$. Поэтому из $\frac{d(U_1 + U_2)}{dR} = 0$ получаем $R = \frac{4\pi^2 k}{4\pi^2 k - m\omega^2} R_0$.

Задача 7.5. Какой радиус будет иметь капля, которой сообщили заряд Q, если коэффициент поверхностного натяжения σ?

Решение. Пусть R — радиус капли. Поверхностная энергия $u_1 = \sigma 4\pi R^2$, электростатическая $u_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$. В положении равновесия $\frac{d(U_1 + U_2)}{dR} = 0$, или $R = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{64\pi\varepsilon_0\sigma}}$.

В заключение покажем, что экстремум потенциальной энергии может быть, например, применен для нахождения натяжения нити, пребывающей в равновесии.

Задача 7.6. Металлическая цепочка длиной l и массой m, концы которой соединены, насажена на деревянный диск, вращающийся с частотой ν. Определить силу натяжения цепочки.

Решение.

$$u_1 = \frac{4\pi^2 k (R - R_0)^2}{2}; \quad u_2 = -\frac{1}{2} m\omega^2 R^2.$$

Из $\frac{d(U_1 + U_2)}{dR} = 0$ получаем $4\pi^2 k (R - R_0) = m\omega^2 R$. Учитывая, что $T = 2\pi k (R - R_0)$, $l = 2\pi R_0$ и $\omega = 2\pi\nu$, имеем $T = ml\nu^2$.

Задачи для самостоятельного решения

7.7. Тяжелый стержень согнули в середине под углом 90° и подвесили свободно за один из концов. Какой угол образует прикрепленная сторона с вертикалью?

Ответ. $\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}$.

7.8. *Стержень* OA *вращается около вертикальной оси с угловой скоростью* ω. *Угол между осью и стержнем равен* α (рис. 50). По стержню без трения скользит муфта массой m, связанная с точкой O пружиной с начальной длиной l и жесткостью k. Определить положение муфты при вращении.

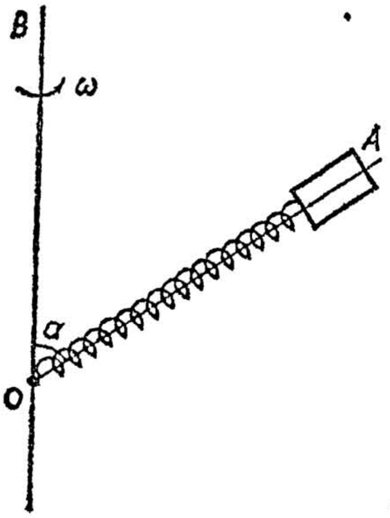


Рис. 50

Ответ. $l = \dfrac{kl_0 - mg\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha}$.

7.9. В горизонтальную трубу длиной L помещен положительно заряженный шарик. Вблизи концов трубы находятся с одной стороны закрепленный заряд $+q_1$, с другой — закрепленный заряд $+q_2$. Найти положение равновесия шарика

Ответ. $x = \dfrac{q_1 - \sqrt{q_1 \cdot q_2}}{q_1 - q_2} \cdot L$.

7.10. Одна пластина плоского конденсатора закреплена неподвижно, другая подвешена на пружине жесткостью k. Площадь каждой пластины S. Как изменится длина пружины, если пластинам сообщить равные или противоположные по знаку заряды Q? Поле между пластинами считать однородным.

Ответ. $\Delta x = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 Sk}$.

8. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Продемонстрирована универсальность применения законов сохранения массы, заряда, импульса, полной механической энергии для решения различных физических задач.

Законы сохранения играют исключительно важную роль в процессе познания физических форм движения материи. В них полагается, что существуют величины, которые обладают замечательным свойством — не меняться во времени. Законы отражают важнейший диалектико-материалистический принцип неуничтожимости материи и ее движения, взаимосвязь и взаимопревращаемость форм движения

В известной мере являясь критерием истины, законы сохранения обладают функцией запрета, то есть непротиворечивость этим законам является убедительным аргументом в пользу их истинности, а несоответствие — безоговорочно отвергает решение любой задачи. В отличие от других приемов и методов решения законы сохранения дают возможность получать конечный результат, не вдаваясь в рассмотрение подробного механизма протекания процесса (явления), когда неизвестны другие данные. В основе метода лежит использование сохранения для замкнутых систем массы системы, электрического заряда, импульсов, моментов импульсов, и, наконец, сохранение полной энергии системы. Природа разнообразна в своих свойствах и проявлениях, но замечательно, что существуют в определенных условиях законы сохранения каких-то физических величин. Ими мы и предлагаем воспользоваться.

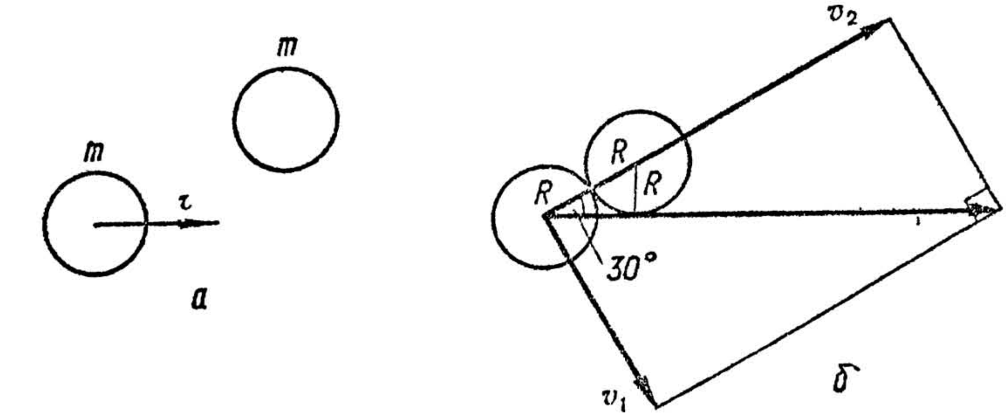


Рис. 51

Задача 8.1. Два одинаковых тела участвуют в упругом соударении Первое тело покоится, а второе имеет скорость $\vec{v}$ (рис. 51, *а*).

Найти скорость второго тела по отношению к первому.

Р е ш е н и е. Из рисунка 51, *б* видно, что второе тело приобретает скорость, направленную под углом 30° к

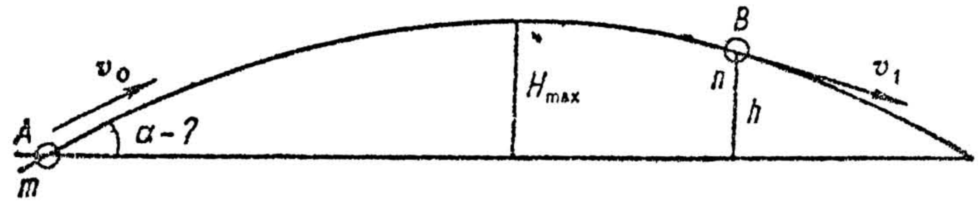


Рис. 52

начальному импульсу системы. Из закона сохранения энергии $v_2 = v_1^2 + v_2^2$, то есть векторы v, v_1, v_2 образуют прямоугольный треугольник. Скорость второго тела относительно первого равна гипотенузе этого треугольника, а значит, равна $\vec{v}$.

Задача 8.2. При каких углах бросания α существует точка траектории, в которой кинетическая энергия тела в три раза больше его потенциальной относительно уровня Земли?

Решение. Запишем закон сохранения полной механической энергии для начальной точки A и искомой B (рис. 52).

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh.$$

Но по условию задачи в точке B: $\frac{mv_1^2}{2} = 3mgh$.

В итоге $\frac{mv_0^2}{2} = 4mgh$; $h = \frac{v_0^2}{8g}$, но $H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

Если $h \leqslant H_{max}$, то $\frac{v_0^2}{8g} \leqslant \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$, откуда $\sin\alpha \geqslant \frac{1}{2}$.

Следовательно, при углах бросания $\alpha \geqslant 30°$ условие задачи выполнимо.

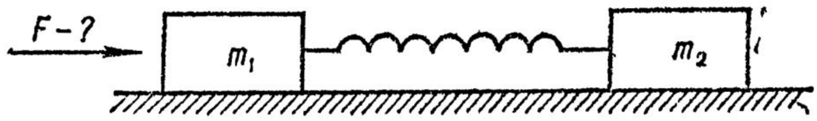


Рис. 53

Заметим лишь, что кинематическое решение этой задачи громоздко.

Задача 8.3. Два бруска с массами m_1 и m_2 соединены недеформированной легкой пружиной Бруски лежат на горизонтальной плоскости и μ — коэффициент трения между брусками и плоскостью.

Какую минимальную горизонтальную силу F следует приложить к бруску m_1, чтобы другой брусок сдвинулся с места? (Рис. 53.)

Решение Если на брусок m_2 будет действовать внешняя сила больше силы трения ($F_{внеш} \geqslant F_{тр}$), он сдвинется. Значит, эта сила должна быть $F \geqslant \mu m_2 g$. Но эта сила возникает лишь за счет сжатия пружины, то есть $(F_{внеш}) = (F_{упр}) = K\Delta x = \mu m_2 g$ (1).

Пусть искомая сила — F, тогда ее работа по сжатию пружины должна сопровождаться и работой против силы трения, действующей на первый брусок.

Уравнение $F\Delta x = \frac{K\Delta x^2}{2} + \mu m_1 g \Delta x$ (2) показывает, что работа приложенной внешней силы идет на увеличение потенциальной энергии пружины и на работу против сил трения первого бруска.

Найдя из (1) $\Delta x = \frac{\mu m_2 g}{k}$ и подставив его в (2), после простейшего преобразования имеем

$$F = \mu g\left(\frac{m_2}{2} + m_1\right).$$

Подумайте, какой физический смысл коэффициента $\frac{1}{2}$ перед m_2.

Задача 8.4. Космический корабль находится на расстоянии $2 \cdot 10^7$ м от поверхности Земли и в системе координат, связанных с Землей, имеет скорость $6 \cdot 10^3$ м/с, направленную по радиусу от центра Земли. Двигатели корабля не работают. Упадет ли корабль на Землю или улетит в космическое пространство? Влиянием других тел, кроме Земли, пренебречь.

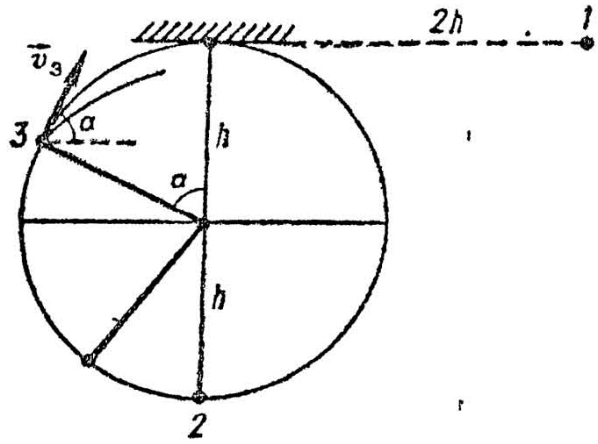


Рис. 54

Решение. Если кинетическая энергия корабля больше его потенциальной энергии в поле Земли, то он улетит ($E_{кин} > E_{пот}$) или, что то же, если скорость корабля на орбите больше второй космической ($v > v_1$).

Найдем кинетическую энергию корабля:

$$E_{кин.} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m (6 \cdot 10^3)^2 \frac{м^2}{с^2} = 1{,}8 \cdot 10^7 m. \quad (1)$$

Ускорение свободного падения на высоте:

$$g_h = \left(\frac{R_0}{R_h}\right)^2 g_0.$$

Подсчитаем потенциальную энергию корабля в гравитационном поле Земли:

$$E_{пот.} = m g_h R_h = 1{,}5 \cdot 10^7.$$

$E_{кин} > E_{пот}$. Корабль улетит

Задача 8.5. На нити длиной $2h$ висит тело малых размеров. Его вместе с нитью отклоняют так, что нить горизонтальна. На какую максимальную высоту поднимется тело, если на пути движения нити посредине расположен гвоздь на одной вертикали с точкой подвеса? Потерями энергии пренебречь (рис. 54).

Решение. После некоторой точки 3, где натяжение нити равно нулю, движение тела аналогично движению тела, брошенного под углом к горизонту. Найдем высоту точки 3 по отношению к точке 2. $H_3 = h + h\cos\alpha$, где α подлежит определению.

Поскольку $T = 0$, $mg\cos\alpha = \frac{mv_3^2}{h}$, то $\cos\alpha = \frac{v_3^2}{gh}$.

Скорость v_3 найдем из закона сохранения энергии.

$$2mgh = mgH_3 + \frac{mv_3^2}{2}.$$

$$2 = \frac{H_3}{h} + \frac{v_3^2}{2gh} \quad \text{или} \quad 2 = \frac{H_3}{h} + \frac{\cos\alpha}{2}.$$

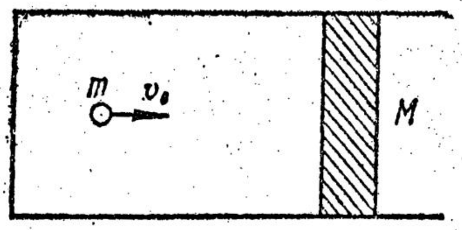


Рис. 55

Подставив значение H_3, получим $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Поэтому $H_3 = h + \frac{2}{3}h = \frac{5}{3}h$; $v_3^2 = \frac{2}{3}gh$.

Окончательно $H_{max} = H_3 + \frac{v_3^2\sin^2\alpha}{2g}$.

После подстановки значений v_3, H_3, $\sin\alpha$ получаем $H_{max} = \frac{50}{27}h$.

Налицо нарушение закона сохранения энергии?! Естественно, нет. Просто тело в этот момент имеет горизонтальную скорость

$$v_{3x} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gh}.$$

Покажите это.

Задача 8.6. В закрепленном на столе цилиндре под поршнем находится одна «молекула» — шарик массой m. Вначале поршень массой M неподвижен, а скорость молекулы направлена перпендикулярно ему. Какую скорость будет иметь поршень через достаточно большое время? Трение и силу тяжести не учитывать. Считать все удары абсолютно упругими и что по обе стороны поршня вакуум ($M \gg m$) (рис. 55).

Решение. Через достаточно большое время скорости поршня и «молекулы» будут одного порядка. $W_{\text{кин.эн.поршня}} \gg W_{\text{кин.эн.молекулы}}$.

По закону сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{Mv^2}{2}+\frac{mv^2}{2},\ \text{но}\ \frac{mv^2}{2}\ll\frac{Mv^2}{2}.$$

Откуда

$$v=v_0\sqrt{\frac{m}{M}}.$$

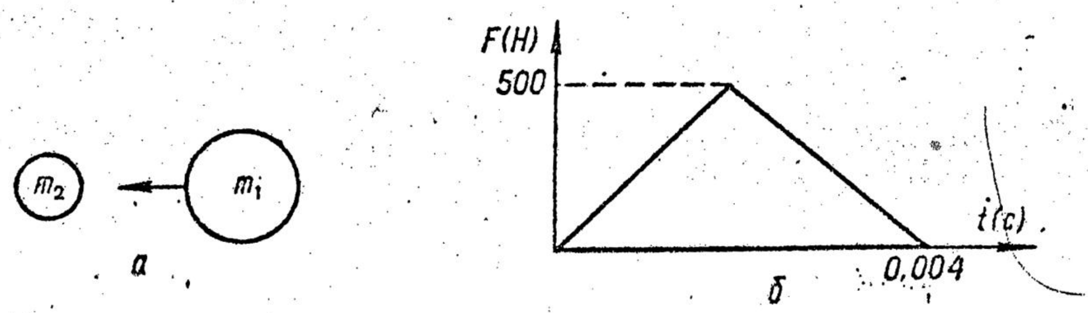


Рис. 56

Задача 8.7. Шар массой $m_1 = 1$ кг налетает со скоростью $v = 3$ км/с на неподвижный шар массой $m_2 = 0,5$ кг (рис. 56, *а*). Удар центральный. Зависимость силы взаимодействия шаров от времени приблизительно представлена на графике (рис. 56, *б*). Определить энергию, перешедшую в тепло при ударе.

Решение. Модуль полного изменения импульса каждого шара

$$\Delta p=\sum_{i=1}^{n}F_i\Delta t_i=\frac{1}{2}500\ \text{Н}\cdot 0,004\ \text{с}=1\ \text{Н}\cdot\text{с}.$$

Закон сохранения энергии запишем в таком виде: $\frac{p_1^2}{2m_1}=\frac{(p_1-\Delta p)^2}{2m_1}+\frac{(\Delta p)^2}{2m_2}+Q$, где p_1 — импульс массы m_1, Δp — изменение импульса.

Откуда $Q = 1,5$ Дж.

Задача 8.8. Два тела одинаковых масс участвуют в упругом соударении. Начальные скорости тел v_1 и v_2 направлены под углом α друг к другу.

Под каким углом β тела разлетаются, если их скорости стали u_1 и u_2 соответственно? (Рис. 57)

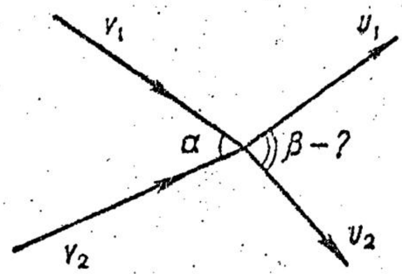


Рис. 57

Решение. Закон сохранения импульса дает возможность воспользоваться теоремой косинусов.

$$v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha=u_1^2+u_2^2+2u_1u_2\cos\beta.$$

Из закона сохранения энергии следует, что $v_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2$. Поэтому

$$\cos\beta = \frac{v_1 v_2}{u_1 u_2}\cos\alpha$$

Задача 8.9. Вывести закон Паскаля для гидравлического пресса, используя законы сохранения энергии и массы

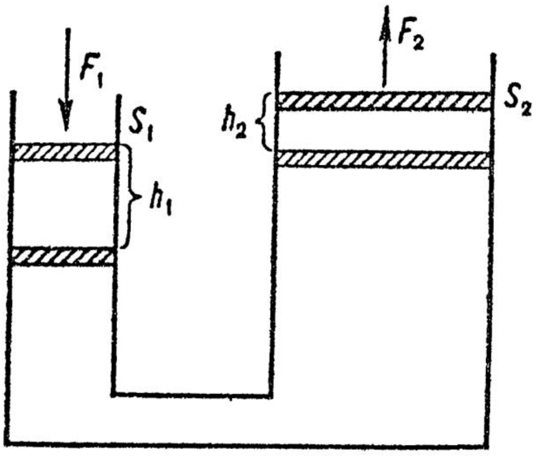


Рис. 58

Решение. Считаем ρ жидкости постоянной, а $F_{тр} \to 0$ (трения нет). Пусть S_1 и S_2 — площади поршней гидравлического пресса. Подействовав на меньший поршень силой F_1, переместили его на h_1 Из закона сохранения массы следует, что второй поршень поднимается на h_2 (рис. 58): $m_1 = m_2$; $\Delta V_1 = \Delta V_2$

Работа опускания $A_1 = F_1 h_1$. Поскольку нет трения несжимаемой жидкости, то A_2 — работа по поднятию большего поршня. $A_2 = F_2 h_2$, но $F_1 = p_1 S_1$, а $F_2 = p_2 S_2$.

Учитывая, что $A_1 = A_2$, запишем:

$$p_1 S_1 h_1 = p_2 S_2 h_2.$$

$$p_1 \Delta V_1 = p_2 \Delta V_2.$$

$$p_1 = p_2 = p.$$

Это и есть закон Паскаля, а правило для гидравлического пресса запишется:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = p.$$

Задача 8.10. Два одинаковых стальных бруска длиной $l = 0{,}1$ м сталкиваются торцами. Оценить время соударения брусков. При каких скоростях брусков возникнут неупругие явления, если предельное давление стали $2 \cdot 10^8$ Па? $\rho_{стали} = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, $E_{стали} = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Решение. Скорость упругих волн $v_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5$ км/с. (1)

Время соударения — это время прохождения волны от одного конца стержня до другого и обратно.

$$t \approx \frac{2l}{v_0} = 4 \cdot 10^{-5} с. \qquad (2)$$

Неупругие явления возникнут тогда, когда в каких-либо точках стержня давление достигнет p, то есть потенциальная энергия, отнесенная к единице объема, достигнет $\frac{p^2}{2E}$. (3)

Такими точками являются точки на поверхности соприкосновения стержней В них в момент удара вся кинетическая энергия полностью переходит в потенциальную (отнесенную к тому же объему).

$$\frac{\rho v^2}{2} \approx \frac{p^2}{2E} \quad (4), \qquad v \approx \sqrt{\frac{p^2}{\rho E}}. \qquad (5)$$

Задача 8.11. Какое максимальное количество капель ртути, лежащих на гладкой горизонтальной поверхности, могут слиться в одну большую каплю?

Р е ш е н и е. Согласно одному из важнейших следствий из закона сохранения энергии все в природе стремится к минимуму потенциальной энергии. Поэтому система объединяющихся капель будет сливаться до тех пор, пока уменьшение энергии поверхностного слоя будет меньше (или в. критической ситуации станет равным), увеличению потенциальной энергии капли в поле тяжести.

Пусть n капель слились в одну Из закона сохранения массы (плотность ртути считаем постоянной):

$$n\,\frac{4}{3}\pi r^3\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho \Rightarrow R = r\sqrt[3]{n},$$

r — радиус первоначальных капель, R — радиус образовавшейся капли.

Изменение поверхностной энергии

$$\Delta W_{\text{пов}} = n\sigma 4\pi r^2 - \sigma 4\pi R^2 = 4\pi r^2 \left(n - \sqrt[3]{n^2}\right)\sigma$$

должно быть равно изменению потенциальной энергии системы.

$$\Delta W_{\text{пот}} = n\,\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g R - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g h r =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\rho g r^4 \left(n\sqrt[3]{n} - n\right),$$

$$\Delta W_{\text{пов}} = \Delta W_{\text{пот}},$$

$$n = \left(\frac{\sigma}{\rho g r}\right)^3.$$

В реальном случае число слившихся капель меньше из-за потерь энергии при слиянии на нагрев вещества

Задача 8.12. При падении с большой высоты капля испаряется постепенно. С какой высоты (где было облако) падал дождь, если у поверхности он испарился? (Оценить.) (Рис. 59.)

Решение. Из уравнения закона сохранения энергии $mgh = cm\Delta t + mL$ получим $h = \frac{c\Delta t + L}{g}$.

Задача 8.13. Найти зависимость между давлением и объемом одного моля одноатомного идеального газа в адиабатном процессе.

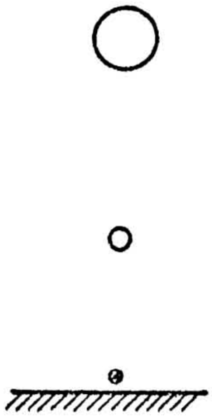


Рис. 59

Решение. Воспользуемся законом сохранения и превращения энергии для тепловых и механических процессов — первым началом термодинамики:

$$Q = A + \Delta u.$$

В адиабатном теплоизолированном процессе $Q = 0$ или $A = -\Delta U$, то есть $Pdv = -\frac{3}{2} RdT$. (1)

Из уравнения Менделеева — Клапейрона $PV = RT$ найдем

$$RdT = PdV + VdP. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$5PdV = -3VdP$ или $\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}$, где $\gamma = \frac{5}{3} = \frac{C_p}{C_V}$ называется показателем адиабаты.

Окончательно $PV^{\gamma} = \text{const}$

Это уравнение является решением поставленной задачи и носит имя Пуассона

Задача 8.14. Проводник емкостью C_1, заряженный до потенциала φ_1, соединяют с проводником емкостью C_2 и потенциалом φ_2 тонким длинным проводником бесконечно малого сопротивления. Найти изменение энергии системы.

Решение. Воспользуемся законом сохранения заряда:

$C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = (C_1 + C_2)\varphi$, где φ — новый потенциал проводников, так как заряды перераспределяются до тех пор, пока не выравняются потенциалы. Тогда изменение энергии системы

$$\Delta W = W_1 - W_2 = \left(\frac{C_1\varphi_1^2}{2} + \frac{C_2\varphi_2^2}{2}\right) - \left(\frac{C_1\varphi^2}{2} + \frac{C_2\varphi^2}{2}\right) = \frac{C_1C_2}{2(C_1 + C_2)}(\varphi_1 - \varphi_2)^2.$$

С чем связано изменение энергии системы и происходит ли оно при соединении двух проводников сверхпроводником? Перераспределение зарядов приводит к их неравномерному движению, что сопровождается излучением электромагнитных волн.

Задача 8.15. К батарее с ЭДС $\mathscr{E}$ подключен последовательно с некоторым сопротивлением плоский конденсатор емкости C. Пластины конденсатора быстро сближают; так что расстояние между ними уменьшается вдвое. Предполагая, что за время перемещения пластин заряд конденсатора практически не изменился, найти количество теплоты Q, выделившееся на сопротивлении к моменту окончания перезарядки (рис. 60).

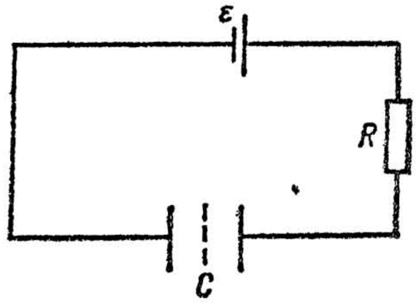


Рис. 60

Решение. Количество теплоты, выделившееся на сопротивлении (Q), равно работе сторонних сил в батарее ($A_{\text{стор}}$) без изменения электрической энергии конденсатора ΔW_C.

Закон сохранения энергии в процессе перезарядки конденсатора

$$Q = A_{\text{стор}} - \Delta W_C.$$

Пусть Δq — изменение заряда конденсатора в процессе перезарядки

$$\Delta q = \Delta (C\mathscr{E}) = (2C - C)\,\mathscr{E} = C\mathscr{E},$$
$$A_{\text{стор}} = \Delta q\mathscr{E} = C\mathscr{E}^2.$$

После сближения пластин емкость конденсатора стала $2C$ и, следовательно, разность потенциалов (при неизменном заряде) равна $\mathscr{E}$. После окончания процесса перезарядки разность потенциалов вновь будет равна $\mathscr{E}$. Поэтому,

$$\Delta W_C = \frac{2C\mathscr{E}^2}{2} - \frac{2C\left(\frac{\mathscr{E}}{2}\right)^2}{2} = \frac{3}{4}C\mathscr{E}^2.$$

Таким образом,

$$Q = \frac{1}{4}C\mathscr{E}^2.$$

Задача 8.16. Какая энергия выделится в виде тепла (рис. 61, *а*) при замыкании ключа К? Характеристика диода приведена на рисунке 61, *б*.

Какая энергия рассеется на диоде? Чему равна работа батареи?

Р е ш е н и е. Конденсатор C зарядится до напряжения $U_C = \mathscr{E} - U_0$. Через батарею пройдет заряд

$$q = CU = C(\mathscr{E} - U_0).$$

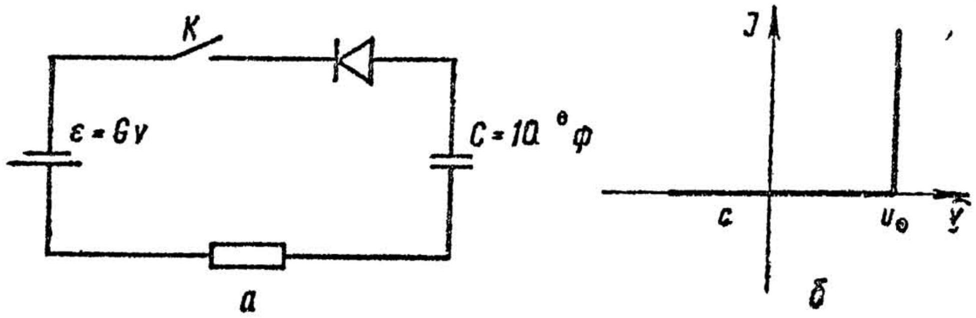


Рис. 61

Работа батареи $A = \mathscr{E}_q = C\mathscr{E}(\mathscr{E} - U_0)$. В тепло перейдет энергия

$$Q = A - \frac{CU^2}{2} = \mathscr{E}C(\mathscr{E} - U_0) - \frac{C \cdot (\mathscr{E} - U_0)^2}{2}.$$

На диоде рассеется энергия

$$A = qU_0 = C \cdot (\mathscr{E} - U_0) \cdot U_0.$$

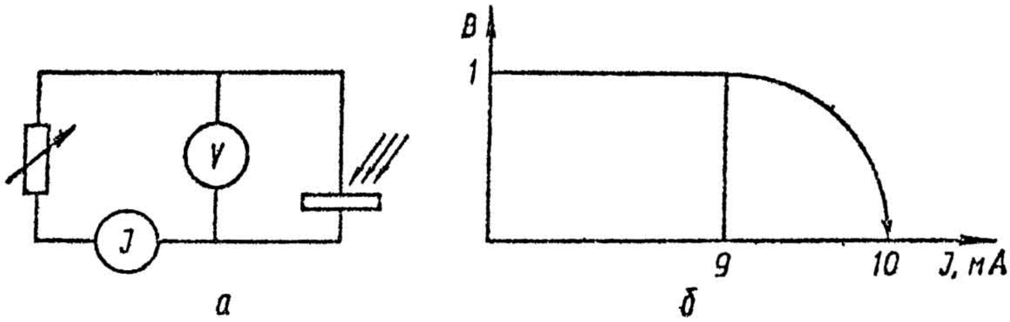


Рис 62

Задача 8.17. Для исследования элемента солнечной батареи собрана схема (рис. 62, *а*).

Получена зависимость напряжения элемента от силы тока при постоянной освещенности элемента (рис. 62, *б*).

Оценить, какую максимальную мощность можно отобрать от этого элемента при данной освещенности и при какой нагрузке.

Р е ш е н и е. Отбираемая от элемента мощность максимальна, если нагрузка определяет на вольтамперной характеристике такую точку, что IU максимально, то есть на нагрузке (из графика) должно быть напряжение ≈ 1 В при токе через нагрузку ≈ 9 мА. Максимальная мощность, отбираемая от батареи, равна 9 мВт при сопротивлении нагрузки $\frac{1\ В}{9\ \ 10^{-3} А} A \approx 110$ Ом. Очевидно, это будет внутреннее сопротивление элемента.

Задача 8.18. Как связаны кинетическая энергия электрона, вращающегося вокруг ядра атома водорода, с его потенциальной энергией (рис. 63)

Решение. $K = \frac{mv^2}{2}$ и $U = k\ \frac{q^2}{R}$ — кинетическая и потенциальная энергия. В роли центростремительной силы при вращении с постоянной скоростью по окружности выступает сила взаимодействия заряженных частиц, определяемая законом Кулона, $\frac{mv^2}{R} = k\ \frac{q^2}{R^2}$. Умножив обе части равенства на $\frac{1}{2}$, получаем $\frac{1}{2} \frac{mv^2}{R} = \frac{1}{2}\ k\ \frac{q^2}{R^2} \Rightarrow K = \frac{1}{2}\ U$.

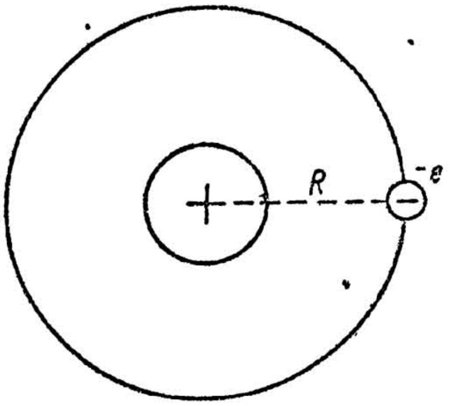


Рис. 63

Этот вывод справедлив для электростатического и гравитационного полей, то есть для потенциальных полей при движении в них по окружности.

Задача 8.19. Атом водорода излучает фотон частотой ν. Найти изменение длины волны фотона вследствие передачи энергии атому при отдаче.

Решение. Запишем закон сохранения энергии и закон сохранения импульса:

$$\begin{cases} h\nu - h\nu' = \frac{mv^2}{2} & (1), \\ mv = \frac{h\nu'}{c} & (2), \end{cases}$$

где ν' — частота рассеянного фотона, v — скорость атома после излучения фотона.

Решим уравнения (1) и (2)

$$h(\nu - \nu') = \frac{h^2}{2mc^2}\nu'^2.$$

Откуда

$$\Delta\lambda = \frac{h}{2mc}.$$