

Задача 820 Пружину жесткостью $500 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$ сжали на 2 см. Как изменилась масса пружины?

Решение. Начальная энергия пружины — это ее энергия покоя. $E_0 = m_0 c^2$.

Конечная энергия пружины равна полной энергии $E = mc^2$. Итак,

$$m_0 c^2 + \frac{KX^2}{2} = mc^2, \quad \Delta m \approx 3 \cdot 10^{-18} \text{ кг.}$$

9. ТЕОРЕМА ГАУССА И ДРУГИЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Показано применение теоремы Гаусса для вычисления напряженности некоторых электрических полей и другие методы решения.

Напряженность электрического поля является силовой характеристикой поля и играет важную роль в электростатике. Определение на-

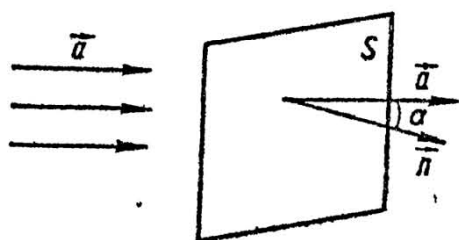


Рис. 64

пряженности ($\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$) не дает возможности найти E , если заряды не являются точечными.

Решение этой проблемы наметилось после того, как М. В. Остроградский установил излагаемую ниже теорему в качестве общей математической теоремы, а Гаусс изложил ее в применении к электростатике. Кроме того, Гаусс показал, что теорема следует из закона Кулона.

Теорема Остроградского — Гаусса основана на следующем математическом определении. Поток вектора $\vec{a}$ через площадку S называется величиной (рис. 64) $N_a = aS \cos \alpha$, где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности S .

Для простоты изложения сути теоремы рассмотрим заряд Q , находящийся в центре сферы радиуса R (рис. 65). Напряженность поля заряда Q на расстоянии R от него численно равна $E = k \frac{Q}{R^2}$.

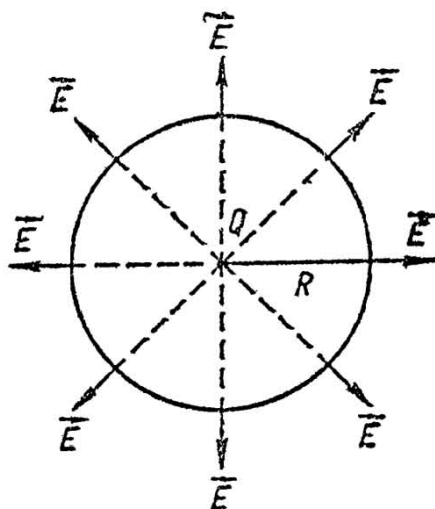


Рис. 65

Найдем поток N_E вектора $\vec{E}$ через поверхность сферы: $N_E = ES \cos \alpha$. (Образ N_E — сноп силовых линий.) Очевидно, что $\cos \alpha = 1$, так как вектор $\vec{E}$ сонаправлен с $\vec{n}$ для любого элемента площади сферы.

$$N_E = k \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 = k4\pi Q.$$

Заметим, что лишь здесь становится понятен выбор $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Действительно, N_E приобретает лаконичный

вид: $N_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$. Пусть $Q = \sum_{i=1}^n q_i$, тогда $N_E = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0}$.

Суть метода Гаусса состоит в следующем: заряды $\sum_{i=1}^n q_i$ окружают замкнутой поверхностью S и находят N_E :

1. $N_E = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0}$ — на основании теоремы Гаусса.

2. $N_E = ES \cos \alpha$ — по определению.

Следовательно,

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\epsilon_0 S \cos \alpha}.$$

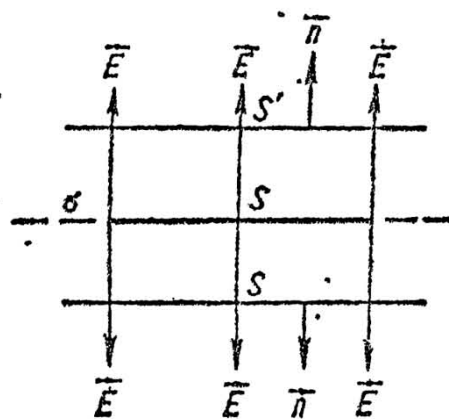


Рис. 66

Рассмотрим применение теоремы.

Задача 9.1. Найти напряженность поля равномерно заряженной плоскости. Поверхностная плотность зарядов σ (рис. 66).

Решение. Выделим на плоскости площадку S , несущую заряд $q = \sigma S$, и поместим ее внутрь параллелепипеда, две грани которого также S . Убедитесь самостоятельно, что N_E есть поток именно через эти две грани. Поэтому

$$E = \frac{\sigma S}{\epsilon_0 2S} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Задача 9.2. Найти напряженность поля внутри и вне плоского конденсатора (рис. 67).

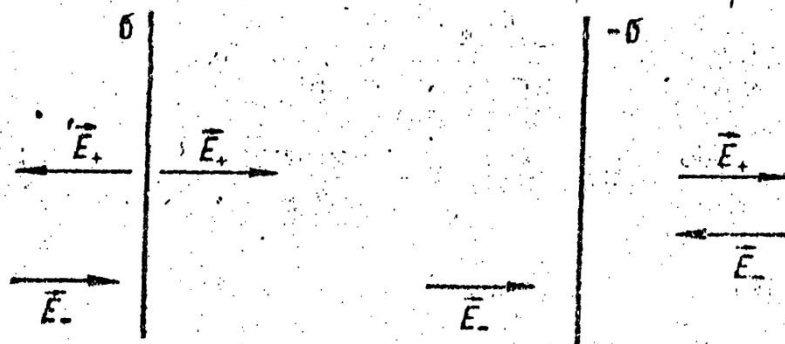


Рис. 67

Решение. На рисунке 9.4 учтено, что линии напряженности начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Поскольку поверхностные плотности зарядов пластин различаются лишь знаками, E_+ и E_- вне конденсатора равны по величине и противоположно направлены. Поэтому по принципу суперпозиции напряженность поля вне конденсатора равна 0. А между пластинами $E =$

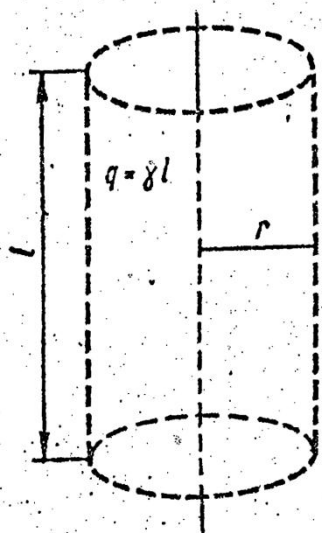


Рис. 68

$$= E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}.$$

Задача 9.3. Найти напряженность поля прямой бесконечной нити, равномерно заряженной с линейной плотностью заряда γ , на расстоянии r от нити.

Решение. Выделим участок нити длиной l , несущий заряд γl , и окружим его цилиндрической поверхностью радиуса r (рис. 68).

Из соображений симметрии понятно, что вектор напряженности в любой точке нормален цилиндрической поверхности, то есть $\cos \alpha = 1$. Далее, по теореме Гаусса, $E = \frac{\gamma l}{2\pi r l \epsilon_0} = \frac{\gamma}{2\pi \epsilon_0 r}$.

Большинство подобных задач электростатики могут быть решены и методом ДИ. В частности, данная задача решается так. Рассмотрим элемент нити dl с зарядом γdl (рис. 69), который в точке O вносит в напряженность вклад $dE = \frac{\gamma dl}{4\pi \epsilon_0 |AO|^2}$, где

$$|AO| = \frac{|OD|}{\cos \alpha} = \frac{r}{\cos \alpha}.$$

$$dl = \frac{|AC|}{\cos \alpha} = \frac{|AD| d\alpha}{\cos \alpha} = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha.$$

$$dE = \frac{\gamma d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ или } dE_x = \frac{\gamma \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ и } dE_y = \frac{\gamma \sin \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

α изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

$$E_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dE_x = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 r}; \quad E_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dE_y = 0.$$

Поэтому $E = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 r}$.

Задача 9.4. Сфера радиуса R имеет заряд Q . Найти зависимость $E(r)$ и $\varphi(r)$ и построить графики.

Решение. Если радиус концентрической сферы $r < R$, то внутрь нее попадает заряд $q = 0$. Поэтому на осно-

вании теоремы Гаусса $E_{r < R} = 0$. За пределами сферы напряженность поля такая же, как и у точечного заряда Q , помещенного в центр сферы. Действительно, если $r > R$, то $E_{r > R} =$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

При $r = R$ напряженность испытывает конечный скачок от 0 до $E_{r=R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ (рис. 70, а).

Зависимость $\varphi(r)$ найдем двумя способами.

1-й способ. По определению, потенциал сферы численно равен работе по перемещению единичного заряда из бесконечности ($\varphi_\infty = 0$) на поверхность сферы, где, как известно, $\varphi_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$, то есть как будто весь заряд

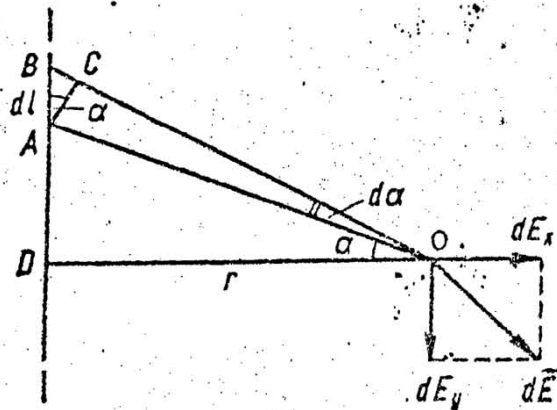


Рис. 69

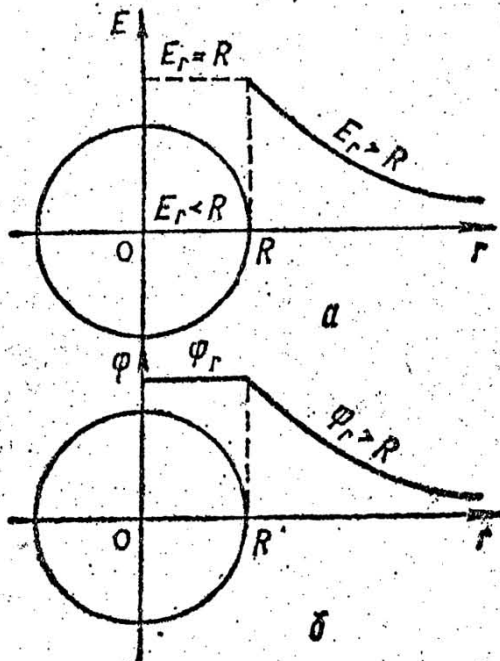


Рис. 70

сферы находится в ее центре. Но поскольку внутри сферы зарядов на самом деле нет, то, помещая тот же заряд из бесконечности внутрь сферы, никакой дополнительной работы мы не производим. Значит, $\varphi_{r < R} = \varphi_R$. Вне сферы величина потенциала такая же, как и у точечного заряда Q , помещенного в центр сферы: $\varphi_{r > R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ (рис. 70, б).

2-й способ. Воспользуемся связью разности потенциалов и напряженности: напряженность численно равна разности потенциалов на единице длины поля: $E = -\frac{d\varphi}{dr}$ или $d\varphi = -E dr$. Поэтому $\varphi_{r > R} = -\int E_{r > R} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$, что совпадает с уже полученным результатом.

Задача 9.5. Шар радиуса R равномерно заряжен по всему объему. Заряд шара Q . Построить графики зависимости $E(r)$ и $\varphi(r)$. Диэлектрическая проницаемость ϵ .
Решение.

$$E_{r > R} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot Q}{4\pi r^2 \epsilon \epsilon_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^3} r,$$

$$\varphi_{r > R} = -\int E_{r > R} dr = -\frac{Q}{8\pi \epsilon \epsilon_0 R^3} r^2 + C.$$

Покажем, как найти C . Для этого воспользуемся граничными условиями: при $r = R$ $\epsilon = 1$ и $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$. Поэтому

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} + C \Rightarrow C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 + \frac{1}{2\epsilon}\right).$$

$$\text{Окончательно } \varphi_{r > R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(1 + \frac{1}{2\epsilon}\right) - \frac{Q}{8\pi\epsilon\epsilon_0 R^3} r^2.$$

Заметим, что подобно тому, как график зависимости координаты от времени непрерывен даже при разрывах графика зависимости скорости от времени, график $\varphi(r)$ непрерывен при разрывах графика $E(r)$.

$$E_{r=R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad \varphi_{r=R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

$$E_{r > R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \varphi_{r > R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

(Рис. 71.)

Задача 9.6. Вывести формулу для емкости плоского конденсатора.

Решение. По определению $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$, где $\Delta\varphi$ найдем на основании $\Delta\varphi = Ed$. $E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}$. Поэтому $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$.

Задача 9.7. На одной из пластин плоского конденсатора емкости C находится заряд q , а на другой $4q$. Определить разность потенциалов между пластинами конденсатора.

Решение. Напряженность поля пластины $E = \frac{q}{2\epsilon\epsilon_0 S}$. Поэтому

$$E_{\text{внутр.}} = \frac{4q}{2\epsilon\epsilon_0 S} - \frac{q}{2\epsilon\epsilon_0 S}.$$

$$\text{Но } U = Ed = \frac{3}{2} \times$$

$\times \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S} = \frac{3q}{2C}$. Другой метод решения основан на сообщении пластинам заряда $-\frac{q_1 + q_2}{2}$, после чего получается конденсатор с зарядами пластин $\pm \frac{3q}{2}$ и разностью потенциалов $U = \frac{3q}{2C}$.

Следующий тип электростатических задач основан на том, что в практической электротехнике за уровень нулевого потенциала выбирают потенциал Земли. Поэтому потенциал любого заземленного проводника равен нулю.

Задача 9.8. Заряд q находится на расстоянии r от центра заземленной проводящей сферы радиуса R ($r > R$). Определить величину индуцированного на сфере заряда.

Решение. Потенциал заземленной сферы равен нулю и состоит из потенциалов заряда q и индуцированного на сфере заряда Q

$$0 = k \frac{q}{r} + k \frac{Q}{R} \Rightarrow Q = -\frac{R}{r} q.$$

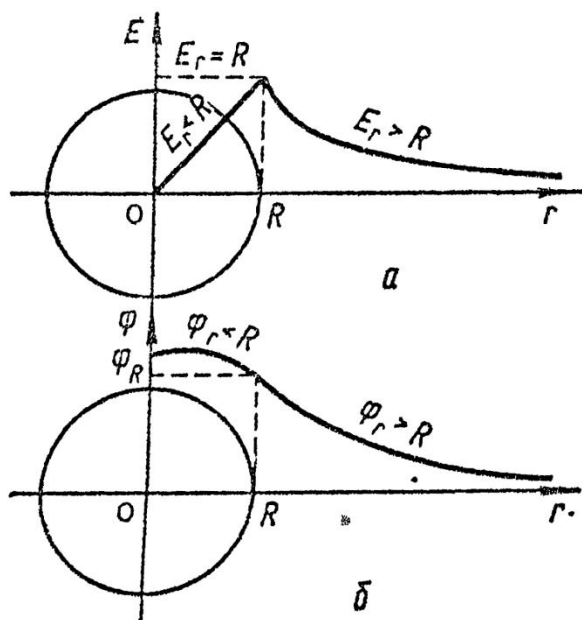


Рис. 71

Заметим, что центр сферы — единственная точка, для которой безразлично распределение индуцированного заряда.

Задачи для самостоятельного решения

9.9. Три концентрические сферы радиусов r , $2r$, $3r$ имеют заряды q , $2q$, $-3q$. Найти зависимости $E(r)$ и $\varphi(r)$.

9.10. Определить напряженность поля внутри и вне равномерно заряженного бесконечного цилиндра. Объемная плотность заряда ρ , радиус цилиндра R .

9.11. Чему равна напряженность поля системы трех параллельных бесконечных плоскостей с поверхностными плотностями зарядов σ ; -2σ ; σ ?

9.12. Незаряженный металлический шар радиуса r окружают концентрической сферической оболочкой радиуса R с потенциалом φ . Чему станет равен потенциал оболочки, если шар заземлить?

9.13. Сферический конденсатор — две концентрические сферы радиусов r и R , несущие заряды q и $-q$. Найти его емкость

10. ПРАВИЛА КИРХГОФА И ДРУГИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрено применение законов Кирхгофа, метода узлового потенциала, метода суперпозиции, метода короткого замыкания и холостого хода. Изложены рекомендации по их применению при решении конкретных задач.

Немецкий физик Густав Роберт Кирхгоф в 1845—1847 гг. открыл закономерности в протекании постоянного электрического тока в разветвленных электрических цепях (правила Кирхгофа). Следствием закона сохранения заряда* и закона Ома для полной цепи являются правила Кирхгофа для узлов** и замкнутых контуров.

I правило. Алгебраическая сумма всех токов, сходящихся в узле, равна нулю.

(Токи, входящие в узел, условно считаются положительными, а выходящие из узла — отрицательными.)

$$\sum_{i=1}^n J_i = 0.$$

II правило. В любой системе линейных проводников алгебраическая сумма падения напряжения вдоль замкну-

* Если система обменивается зарядами с телами, не принадлежащими этой системе, то алгебраическая сумма зарядов этой системы есть величина постоянная.

** Узлом называется такая точка цепи, в которой сходятся не менее трех проводников.

того контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в ветвях этого контура.

(Условились считать токи, текущие в направлении обхода и ЭДС, действующие по обходу, положительными, а против — отрицательными.)

$$\sum_{i=1}^n J_i R_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_i.$$

Второе правило Кирхгофа — следствие того, что потенциал проводника в каждой точке есть однозначная функция этой точки.

Правила Кирхгофа дают возможность определить силу и направление тока в любой части разветвленной системы проводников, если известны их сопротивление и сторонние ЭДС. Для этого надо применить правила Кирхгофа к различным узлам и контурам. Если система состоит из N проводников и образует m узлов, то нужно, воспользовавшись первым правилом, написать $(m - 1)$ уравнение и на основе применения второго $(N - m + 1)$ уравнение. Для независимости последних уравнений необходимо, чтобы в них входил по крайней мере один раз каждый проводник. При составлении уравнений следует заранее определять направление токов в различных проводниках, но так как это сделать не всегда возможно, то произвольно устанавливают направления токов, а затем, если при решении уравнений получится отрицательное значение для какого-нибудь тока, меняют направление этого тока, сохраняя найденную при решении его абсолютную величину.

Знание правил Кирхгофа во многих случаях значительно облегчает решение задач.

Если заданы величины всех ЭДС и сопротивлений, то для вычисления всех токов по правилам Кирхгофа нужно составить столько уравнений, сколько имеется в цепи неизвестных токов. Однако число уравнений, которые можно составить по правилам Кирхгофа, всегда больше числа неизвестных токов, то есть часть их есть следствием остальных. Для того, чтобы расчетные уравнения были независимыми, нужно выполнить два условия.

1. Число узловых уравнений должно быть на единицу меньше числа узловых точек электрической цепи.

2. Недостающие уравнения составляются по второму правилу Кирхгофа; при этом нужно выбирать наиболее простые контуры (с меньшим числом источников ЭДС и сопротивлений) в таком порядке, чтобы в каждом

контура, для которого составляется уравнение, содержащая по меньшей мере одна ветвь, не входящая в контуры, для которых уравнения уже составлены.

Задача 10.1. Дана цепь (рис. 72). Определить токи в отдельных участках цепи.

Решение. Прежде всего надо установить направления токов, так как иначе нельзя составить уравнения

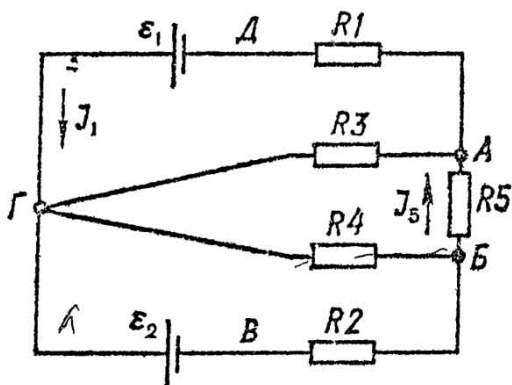


Рис. 72

ни по первому, ни по второму правилам Кирхгофа.

Однако у нас нет никаких данных, позволяющих сделать этот выбор. Надо знать, например, φ_A и φ_B , чтобы правильно выбрать направление тока I_5 .

Отвечить же на вопрос, потенциал какой точки выше, можно лишь после того, как найдено распределение

токов во всей цепи. Эти затруднения отпадают, если считать постоянный ток алгебраической величиной, принимающей как положительные, так и отрицательные значения, и выбрать предварительно для каждого тока произвольное направление, называемое положительным. Этим выбором мы еще ничего не утверждаем относительно того, какой из двух потенциалов больше.

Если в результате расчета получим ток $I_5 > 0$, то очевидно, что $\varphi_A < \varphi_B$, но если $I_5 < 0$, то $\varphi_A > \varphi_B$. В данной цепи три узловые точки, поэтому составим два узловых уравнения:

$$-I_1 - I_4 + I_5 = 0;$$

$$-I_2 - I_3 - I_5 = 0.$$

Но для расчета цепи нужно составить пять уравнений (пять неизвестных токов). Недостающие уравнения составляем, применяя второе правило Кирхгофа.

Для контура АДГА (порядок чередования букв определяет направление обхода контура) В данном случае — против направления движения часовой стрелки: $\mathcal{E}_1 = I_1(r_1 + R_1) - I_1R_4$; Для контура АГБВ: $0 = I_4R_4 - I_3R_3 + I_5R_5$; Для контура БГВБ: $-\mathcal{E}_2 = -I_2(r_2 + R_2) + I_3R_3$.

Далее задача сводится к алгебраическому нахождению неизвестных из пяти уравнений.

Задача 10.2. Определить ток и мощность в каждом участке цепи, если $\mathcal{E}_1 = 130\text{ В}$, $\mathcal{E}_2 = 117\text{ В}$, $r_1 = 1\text{ Ом}$; $r_2 = 0,6\text{ Ом}$; $R_3 = 24\text{ Ом}$ (рис. 73).

Решение. Зададим произвольно направления токов:

$I_1 + I_2 + I_3 = 0$ или (по первому правилу Кирхгофа)
 $I_3 = -I_1 - I_2$.

$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = I_1 r_1 - I_2 r_2$ (по второму правилу Кирхгофа для контура АБГА);

$\mathcal{E}_2 = I_2 r_2 - I_3 R_3$ (по второму правилу Кирхгофа для контура БВГД).

Подставив численные значения известных величин, получим

$$\begin{cases} 130 - 117 = I_1 - 0,6I_2, \\ 117 = 0,6I_2 - 24I_3, \\ I_3 = -I_2 - I_1, \\ I_2 = -5\text{ А}, \end{cases}$$

то есть направление тока I_2 в действительности обратно направлению стрелки на схеме.

$$I_1 - 0,6I_2 = 13 \Rightarrow I_1 = 13 + 0,6I_2; \quad I_1 = 10\text{ А}$$

$I_3 = -I_2 - I_1 = -10 + 5 = -5\text{ А}$, то есть ток I_3 в действительности направлен от В к Б и $\varphi_B > \varphi_V$.

Мощность генератора $P_1' = \mathcal{E}_1 I_1 = 1300\text{ Вт}$;

$$P_1 = J_1^2 r_1 = 100\text{ Вт}; \quad P_2 = J_2^2 r_2 = 15\text{ Вт}; \quad P_3 = J_3^2 R_3 = 600\text{ Вт}.$$

Мощность второго источника ЭДС:

$$P_2'' = \mathcal{E}_2 I_2 = 117(-5) = -585\text{ Вт}.$$

Этот источник ЭДС является потребителем электрической энергии, так как направления I_2 и $\mathcal{E}_2$ противоположны.

Проверкой правильности решения может являться баланс мощности:

$$1300\text{ Вт} = (100 + 15 + 600 + 585)\text{ Вт}.$$

Принцип суперпозиции (наложения)

Возможность расчета электрических цепей по принципу суперпозиции вытекает из того, что ток в любом участке цепи равен алгебраической сумме частичных

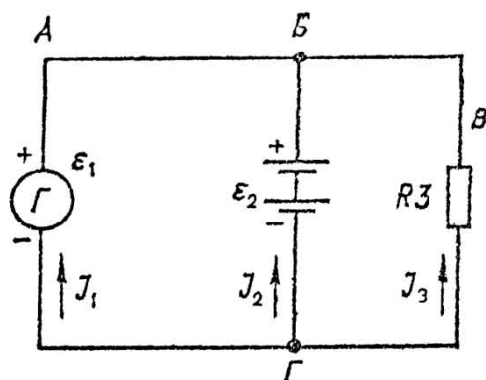


Рис. 73

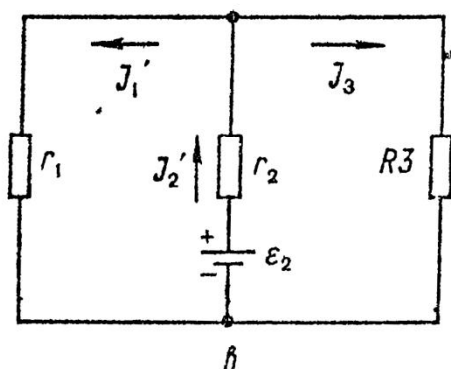
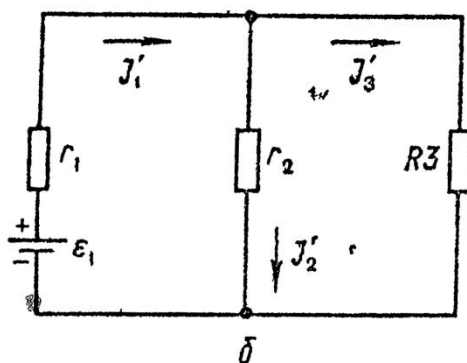
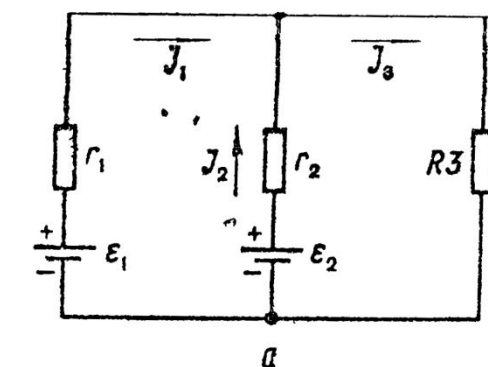


Рис 74

токов, создаваемых в этом участке от всех ЭДС цепи, действующих отдельно друг от друга

Вначале полагаем, что в цепи действует только одна какая-либо ЭДС, причем все сопротивления цепи остаются неизменными (включая внутренние сопротивления источников, даже и тех, где ЭДС приравниваются нулю). Для такой схемы определяем токораспределение. Затем повторяем расчет, полагая, что действует вторая ЭДС, а все остальные не действуют. Аналогичные расчеты производим для всех ЭДС поочередно

Пусть ток в каком-нибудь участке равен I . По принципу суперпозиции

$$I = I' + I'' + I''' + \dots,$$

где I' — ток, созданный в рассматриваемом участке действием первой ЭДС, в предположении, что остальные равны нулю. Аналогичные значения имеют составляющие I'' , I''' и т. д. Суммирование этих со-

ставляющих тока произволится с учетом их направления.

Задача 10.3. Определить токи в отдельных участках цепи $\mathcal{E}_1 = 126$ В, $\mathcal{E}_2 = 124$ В, $r_1 = r_2 = 10$ м, $R_3 = 120$ м (рис. 74, а).

Решение Предполагая, что ЭДС второго генератора отсутствует, находим (рис 74, а):

$$I'_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + \frac{r_2 R_3}{r_2 + R_3}} = 65,52 \text{ А};$$

$$I'_2 = I'_1 \frac{R_3}{R_3 + r_2} = 60,48 \text{ А};$$

$$I'_3 = I'_1 \frac{r_2}{r_2 + R_3} = 5,04 \text{ А}.$$

Полагая, что ЭДС первого генератора не действует, находим (рис. 74, б):

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2 + \frac{r_1 R_3}{r_1 + R_3}} = 64,48 \text{ A};$$

$$I_1'' = I_2 \frac{R_3}{r_1 + R_3} = 59,52 \text{ A};$$

$$I_1' = I_2 \frac{r_1}{r_1 + R_3} = 4,96 \text{ A}.$$

Проводим наложение токов:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 6 \text{ A};$$

$$I_2 = I_2'' - I_2' = 4 \text{ A};$$

$$I_3 = -I_3' - I_3'' = -10 \text{ A}.$$

Метод узлового напряжения

Определение токов в сложной цепи, имеющей два узла, можно выполнить методом более простым, чем решение системы уравнений, составляемых по правилам Кирхгофа.

Задача 10.4. Три генератора ($\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ — их ЭДС, r_1, r_2, r_3 — их сопротивления) замкнуты в цепи с сопротивлением R_4 .

Найти падение напряжения U_{AB} (рис. 75).

Решение По закону Ома ток в первом участке:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - U}{r_1} =$$

$$= (\mathcal{E}_1 - U) \lambda_1,$$

где λ_1 — проводимость первого участка (величина, обратная полному сопротивлению этого участка).

Аналогично $I_2 = (\mathcal{E}_2 - U) \lambda_2$, $I_3 = (\mathcal{E}_3 - U) \lambda_3$; $I_4 = (0 - U) \lambda_4$, $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ (первое правило Кирхгофа).

Можно записать так:

$$(\mathcal{E}_1 - U) \lambda_1 + (\mathcal{E}_2 - U) \lambda_2 + (\mathcal{E}_3 - U) \lambda_3 + (0 - U) \lambda_4 = 0,$$

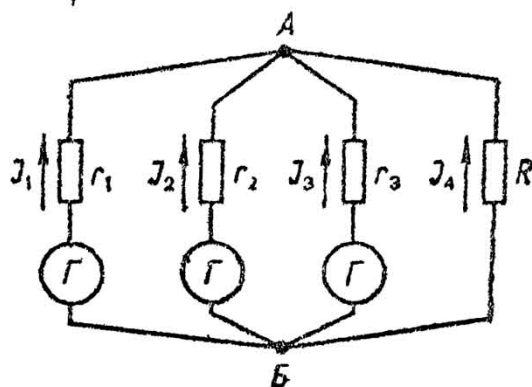


Рис 75

$$\text{откуда } U = \frac{\mathcal{E}_1 \lambda_1 + \mathcal{E}_2 \lambda_2 + \mathcal{E}_3 \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}, \text{ а в общем виде } U = \frac{\sum_{i=1}^n (\mathcal{E} \lambda)_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}.$$

Узловое напряжение равно отношению алгебраической суммы произведения ЭДС на проводимости соответствующих ветвей к сумме проводимости всех ветвей

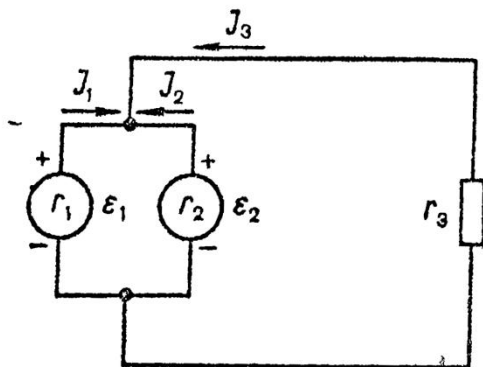


Рис. 76

Задача 10.5. Найти токи в цепи $\mathcal{E}_1 = 113 \text{ В}$; $\mathcal{E}_2 = 112,5 \text{ В}$; $r_1 = 0,5 \text{ Ом}$; $r_2 = 0,5 \text{ Ом}$; $R_3 = 10 \text{ Ом}$ (рис. 76).

Решение Определим узловое напряжение

$$U = \frac{\mathcal{E}_1 \lambda_1 + \mathcal{E}_2 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = 110 \text{ В};$$

$$I_1 = (\mathcal{E}_1 - U) \lambda_1 = 6 \text{ А}; \quad I_2 = (\mathcal{E}_2 - U) \lambda_2 = 5 \text{ А}; \quad I_3 = -U \lambda_3 = -11 \text{ А}.$$

Проверка.

$$I_1 + I_2 + I_3 = (6 + 5 - 11) \text{ А} = 0.$$

Метод холостого хода и короткого замыкания

Вычисление тока в одном, произвольно выбранном, участке сложной электрической цепи можно выполнить методом холостого хода и короткого замыкания

Это сократит громоздкие вычисления по решению системы уравнений со многими неизвестными.

Пусть дана цепь, содержащая любое количество ветвей, соединенных произвольно. Определим в ней ток на одном участке с сопротивлением R . Разобьем данную цепь на две части: содержащую данное сопротивление и ту, что останется от цепи после отключения от нее этого сопротивления. Вторую часть изобразим прямоугольником с двумя зажимами и назовем *двухполюсником*. Ясно, что внутри двухполюсника находится по меньшей мере один источник ЭДС. Такой двухполюсник называют *активным* (рис. 77, а). Если последовательно к сопротивлению R добавить два источника ЭДС, соединив их навстречу друг другу (рис. 77, б) — $\mathcal{E}_0$ и $+\mathcal{E}_0$, то величина тока в сопротивлении R от этого не изменится.

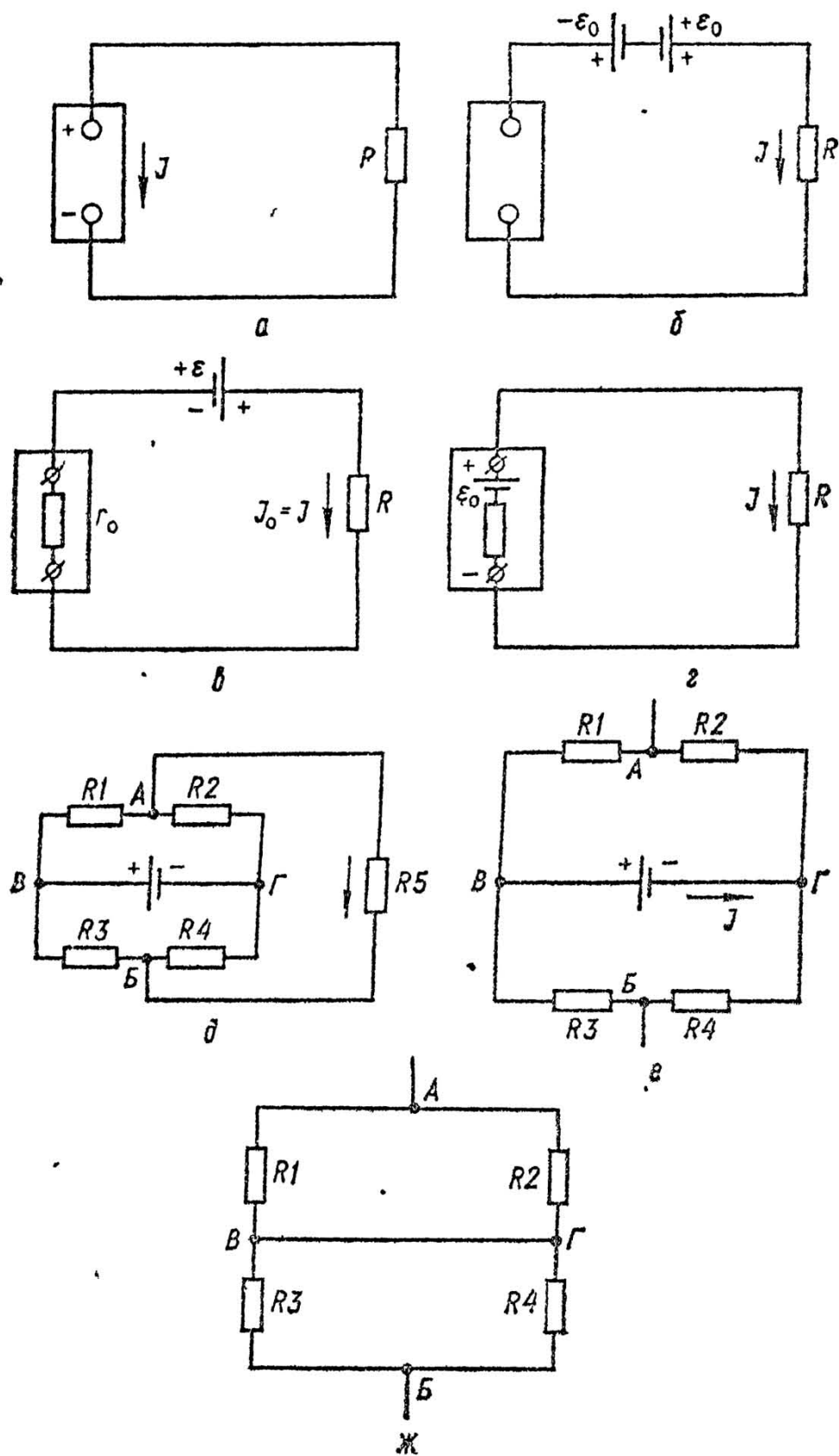


Рис. 77

Используем принцип суперпозиции.

I_0 — ток в сопротивлении при действии одной ЭДС $\mathcal{E}_0$.

Величину $\mathcal{E}_0$, а следовательно, и вызываемый ею ток мы можем выбирать по нашему усмотрению. Возьмем ее так, чтобы выполнялось условие $I - I_0 = 0$ или $I = I_0$, и найдем токораспределение в цепи как результат наложения двух режимов: во-первых, режима, обусловленного всеми ЭДС, кроме $+\mathcal{E}_0$, и, во-вторых, создаваемого ЭДС $\mathcal{E}_0$.

Первый из этих режимов, поскольку величина ЭДС выбрана, дает в сопротивлении R ток, равный нулю $I = I_0$; из второго, при действии ЭДС $+\mathcal{E}_0$ в предположении, что все остальные ЭДС равны нулю, следует, что $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R+r_0}$ и $I = \frac{\mathcal{E}_0}{R+r_0}$, где r_0 — общее сопротивление неизвестного двухполюсника. $\mathcal{E}_0$ — тоже неизвестна.

Мы приходим к очень важному выводу.

Всякий активный двухполюсник может быть заменен источником питания с ЭДС $\mathcal{E}_0$ и сопротивлением r_0 (рис. 77, в и г).

Величины $\mathcal{E}_0$ и r_0 проще всего определяются опытным путем. Если под действием ЭДС двухполюсника и дополнительной ЭДС $-\mathcal{E}_0$ ток в сопротивлении R равен нулю, то это равносильно разрыву внешней цепи двухполюсника, когда внутреннее падение напряжения отсутствует, и напряжение на его зажимах равно ЭДС $\mathcal{E}_0$. Опытным путем эту ЭДС (напряжение на зажимах) можно найти при отключении от него сопротивления R , то есть при холостом ходе. Что касается сопротивления r_0 то, как следует из $I = \frac{\mathcal{E}_0}{R+r_0}$, его можно определить, рассматривая ток короткого замыкания двухполюсника $I_k = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0}$.

Если зажимы двухполюсника замкнуть через амперметр с $r_A \rightarrow 0$ и $I_A \ll r_0$, то он покажет $I = \frac{\mathcal{E}_0}{r_0}$, откуда и находим искомое сопротивление.

ЭДС двухполюсника (напряжение холостого хода) и общее сопротивление $R_{\text{общ}}$ можно рассчитать, приняв $R = \infty$ и найдя напряжение между точками, к которым подключено внешнее сопротивление. Общее сопротивление $R_{\text{общ}}$ определяется из предположения, что все ЭДС в цепи двухполюсника равны нулю. При этом условии можно определить общее сопротивление относительно зажимов двухполюсника (при отключении сопротивления r).

Задача 10.6. Определить ток в схеме, если $R_5 = 14 \text{ Ом}$; $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 2,5 \text{ Ом}$; $R_3 = 5 \text{ Ом}$; $R_4 = 20 \text{ Ом}$; $\mathcal{E} = 12,5 \text{ В}$ (рис. 77, д).

Решение. Определим U_{AB} при отключении R_5 (рис. 77, е), R_1 и R_2 при этом соединены последовательно.

$$I' = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = 1 \text{ А},$$

аналогично

$$I'' = \frac{\mathcal{E}}{R_3 + R_4} = 0,5 \text{ А}.$$

Пусть $\varphi_B = 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_B - \varphi_A &= I' R_1 = \\ &= 10 \text{ В} \Rightarrow \varphi_A = -10 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_B - \varphi_B &= I'' R_3 = 2,5 \text{ В} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi_B = -2,5 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = -7,5 \text{ В}.$$

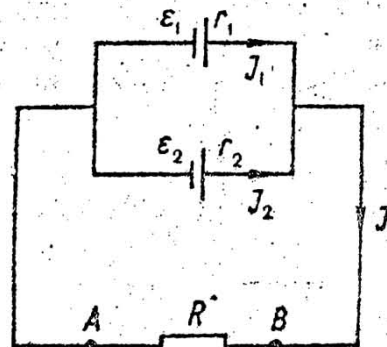


Рис. 78

Общее сопротивление двухполюсника $R_{\text{общ}}$ определим, предполагая что $\mathcal{E} = 0$, и, следовательно, точки B и Г замкнуты, а $r_{\text{ист.}} = 0$ (рис. 77, ж).

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 6 \text{ Ом}.$$

Ток в R_5 :

$$I_5 = \frac{U_{AB}}{R_{\text{общ.}} + R_5} = -0,375 \text{ А},$$

то есть против принятого указания.

Задача 10.7. Батарея состоит из 2 параллельно соединенных источников $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, внутреннее сопротивление которых r_1 и r_2 .

Найти внутреннее сопротивление и ЭДС $\mathcal{E}$ такого источника, которым можно было бы заменить батарею (рис. 78).

Решение. Обозначим токи, текущие через источники I_1 и I_2 общий ток I , напряжение на сопротивлении R .

$$U_R = \varphi_A - \varphi_B = IR. \quad (1)$$

По второму правилу Кирхгофа:

$$I_1 r_1 = \mathcal{E}_1 - U_R; \quad I_2 r_2 = \mathcal{E}_2 - U_R. \quad (2)$$

Обратите внимание, что падения напряжения на источниках в общем случае не равны.

Используя первое правило Кирхгофа, получаем

$$I = I_1 + I_2 \quad (3)$$

Подставляем (2) в (3)

$$I = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} - U_R \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (4)$$

Замечаем, что r_0 — общее сопротивление батареи:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

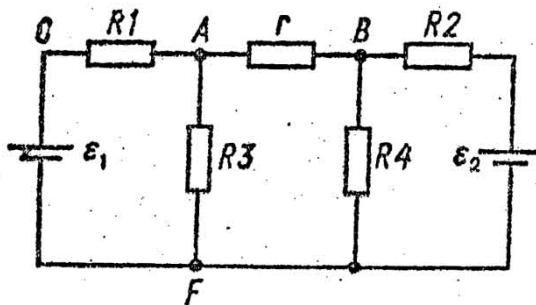


Рис. 79

Заменяя U_R в (4), используя (1), найдем выражение для тока во внешней цепи:

$$I = \frac{\left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} \right) r_0}{R + r_0}.$$

Очевидно, если заменить батарею источником с ЭДС

$\mathcal{E}$, эквивалентно определяемой соотношениями:

$$\frac{\mathcal{E}}{r_0} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

то ток во внешней цепи не изменится.

Задача 10.8. Найти условие, при котором через резистор r не будет идти ток (рис. 79).

Решение. Решим задачу методом нулевого потенциала.

Пусть потенциал F $\varphi_F = 0 \Rightarrow \varphi_C = \mathcal{E}_1$ и $\varphi_D = \mathcal{E}_2$;

$$\varphi_A = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1 \frac{R_1}{R_1 + R_3} = \mathcal{E}_1 \frac{R_3}{R_1 + R_3};$$

$$\varphi_B = \mathcal{E}_2 \frac{R_4}{R_2 + R_4} \Rightarrow \mathcal{E}_1 \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \mathcal{E}_2 \frac{R_4}{R_2 + R_4}.$$

Рассмотрим две схемы — «звезду» и «треугольник», имеющие по три вывода (рис. 80, а и б). Рассмотрим преобразование «звезды» в «треугольник» и наоборот. Сопротивление между 1 и 2 в «звезде»: $r_1 + r_2$;

в «треугольнике»: $\frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}.$

Схемы эквивалентны, если между парами любых точек сопротивления одинаковы:

$$r_1 + r_2 = \frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}. \quad (1)$$

$$r_1 + r_3 = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \quad (2)$$

$$r_2 + r_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \quad (3)$$

Для решения системы сложим уравнения (1) — (3):

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{R_{12}R_{13} + R_{12}R_{23} + R_{23}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \quad (4)$$

Чтобы найти r_1, r_2, r_3 , необходимо соответственно вычесть (4) — (2):

$$r_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \quad (5)$$

(4) — (1):

$$r_3 = \frac{R_{23}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \quad (6)$$

(4) — (3):

$$r_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \quad (7)$$

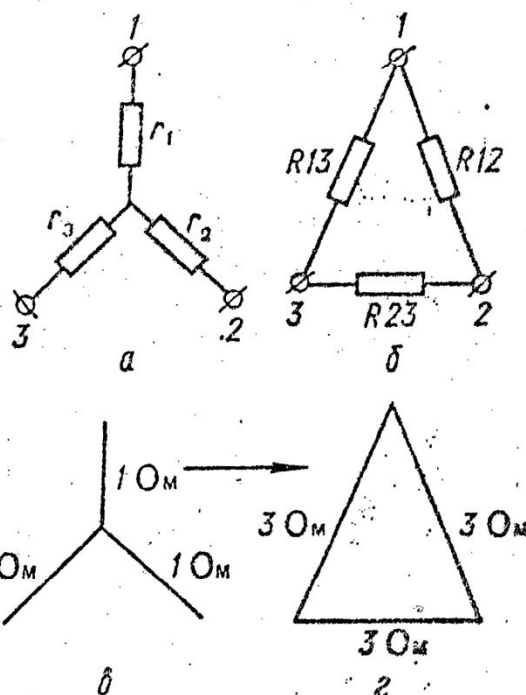


Рис. 80

R_1, R_2, R_3 найдем так:

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{R_{12}R_{13}R_{23}R_{13} + R_{12}R_{13}R_{12}R_{23} + R_{23}R_{13}R_{12}R_{23}}{(R_{12} + R_{13} + R_{23})^2}$$

Разделим это выражение на r_3 .

$$\frac{R_{23}R_{13}R_{12}(R_{13} + R_{12} + R_{23})}{(R_{12} + R_{23} + R_{13})^2} \cdot \frac{R_{12} + R_{23} + R_{13}}{R_{23}R_{13}} = R_{12}$$

Итак

$$R_{12} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_3} \quad (8)$$

$$R_{13} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_2} \quad (9)$$

$$R_{23} = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1} \quad (10)$$

Формулы (5) — (7) выражают переход от Δ к λ , а (8) — (10) — наоборот.

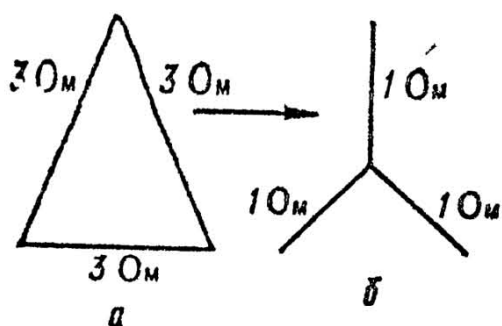


Рис. 81

Формулы (5) — (10) хотя и громоздко выводятся, легко запоминаются и удобны в обращении.

Задача 10.9. Заменить «звезду» (рис. 80, в) «треугольником»

Решение $R_{12} = R_{13} = R_{23} = 3 \text{ Ом}$ (рис. 80, г).

Задача 10.10. Заменить «треугольник» «звездой» (рис. 81, а).

Решение $r_1 = r_2 = r_3 = 1 \text{ Ом}$ (рис. 81, б).

Между заменами типа $\Delta \rightarrow \star$ существует взаимно однозначное соответствие. Основанием для этого является теорема существования.

Задача 10.11. Найти R_{AB} (рис. 82, а).

1-й способ. Преобразуем ΔACD в $\star$ (рис. 82, б).

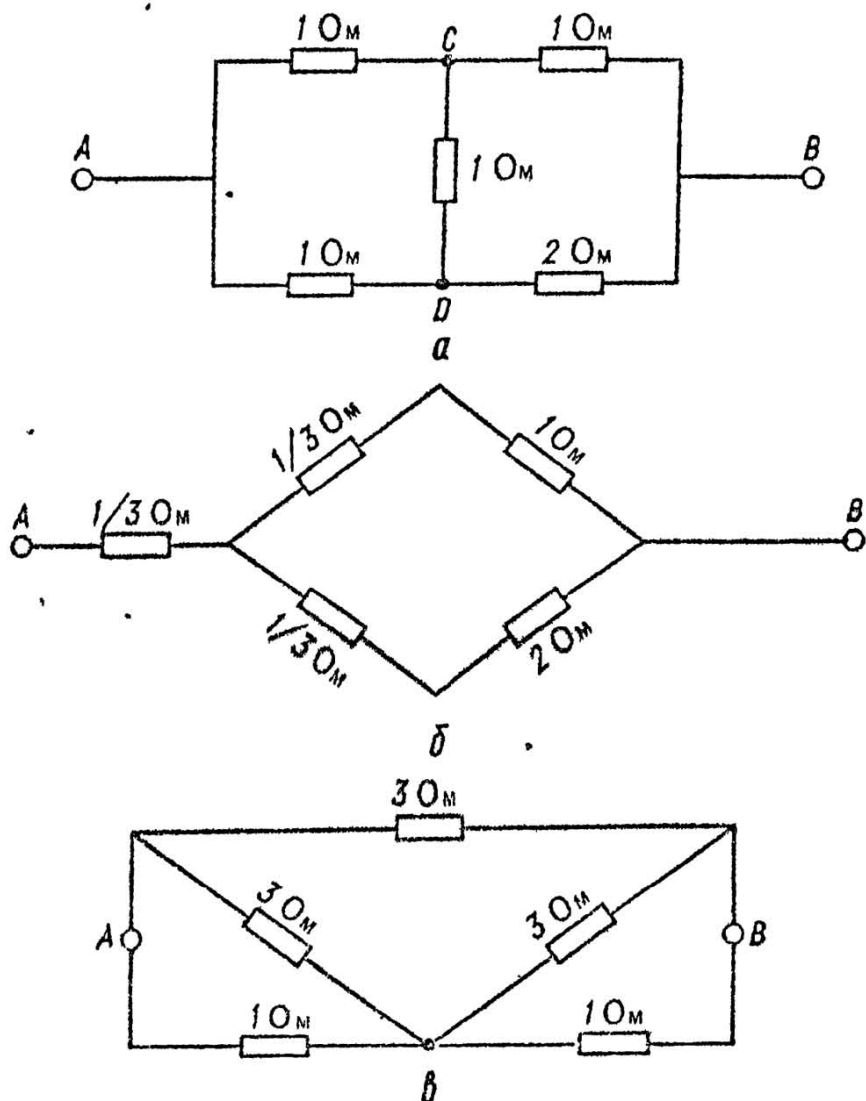


Рис. 82

2-й способ. Преобразуем ΔACD в Δ (рис. 82, в).

Чтобы решить эту задачу с помощью законов Кирхгофа, понадобилось бы решать систему пяти уравнений с пятью неизвестными

Преобразование $\Delta \leftrightarrow \Delta$ позволяет находить и неизвестные токи в цепи.

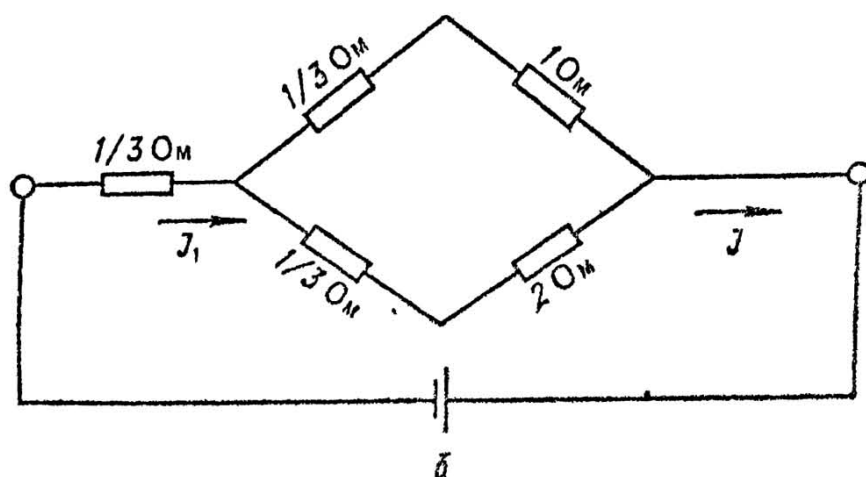
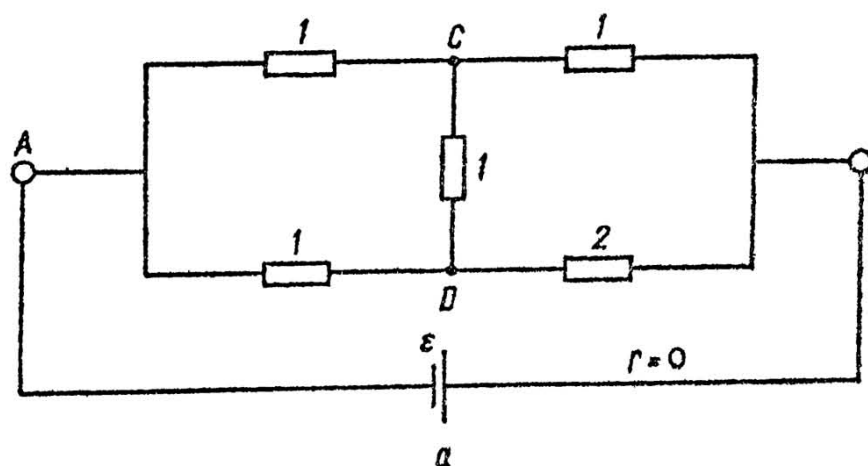


Рис. 83

Задача 10.12. Найти ток через CB (рис. 83, а).

Решение. Воспользуемся способом 1, так как участок в нем не затрагивается (рис. 83, б):

Поскольку $R_{AB} = \frac{13}{11}$ Ом, то $I = \frac{11}{13}$ А. Но $I_1 + I_2 = I$ и $\frac{I_1}{I_2} = \frac{7}{4} \Rightarrow I_1 = I_{CB} = \frac{7}{13}$ А.

Усложним задачу. Требуется найти ток через CD .

План решения.

1. Найти ток через AC .

2. $I_{CD} = I_{AC} - I_{CB}$.

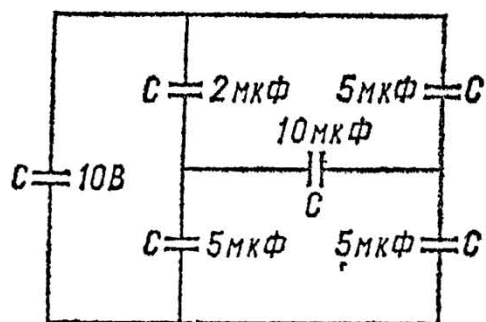
Работают ли приведенные выше правила преобразований для соединений конденсаторов?

Напомним формулы для:
последовательного соединения параллельного соединения

$$R = \sum_{i=1}^n R_i \qquad \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \qquad C = \sum_{i=1}^n C_i$$

Кроме того, аналогичны следующие выражения:



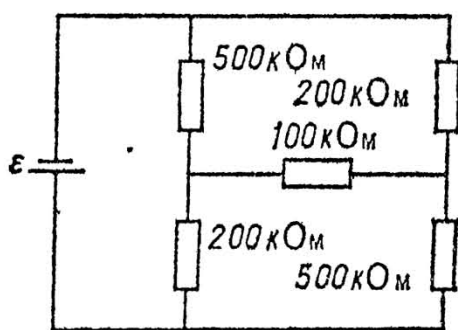
а

$$U = RI \text{ и } U = \frac{1}{C} Q,$$

$$U \rightarrow U,$$

$$R \rightarrow \frac{1}{C},$$

$$I \rightarrow Q.$$



б

Рис 84

Например, для нахождения зарядов на конденсаторах необходимо перерисовать цепь, содержащую сопротивление с учетом аналогий. Рассчитав токи в этой цепи, заменим их зарядами на конденсаторах. Для этих преобразований необходимо учесть, что внутреннее сопротивление источника для цепи с конденсаторами не влияет на распределение зарядов на них.

Задача 10.13. Найти заряд на конденсаторе 10 мкФ (рис 84, а).

Решение. Выполним переход от конденсаторов к сопротивлениям (рис 84, б)

Далее задача решается описанным выше способом.

11. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Показаны преимущества расчета эквивалентных схем, изложены простые способы их получения.

Принципы расчета эквивалентных сопротивлений и емкостей являются обобщением опытных фактов. Методы расчета эквивалентных элементов дают возможность из-

бежать сложностей, связанных с использованием правил Кирхгофа, и дают возможность быстро получить, например, полное сопротивление сложной электрической цепи. В свою очередь принципы эквивалентного расчета подразделяются на несколько методов.

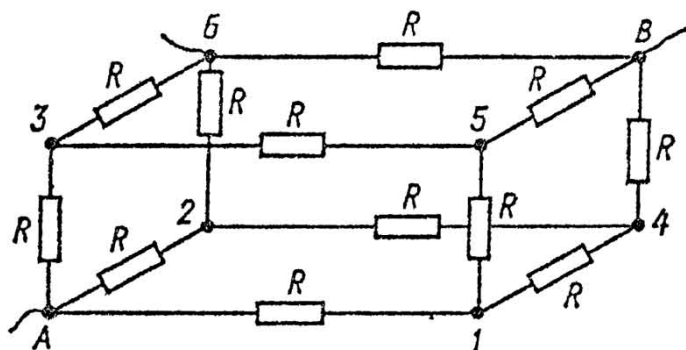


Рис. 85

1. Метод эквипотенциальных узлов

Если эквипотенциальные узлы (узлы равных потенциалов) соединить проводником ($r \rightarrow 0$), то электрические условия во всех узлах и ветвях цепи не изменятся, так как через это сопротивление ток идти не будет. Значит, узлы цепи, имеющие одинаковые потенциалы, можно рассматривать как один узел.

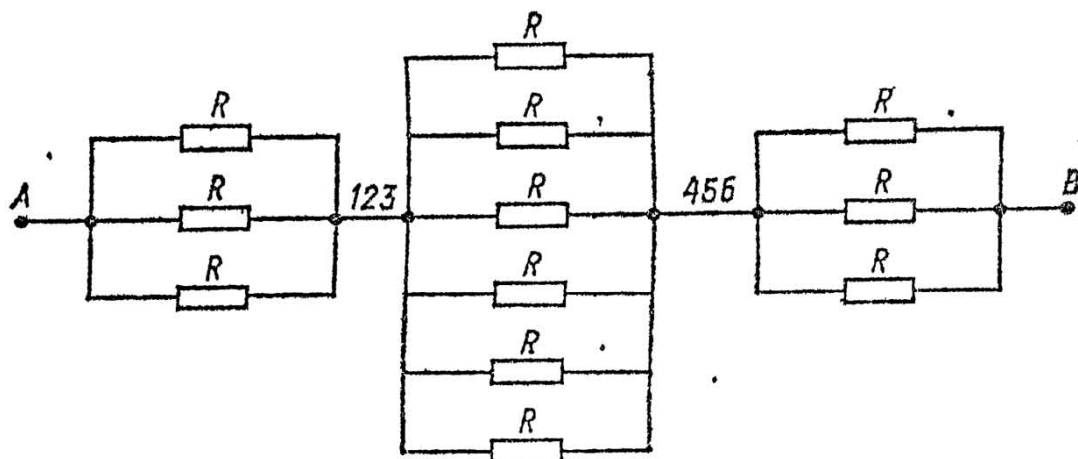


Рис. 86

Задача 11.1 (а). Найти сопротивление между точками A и B (рис. 85).

Решение. В силу симметрии условия прохождения тока до точек 1, 2, 3 (эквипотенциальные узлы) и точек 4, 5, 6 (эквипотенциальные узлы) одинаковы. Если соединить воедино 1, 2, 3 и 4, 5, 6, то сопротивление всей цепи не изменится. Очевидно, что между точками с потенциалом 123 и 456 находятся 6 сопротивлений. Ясно,

что последние включены параллельно (рис. 86).

$$R_{AB} = \frac{5}{6} R.$$

Задача 11.1(б) Решить предыдущую задачу для конденсаторов (рис. 87).

Решение.

$$C_{AB} = \frac{6}{5} C.$$

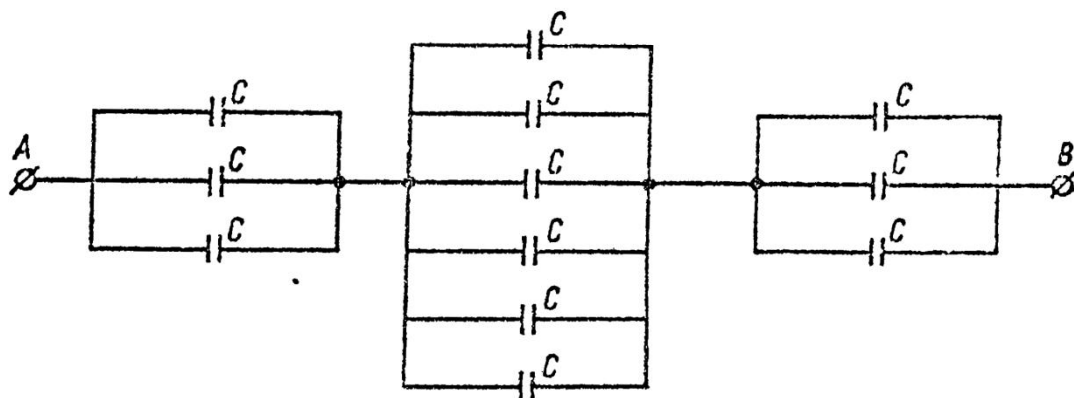


Рис. 87

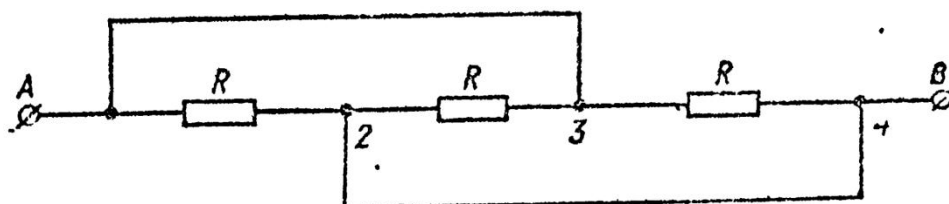


Рис. 88

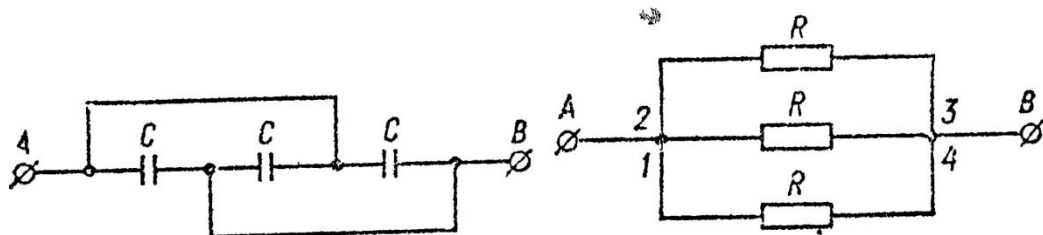


Рис. 89

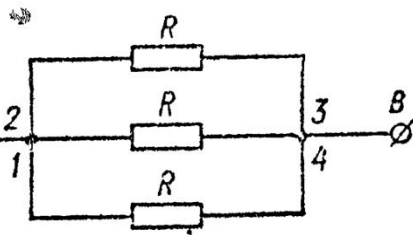


Рис. 90

Гипотеза. Значение эквивалентных сопротивлений и емкостей являются обратными числами.

Задача 11.2. Найти R_{AB} (рис. 88) и C_{AB} (рис. 89).

Решение. $R_{AB} = \frac{R}{3}$. Эквивалентная схема (рис. 90).

Следуя гипотезе для C_{AB} , мы получим значение $3C$. Проверьте это. Гипотеза торжествует! ... Пока.

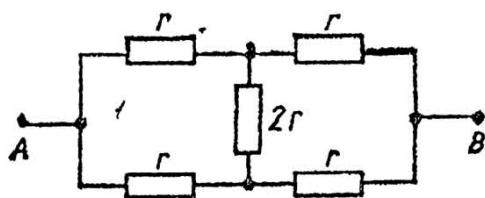


Рис. 91

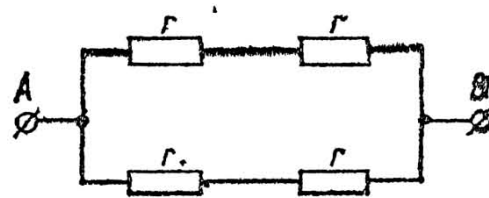


Рис. 92

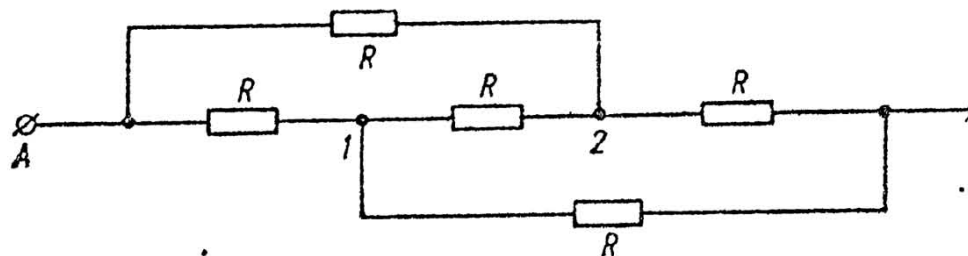
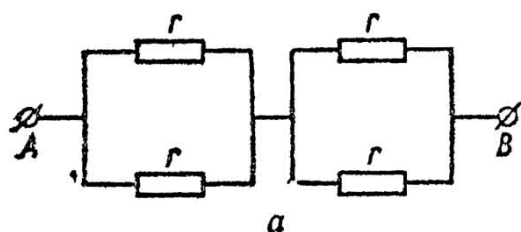
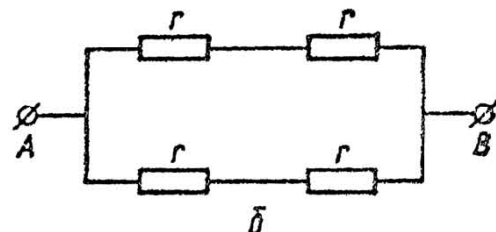


Рис. 93

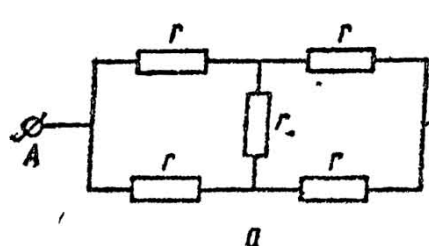


а

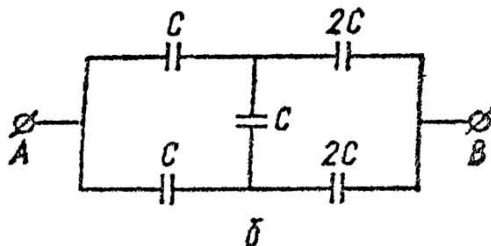


б

Рис. 94



а



б

Рис. 95

2. Метод исключения участков

Следует из метода эквипотенциальных узлов. Его суть состоит в том, что участки, включенные между эквипотенциальными узлами, можно беспрепятственно исключать, так как по ним не идет ток.

Задача 11.3. Найти R_{AB} (рис. 91).

Решение. Эквивалентная схема показана на рисунке 92.

$$R_{AB} = r.$$

Задача 11.4. Найти R_{AB} (рис. 93).

Решение. Очевидно, что 1 и 2 — эквипотенциальные узлы.

Эквипотенциальные схемы: рисунок 94, а, б.

$$R_{AB} = r.$$

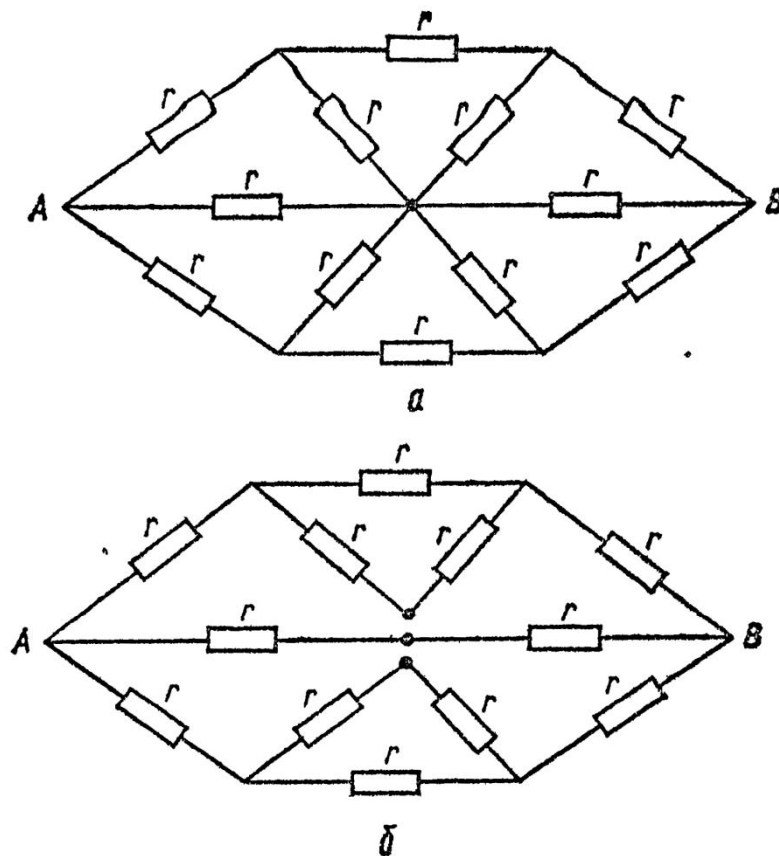


Рис. 96

Задача 11.5. (а). Найти R_{AB} .

Решение. $R_{AB} = \frac{3}{2} r$ (см. рис. 95, а).

Задача 11.5. (б). Найти C_{AB} .

Решение $C_{AB} = \frac{4}{3} C$

(см. рис. 95, б).

Гипотеза не подтвердилась.

3. Методы «размножения» узлов и «расщепления» ветвей

Это следствие метода эквипотенциальных узлов и обратимости схем (теоремы единственности). Действительно, если справедлива замена нескольких эквипотенциальных узлов одним, то, очевидно, и обратимая замена не внесет изменений в электрические условия во всей цепи.

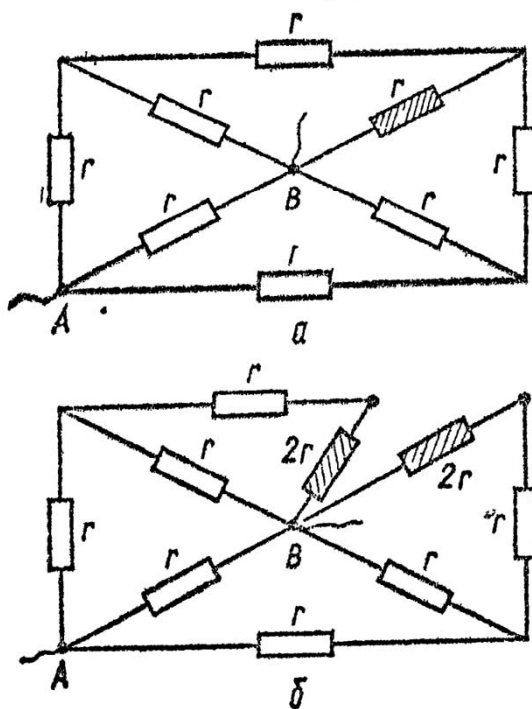


Рис. 97

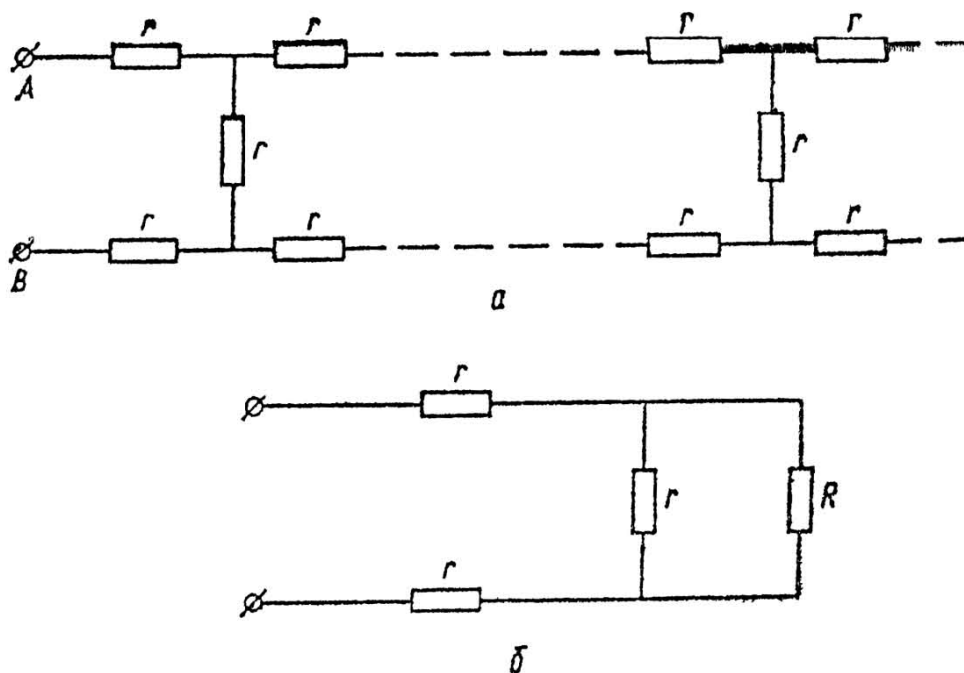


Рис. 98

Задача 11.6. Найти R (рис. 96, а и 96, б).

Задача 11.7. Найти R (рис. 97, а и 97, б).

4. Метод Иона Тихого

Герой Станислава Лема, звездный путешественник Ион Тихий решает задачу о поселении в гостиницу с бесконечным числом номеров (все номера заняты) еще одного клиента. Ион решает так, каждому обитателю гостиницы дается приказ — переиги в комнату с номером, на единицу большим, чем номер его комнаты. При этом все прежние постояльцы с жильем, и комната № 1 свободна!

Задача 11.8. Найти R (рис. 98, а и 98, б).

$$R = r(1 + \sqrt{3}).$$

Задачи для самостоятельного решения

11.9. Найти R (рис. 99).

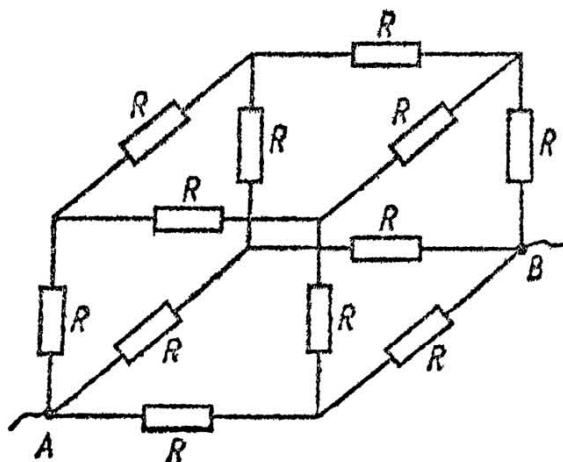
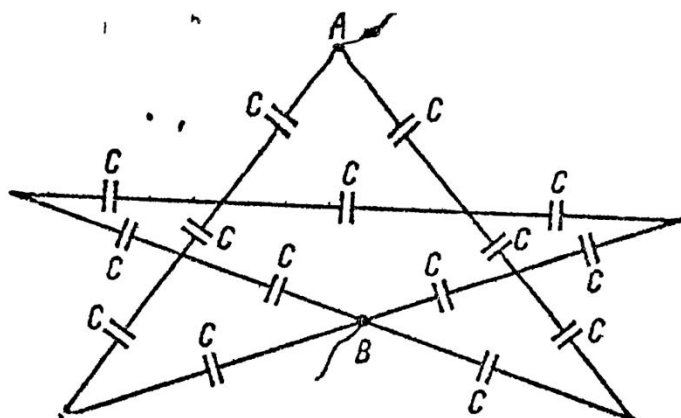
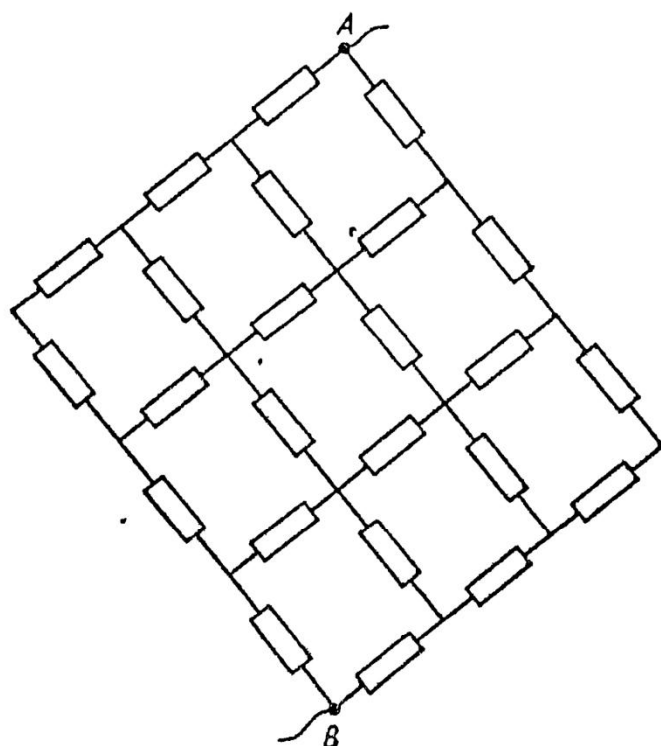


Рис. 99



11.10. Найти C
(рис. 100).

Рис. 100



11.11. Найти R
(рис. 101).

Рис 101

12. МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ

Продemonстрирован физический результат получения целого по вкладу отдельных его частей.

Принцип суперпозиции является результатом многократного преломления экспериментальных фактов в сознании людей. Он не может быть выведен как следствие законов физики, не является очевидным из каких-бы то ни было логических соображений, а может быть получен только благодаря опыту.

В основе метода суперпозиции лежит представление о независимости. Из независимости механических движений следует классический закон сложения скоростей. Независимость действия газов выражается законом Дальтона. Все эти примеры суть примеры суперпозиций.

Что же такое суперпозиция? По-видимому, следует говорить не об определении ее, а о понятии о ней.

Пусть на материальную точку со стороны N тел действуют силы $F_1, F_2, \dots, F_N$. Какова сила, действующая со стороны N тел одновременно. Из опыта известно, что, например, в случае действия сил упругости $F = F_1 + F_2 + \dots + F_N$. Тогда и говорят, что F подчиняется принципу суперпозиции.

Можно утверждать, что этот принцип справедлив для векторных и аддитивных величин. Аддитивность — свойство сложного вещества, числовое значение которого может быть получено суммированием числовых значений характеристик отдельных компонентов.

Одно применение метода суперпозиций называют *методом отрицательных величин*. Поясним суть этого метода на примерах

Задача 12.1. Как будут взаимодействовать два пузырька воздуха, помещенные в воду?

Решение. Пусть m — масса воды в объеме пузырька. Тогда взаимодействие пузырьков воздуха можно представить как взаимодействие двух тел с отрицательными массами: $F = \gamma \frac{(-m) \cdot (-m)}{R^2} = \gamma \frac{m^2}{R^2}$. Таким образом,

пузырьки будут притягиваться. Это объясняется тем, что вода между пузырьками будет менее плотной, чем вдали от них. Элемент воды притягивается к пузырьку воздуха слабее, чем к соответствующему элементу воды.

Задача 12.2. Найти центр масс тела, изображенного на рисунке 102.

Решение. Заполним полость веществом квадрата. При этом центр масс тела будет находиться в точке O . Наличие полости по принципу суперпозиции эквивалентно теперь заполнению полости отрицательной массой. Пусть искомый центр масс находится в точке O_2 :

$$Mg|OO_2| = mg|O_1O_2|, \text{ откуда } |OO_2| = \frac{1}{4} \times \\ \times \frac{\pi}{16 - \pi} a.$$

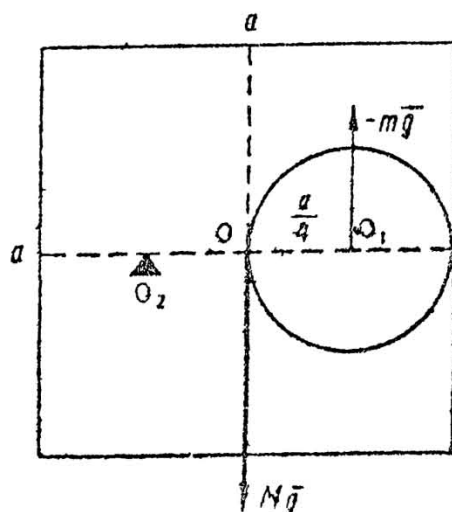


Рис. 102

Другие способы нахождения центра масс рассматривались ранее.

Задача 12.3. Цилиндрический сосуд радиуса R заполнен жидкостью с плотностью ρ_1 . На дне сосуда находится шар радиусом r и плотностью ρ_2 ($r \ll R$; $\rho_2 > \rho_1$). Сосуд вращается с угловой скоростью ω . Найти силу давления шарика на стенку (рис. 103).

Решение. Пусть искомая сила давления на стенку N , а сила, действующая на шарик со стороны жидкости, F , тогда

$$N + F = \frac{4}{3} \pi r^2 \rho_2 \omega^2 (R - r).$$

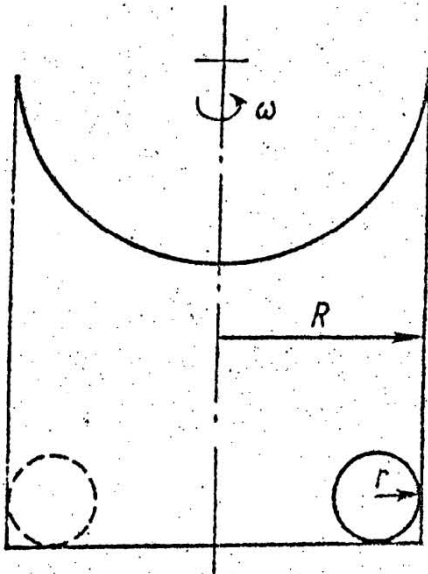


Рис. 103

Очевидно, что сила F определяется лишь объемом вытесненной жидкости и ее свойствами. Поэтому и на шарик такого же радиуса, «сделанный» из жидкости плотности ρ_1 , действует такая же сила F : $F = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_1 \times \omega^2 (R - r)$, откуда окончательно

$$N = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_2 - \rho_1) \omega^2 (R - r).$$

Задача 12.4. В сосуде с водой массой M всплывает пузырек воздуха объемом V с ускорением a . Найти силу давления сосуда на поверхность.

Решение. Движение пузырька воздуха вверх аналогично движению точно такого же по объему пузырька с таким же ускорением вниз. Без него сила давления равна $F_1 = (M - \rho_{\text{воды}} V) g$. По принципу суперпозиции для нахождения F необходимо к F_1 добавить F_2 , равную весу воды, движущейся ускоренно вниз: $F_2 = \rho_{\text{воды}} V (g - a)$ или $F = F_1 + F_2 = Mg - \rho V a$.

Задача 12.5. Диэлектрический шар радиуса R равномерно заряжен по объему с объемной плотностью заряда ρ . В шаре сделана полость радиуса r ($2r < R$). Найти напряженность внутри полости. Зависимость $\vec{E} = \vec{E}(r)$ имеет вид $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$.

Решение. Найдём напряженность в точке A (рис. 104). Отсутствие зарядов в полости эквивалентно суперпозиции полей равномерно заряженного сплошного

шара положительным зарядом и поля такого же по модулю отрицательного заряда полости.

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{\text{ш}} + \vec{E}_{\text{п}}, \text{ где } \vec{E}_{\text{ш}} = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\epsilon_0} \text{ и } \vec{E}_{\text{п}} = -\frac{\rho \vec{r}_2}{3\epsilon_0}.$$

Поэтому $\vec{E}_A = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{R} - \vec{r})$ или $E_A = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R - r)$. E_A не зависит от положения точки A .

Очевидно, что поле внутри полости однородно.

Задача 12.6. Учитывая, что индукция магнитного поля внутри длинного цилиндрического проводника $B = k2\pi jr$, где j — плотность тока, r — расстояние от оси проводника, k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц. Определить индукцию магнитного поля в произвольной точке внутри длинной цилиндрической полости, вырезанной параллельно оси проводника. Плотность тока в проводнике j . Расстояние между осями проводника и полости d (рис. 105).

Решение. (Аналог метода отрицательной массы.)

Проводник с полостью эквивалентен сложному, по всему объему которого течет ток плотностью j , а по объему полости ток j течет и в обратном направлении.

$$B_1 = k2\pi jR, \quad B_2 = k2\pi jr.$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2 \cos \alpha},$$

$$\text{но } \cos \alpha = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rd}, \text{ следовательно,}$$

$$B = \sqrt{(2\pi jk)^2 (R^2 + r^2) - 2(2\pi jk)^2 \cdot Rr \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rd}} = 2\pi jkd$$

и постоянна во всех точках полости.

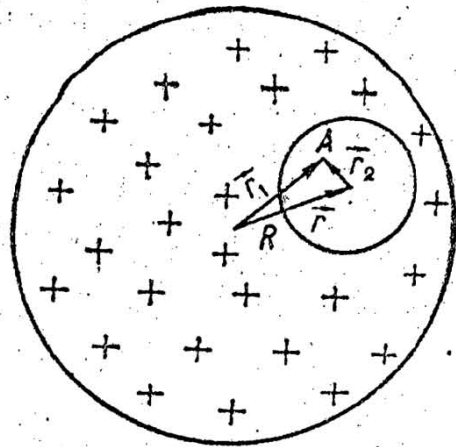


Рис. 104

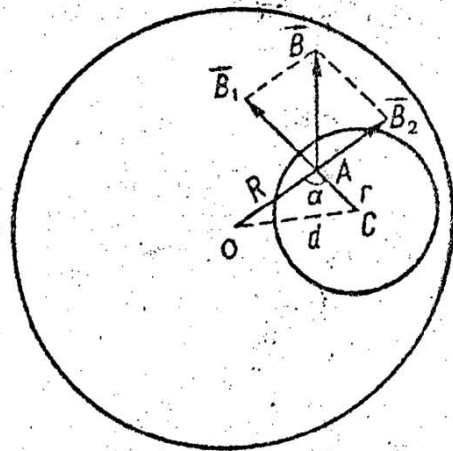


Рис. 105

Задача 12.7. Свинцовый шар $R = 50$ см имеет внутри сферическую полость $r = 5$ см, центр которой C находится на расстоянии $l = 40$ см от центра шара A . С какой силой будет притягиваться к шару материальная точка B $m = 10$ г, находящаяся на расстоянии $L = 80$ см от центра шара? $\angle CAB = 60^\circ$ (рис. 106).

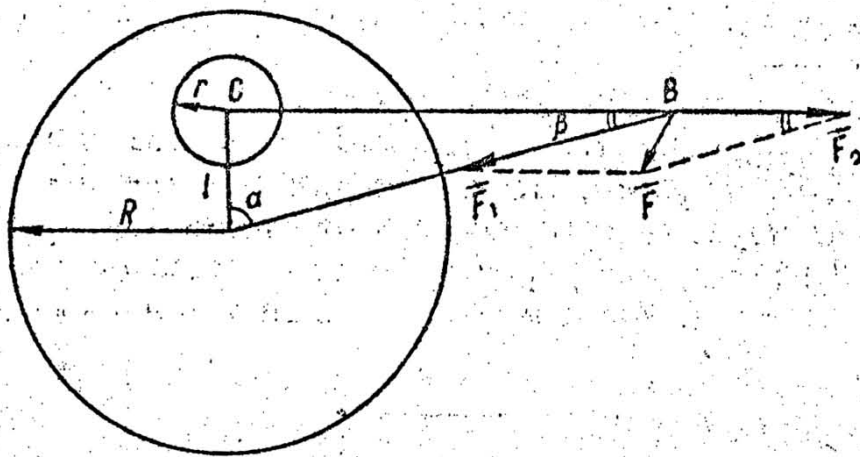


Рис. 106

Решение. Если шар сплошной, то $F_1 = j \frac{Mm}{L^2}$, где $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$. Наличие полости эквивалентно появлению силы отталкивания $F_2 = j \frac{m'm}{BC^2}$, где $m' = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$. Искомая сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Нетрудно заметить, что $\beta = 30^\circ$,

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \beta} = \frac{4}{3} \pi j m \rho \times \\ \times \sqrt{\frac{R^6}{L^4} + \frac{r^6}{(L^2 - l^2)^2} - \frac{2R^3 r^3 \cos \beta}{L^2 (L^2 - l^2)}} \approx 5,7 \text{ мкН.}$$

Задачи для самостоятельного решения

12.8. Сферическая оболочка радиуса R заряжена равномерно зарядом σ . Найти силу, приходящуюся на единицу поверхности оболочки.

Ответ. $f = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$.

12.9. Как взаимодействует в воде пузырек воздуха радиуса r и железный шарик того же радиуса?

Ответ. Они отталкиваются.

13. МЕТОД ЗЕРКАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Этим методом решены некоторые задачи кинематики, электростатики, оптики.

Метод зеркальных изображений основан на построении изображений предметов в плоских зеркалах. Этим методом можно решать задачи кинематики, электростатики, оптики.

Прежде всего напомним, как строятся изображения в плоском зеркале. На рисунке 107, а показано изображение A_1B_1 предмета AB в плоском зеркале OO_1 . При этом угол падения α_1 равен углу отражения β_1 , $\alpha_2 = \beta_2$; $AO = A_1O$; $BO_1 = B_1O_1$. Кроме того, плоское зеркало меняет «лево» на «право». Это свойство зеркальных изоб-

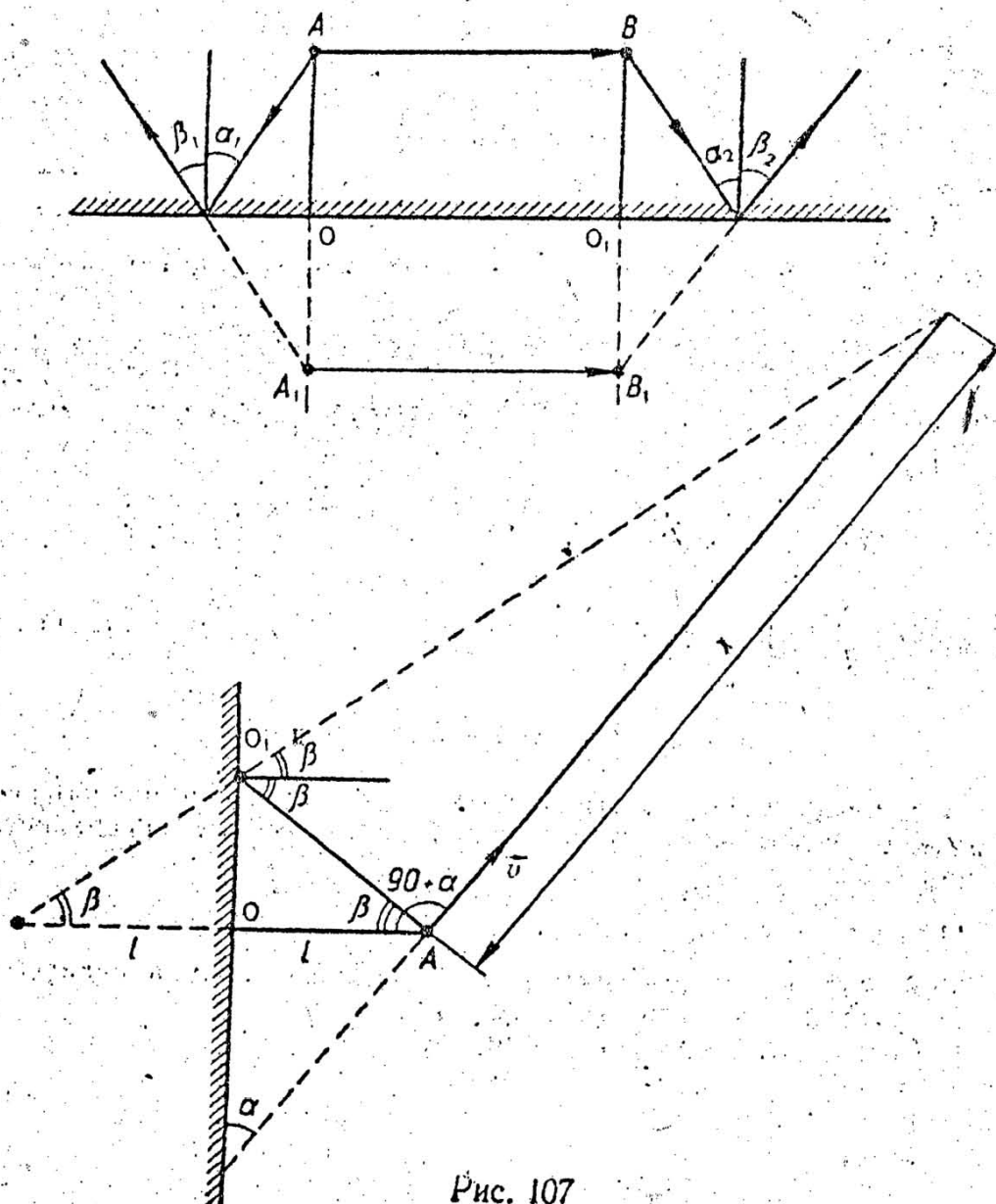


Рис. 107

Метод зеркальных изображений в электростатике основан на следующем свойстве эквипотенциальной поверхности (поверхности равного потенциала): если заменить эквипотенциальную поверхность в произвольном электростатическом поле проводящей поверхностью той же формы и создать на ней тот же потенциал, то электростатическое поле не изменится.

Задача 13.3. Найти силу взаимодействия точечного заряда q , расположенного на расстоянии r от проводящей бесконечной заземленной плоскости (рис. 109), с этой плоскостью.

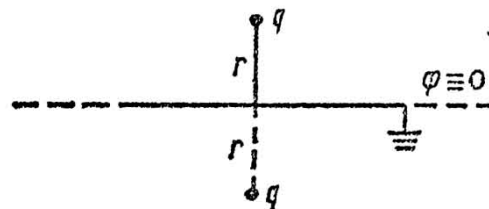


Рис. 109

Решение. На плоскости в силу явления электростатической индукции наводится заряд $-q$, распределенный по ней. Сила взаимодействия заряда q и индуцированного на плоскости заряда $-q$ эквивалента силе взаимодействия заряда q и его «зеркального» изображения $-q$. Так в электростатике проявляется «лево» — «право». Итак,

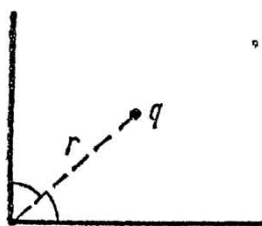


Рис. 110а

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4r^2}.$$

Задача 13.4. Найти силу взаимодействия заряда q с проводящим прямым двугранным углом (рис. 110, а).

Решение. Из рисунка 110, б видно, что

$$F = F_- - F_+ = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right).$$

Задача 13.5. Тонкая, бесконечно длинная нить равномерно заряжена с линейной плотностью заряда τ и расположена параллельно безграничной проводящей плоскости на расстоянии l от нее. Найти силу, действующую на единицу длины нити (рис. 111).

Решение. По теореме Гаусса $E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$, где $r = 2l$. Поэтому $F = \frac{\tau^2}{4\pi\epsilon_0 l}.$

Задача 13.6. Два плоских зеркала образуют двугранный угол

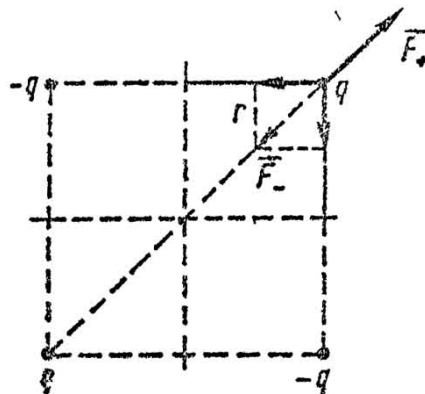


Рис. 110б

$\varphi = \frac{2\pi}{n}$ (n — целое число). Точечный источник света находится между ними на биссектрисе угла. Найти количество изображений источника в зеркалах (рис. 112).

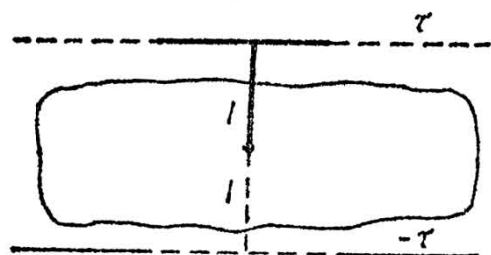


Рис. 111

Решение.

$$1) \angle S''OS = \angle S_1'OS = \varphi.$$

2) Все изображения лежат на окружности радиуса O .

Если $n = 2k$ (k — целое), то $S_k' = S_k$.

Тогда в зеркалах будет $n - 1$ изображений.

Если $n = 2k + 1$, то k -ые изображения лежат на продолжениях зеркал.

Следовательно, изображений $2k = n - 1$.

Итак, в зеркалах будет $n - 1$ изображений.

Задача 13.7. Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\varphi = \frac{2\pi}{a}$ (a — произвольное число > 2). Точечный источник S находится на биссектрисе угла φ . Найти число изображений источника в зеркалах (см. рис. 112).

Решение. Все изображения будут лежать на окружности радиуса OS . Если a — целое число, то число изображений будет $a - 1$.

Если $a = 2i \pm \delta$ (i — целое, $-1 < \delta < 1$), то последние изображения будут лежать на дуге ES_xF , находящейся сзади как первого, так и второго зеркал, и, следовательно, других изображений не будет. Их число $2i$.

Если a — целое — $a - 1$ изображение.

Если $a = 2i \pm \delta$, где i — целое, $|\delta| < 1$, то будет $2i$ изображений.

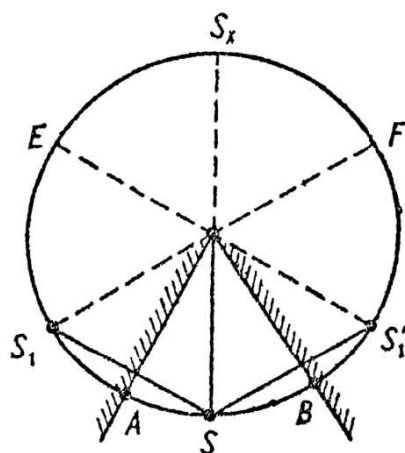


Рис. 112

Задачи для самостоятельного решения

13.8. Точечный диполь с электрическим моментом p ($p = qd$) находится на расстоянии r от бесконечной проводящей плоскости. Найти силу, действующую на диполь (рис. 113).

Ответ. $F = \frac{q^2 d^2}{8\pi\epsilon_0 r^3}$.

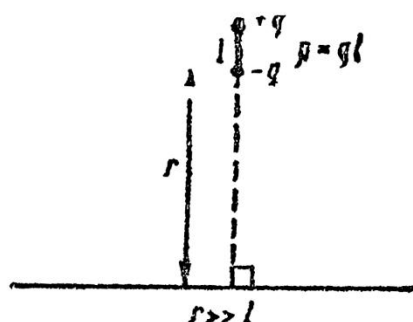


Рис. 113

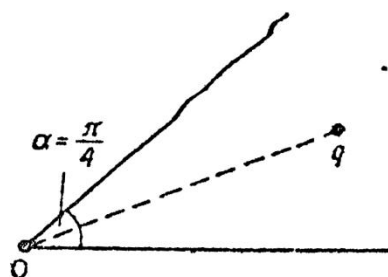


Рис. 114

13.9. Найти напряженность поля точечного заряда q в точке O . Заряд находится на расстоянии r на биссектрисе угла $\alpha = \frac{\pi}{4}$ внутри двугранного проводящего угла (рис. 114).

Ответ. $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\sqrt{2} - 1)$.

14. ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Показан метод динамических рисунков, векторов, графиков, номограмм, векторных диаграмм, эпюр, развертки.

Часто графическое представление физического процесса делает его более наглядным и тем самым облегчает понимание рассматриваемого явления. Позволяя порой вназначительно упростить расчеты, графики широко используются на практике для решения различных научно-технических и народнохозяйственных задач. Умение строить и читать их сегодня является обязательным для многих специалистов.

К графическим задачам мы относим задачи: на построение, где очень помогают рисунки, чертежи; схемы, решаемые с помощью векторов, диаграмм, эпюр и номограмм.

В данной главе рассмотрены лишь немногие из перечисленных выше типов задач.

1. Метод динамических рисунков

Задача 14.1. Наблюдатель с вышки увидел в бинокль на горизонте самолет в бреющем полете, летящий прямо на него. В начальный момент крылья самолета занимали в бинокле 40 делений, а через 10 с стали занимать 42 деления. Оценить время, через которое самолет окажется над наблюдателем.

Решение. Задачу решает динамический рисунок 115. Очевидно, что $\alpha (L + v\Delta t) = (\alpha + \Delta\alpha) L$. Откуда $t = \frac{L}{v} = \frac{\alpha}{\Delta\alpha} \Delta t = 200$ с.

Задача 14.2. Определитель центр масс плоской однородной фигуры (рис. 116, а) в помощью линейки и карандаша.

Решение. Разобьем плоскую фигуру на два простых прямоугольника, центр каждого точки a и b находят-

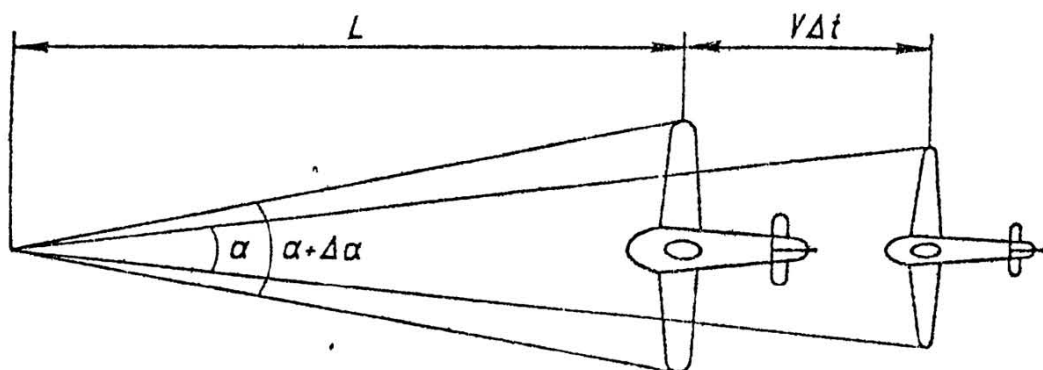


Рис. 115

ся на пересечении диагоналей (рис. 116, б), а затем разобьем эту же фигуру иначе: тоже на два прямоугольника с центрами в точках c и d (рис. 116, в). Очевидно, что общий центр масс лежит в первом случае на прямой ab (деля ее на части, обратно пропорциональные площадям прямоугольников). Те же рассуждения дают возможность считать, что общий центр масс при новом разбиении лежит на прямой cd (деля ее в частях, обратно пропорциональных площадям фигур второго разбиения). Но если совместить эти разбиения (рис. 116, г), то пересечение прямых (cd) и (ab) сразу определит центр масс плоской фигуры в точке O . Этот метод определения центра масс плоских фигур получил название *метода двойного расчленения*.

Задача 14.3. К очень тонкой металлической пластине подводят с трех сторон лед при 0°C , а с четвертой стороны — стоградусный пар. Определить установившуюся температуру в центре пластины (рис. 117, а).

Решение. Задача имеет довольно простое строгое решение, и лишь с известными грубыми приближениями ее можно решить аналитически.

Пусть Φ — тепловой поток, идущий от пара к центру. Он делится приблизительно на 3 равные части, и процесс передачи тепла происходит от центра к холодным сторонам. Установившийся процесс передачи тепла выглядит приблизительно так: $\kappa\Phi (100 - t_x) = 3 \kappa\Phi (t_x -$

— 0); $100 - t_x = 3t_x$; $t_x = 25^\circ\text{C}$, где κ — коэффициент теплопроводности.

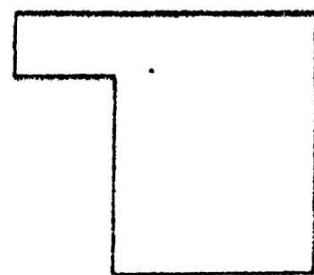
Известный математик Тригг предложил более простое и совершенно строгое решение этой задачи методом, который мы определили как «динамические рисунки». Достоинство этого метода состоит в том, что он не допускает грубые модели вроде теплопередачи только через центральную зону (ведь передача тепла в действительности от грани к грани происходит и кратчайшими путями, которые показаны на рисунке 117, а пунктирными стрелками).

Представьте, что у нас есть четыре таких пластины, но горячая сторона у каждой смещена (повернута на 90° относительно предыдущей) рисунок 117, б. Сложим очень тонкие пластинки вместе. С каждой стороны будет одна нагретая до 100° и три стороны, поддерживаемые при 0° . (Различие лишь в том, на какой высоте будет «горячий слой», но так как пластинки тонкие, то это не имеет значения.) Применяя метод динамических рисунков, мы пришли к однородной структуре — равновесной системе, что только и имеет смысл при измерении температур. Отсюда понятно, что 100°C приходится на четыре пластинки, то есть в равновесной системе всюду одинаковая температура 25°C (рис. 117, в).

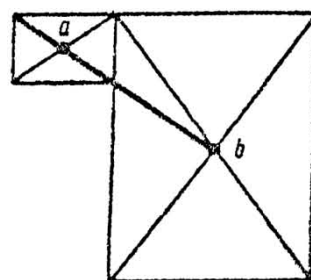
Задача 14.4. Определить показатель преломления стеклянного шара, если параллельные лучи, падающие на него, после преломления отклоняются на угол не более 90° от первоначального направления.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся построением для предельного преломления. В условии задачи сказано, что после преломления угол отклонения не более 90° . Будем считать его предельным, то есть $\alpha = 90^\circ$ (рис. 118).

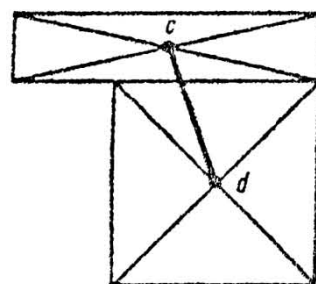
$$n_{\text{стекло}} \sin \beta = n_{\text{воздуха}} \sin 90^\circ; \quad n_{\text{воздуха}} = 1,$$



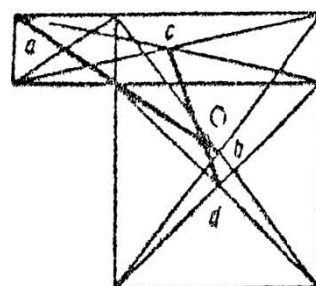
а



б



в



г

Рис. 116

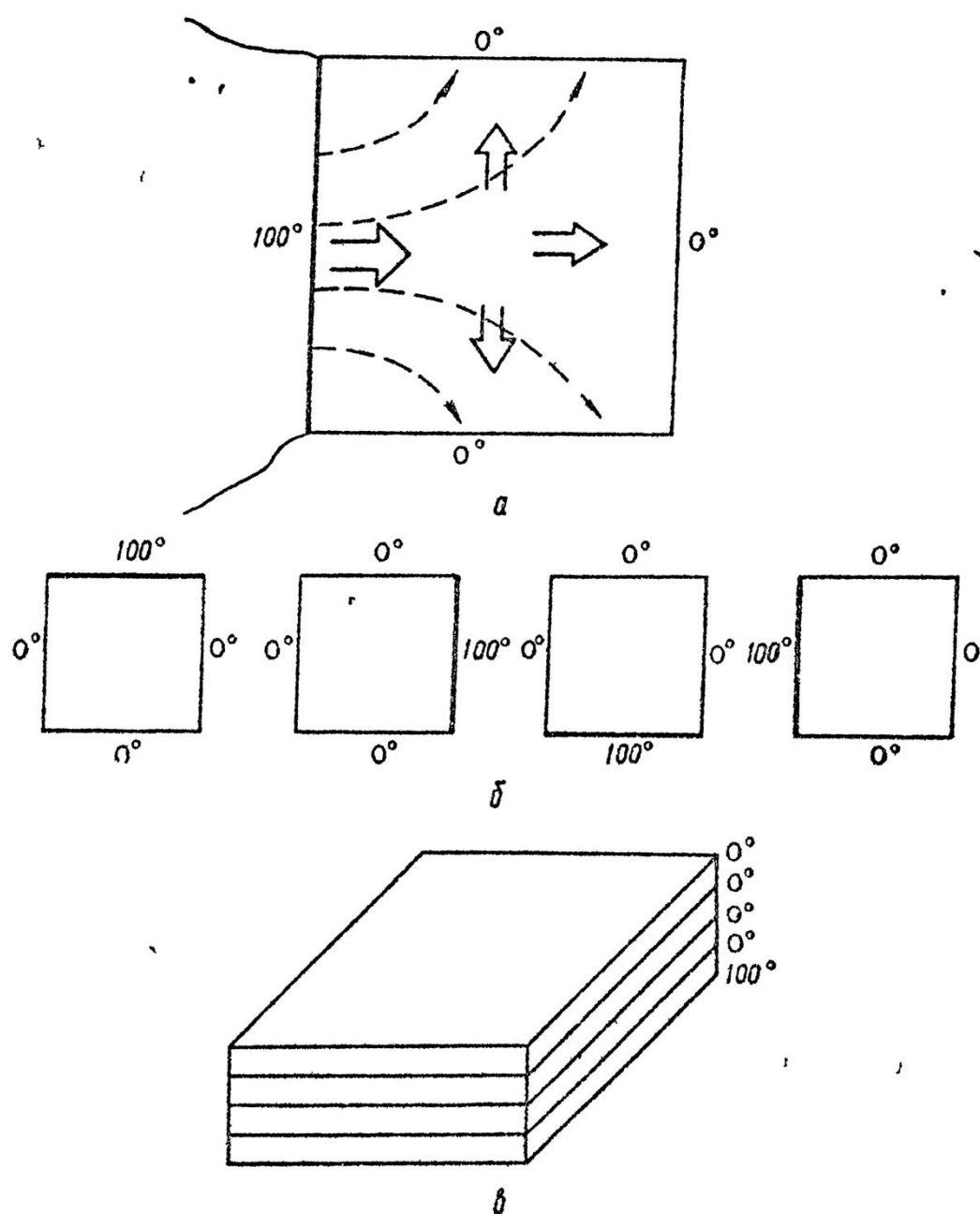


Рис 117

$AO = OB = R$ шара, $\angle \beta$ — угол падения, $\beta = 45^\circ$, так как $\triangle AOB$ — равнобедренный. Но при $\alpha = 90^\circ$ (предельный случай), радиус перпендикулярен касательной и с ней же совпадает преломленный луч, выходящий из стеклянного шара AB — диагональ квадрата $OBD A$. Отсюда

$$n_x \sin 45^\circ = 1, \quad n_x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Задача 14.5. На какой максимальный угол может отклонить тонкая собирающая линза падающий на нее луч, если фокусное расстояние линзы в пять раз больше ее диаметра?

Решение Диаметр линзы D . Наибольшее отклонение испытывает луч, падающий на край линзы. Для случая 1 (рис. 119, а):

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \beta_1 + \beta_2; \\ \frac{1}{\frac{D}{2} \operatorname{ctg} \beta_1} + \frac{1}{\frac{D}{2} \operatorname{ctg} \beta_2} &= \frac{1}{2F}, \end{aligned} \right.$$

$$\alpha_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{D}{F} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{1}{10}.$$

Для случая 2 (рис. 119, б) те же уравнения и тот же ответ.

2. Метод векторов

Для определения крейсерской* скорости самолета пилот проходит по замкнутому треугольнику известные расстояния между аэродромами Домодедово, Внуково и Шереметьево, замеряя соответственно время t_1, t_2, t_3 прохождения участков длиной L_1, L_2, L_3 . Определить (графически) скорость самолета и вектор скорости постоянного ветра (рис. 120, а).

Решение. Разделив соответственные расстояния между пунктами поворотов на время их прохождения, мы получим значение векторов результирующих скоростей самолета и ветра на каждом участке, которые по условию направлены вдоль сторон. Параллельным переносом построим «розу скоростей» из точки C (рис. 120, б).

* Крейсерская — собственная скорость самолета при отсутствии ветра.

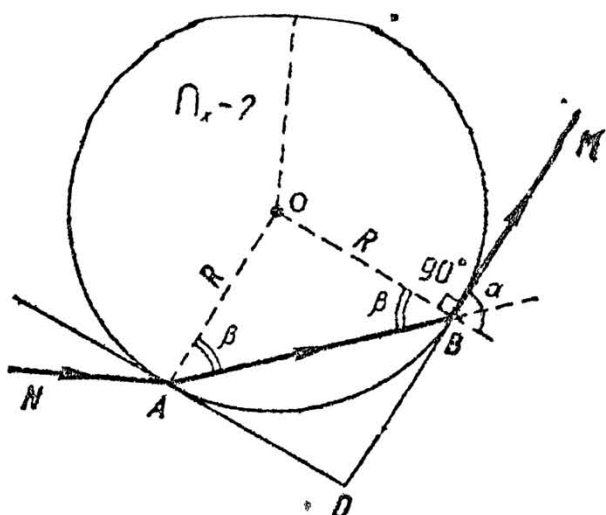
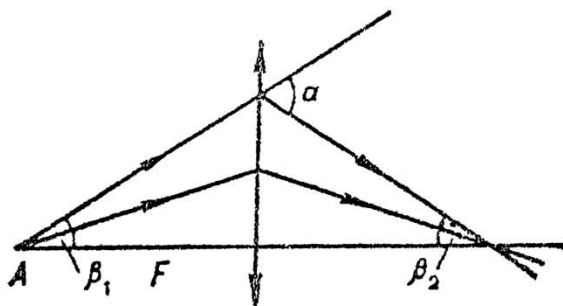
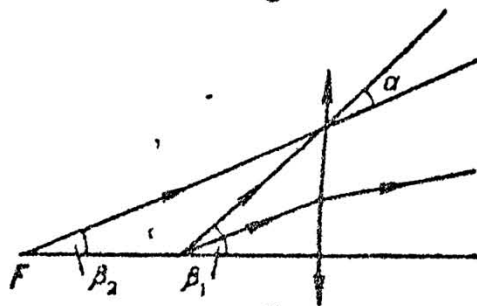


Рис. 118



а



б

Рис. 119

Соединим концы этих векторов и опишем окружность вокруг образовавшегося треугольника с центром в точке O . Радиусы, проведенные к вершинам треугольника, — крейсерские скорости самолетов. А отрезок CO — вектор скорости ветра. В самом деле, постоянная по величине и направлению скорость ветра вместе с собственной скоростью самолета дают на каждом участке результирующие скорости $\vec{v}_1$; $\vec{v}_2$; $\vec{v}_3$, отложенные в самом начале из точки C .

Примечание. Если построения проводить строго в масштабе, то численные значения получаются из построения.

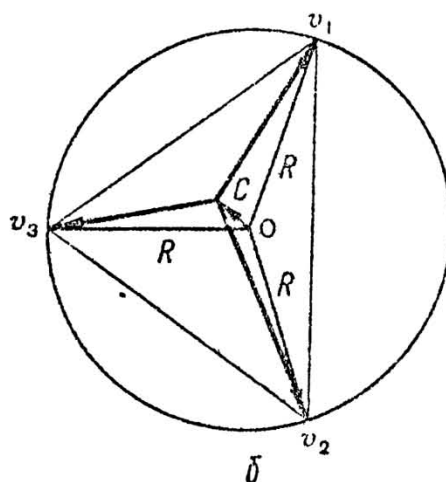
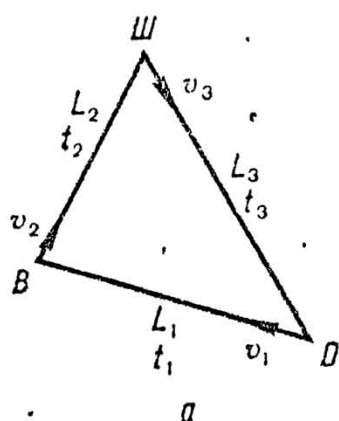


Рис. 120

Задача 14.7. Определить графически вектор скорости в точке C абсолютно твердого тела, если скорости точек A и B соответственно равны v_1 и v_2 в данное мгновение (рис. 121).

Решение. Заметим, что скорости точек A и B параллельны, сонаправлены и модуль скорости точки A

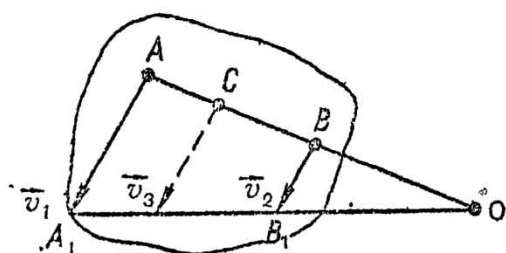


Рис. 121

меньше, чем модуль скорости точки B . Очевидно, есть такая точка O , в которой модуль скорости равен нулю — это и есть мгновенный центр вращения.

Проведем прямые через точки A и B и A_1 и B_1 до их пересечения в точке O (мгновенный центр вращения абсолютно твердого тела). Из точки C проведем параллельно векторам v_1 и v_2 вектор $\vec{v}_3$. Все точки тела имеют одинаково направленные (сопараллельные) скорости, так как центр вращения лежит вне тела (рис. 121).

Задача 14.8. Электростатический вольтметр, подключенный к пластинам плоского конденсатора, заполненного диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого ϵ , показал напряжение U . После замыкания на очень короткое время ключ сразу же размыкают и фиксируют новое показание вольтметра — $\frac{U}{2}$. Найти диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей конденсатор (рис. 122, а).

Решение Решим задачу векторным методом, используя принцип суперпозиции. Напряженность результирующего поля конденсатора E_k . В силу поляризации диэлектрика напряженность поля в нем E_d (рис. 122, б). Поэтому

$$E_k \cdot d = U = (E_{\text{вакуума}} - E_d) d. \quad (1)$$

После замыкания ключа заряды обкладок успевают нейтрализоваться, в то время как диэлектрик все еще на некоторое время может быть поляризован и

$$E_d \cdot d = \frac{U}{2}. \quad (2)$$

Как известно, ϵ — диэлектрическая проницаемость равна

$$\epsilon = \frac{E_{\text{вакуума}}}{E_{\text{среды}}}. \quad (3)$$

Из (1): $E_{\text{вакуума}} = \frac{3}{2} \frac{U}{d}$, $E_{\text{среды}} = \frac{U}{d}$. Таким образом,

$$\epsilon = \frac{E_{\text{вакуума}}}{E_{\text{среды}}} = \frac{1,5U}{1U} = 1,5.$$

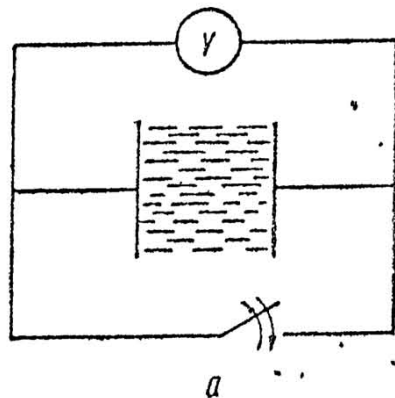
3. Графические методы

Задача 14.9. Между двумя остановками трамвай движется по прямой. При этом он не может двигаться с ускорением, равным по модулю a . Каков должен быть характер движения, чтобы время движения было минимальным?

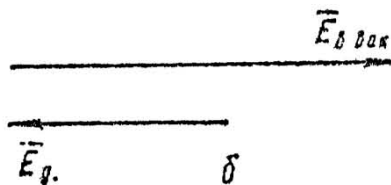
Решение. График $v(t)$ (рис. 123) может представлять собой либо трапецию, либо треугольник.

$a = \operatorname{tg} \alpha$ — максимальный угол на графике.

Площади фигур одинаковы. Очевидно, что наименьшее основание (то есть наименьшее время) при одинаковых площадях и угле α имеет треугольник.



а



б

Рис. 122

Трамвай первую половину пути должен двигаться равноускоренно, а вторую — равнозамедленно.

Задача 14.10. Пассажир, опоздавший к поезду, заметил, что предпоследний вагон прошел мимо него за $t_1 = 10$ с, а последний — за $t_2 = 8$ с.

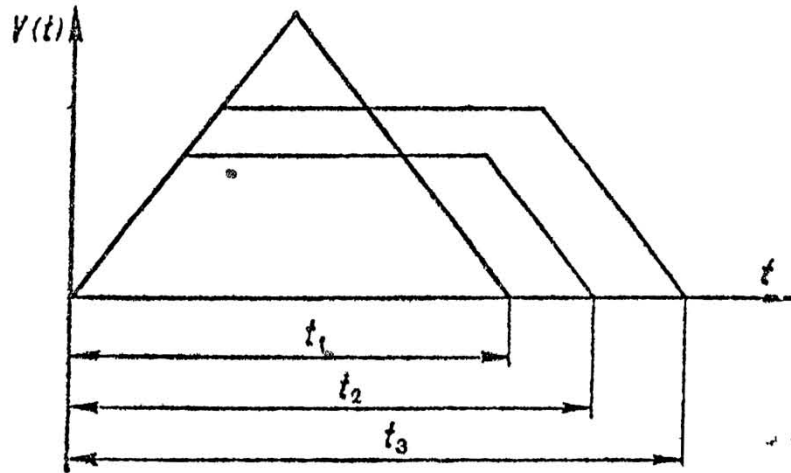


Рис. 123

Считая движение поезда равноускоренным, определить время опоздания.

Решение. Графическое решение данной задачи основано на том, что площадь под графиком скорости численно равна пройденному пути. Поскольку пути

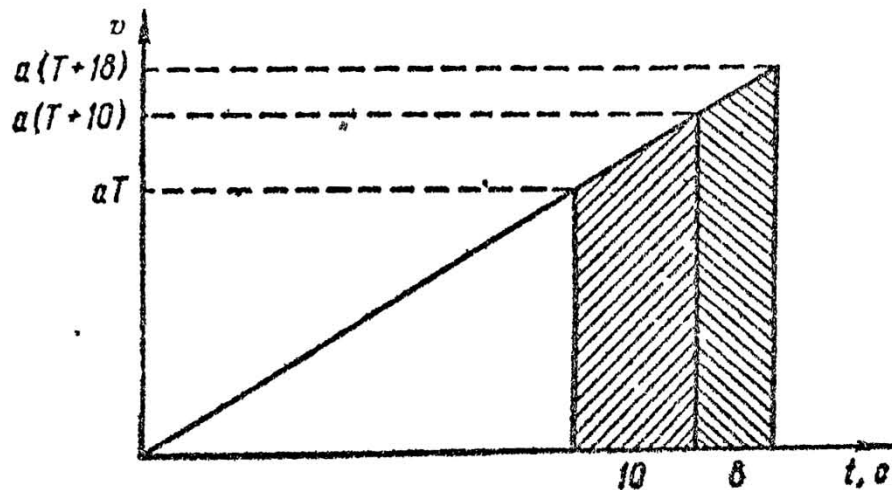


Рис. 124

(рис. 124) ва время t_1 и t_2 — это равные длины вагонов, то $\frac{T + (T + 10)}{2} 10 = \frac{(T + 10) + (T + 18)}{2} 8$, $T = 31$ с.

Задача 14.11. Звук от падающего в глубокий колодец камня пришел через 4 с. Считая скорость звука в воздухе равной 330 м/с, определить глубину колодца.

Решение. Наряду с аналитическим решением системы уравнений по условию данной задачи

$$\begin{cases} t_{\text{камня}} + t_{\text{звука}} = 4; \\ v_{\text{звука}} t_{\text{звука}} = \frac{gt_{\text{камня}}^2}{2} = H_{\text{камня}}, \end{cases}$$

которое приводит к решению квадратного уравнения, полезно знать и графическое решение

Ветвь параболы определяет равноускоренное свободное падение камня. Прямая, проведенная из точки 4 с, определяет равномерное движение звуковой волны. Тангенс угла ее наклона к горизонтальной оси соответствует известной скорости звука. А пересечение этих линий показывает глубину колодца, время полета камня и прохождения звука (рис. 125).

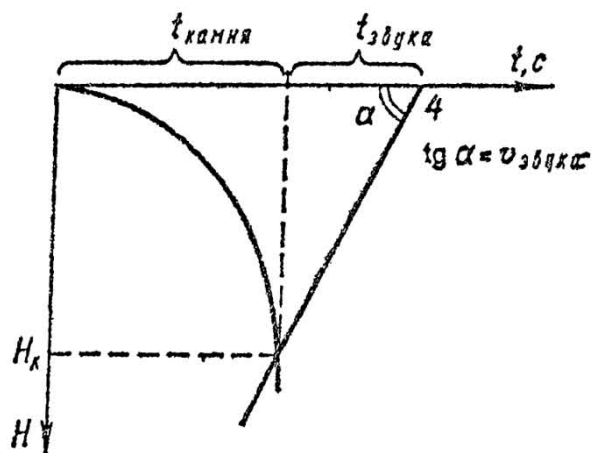


Рис. 125

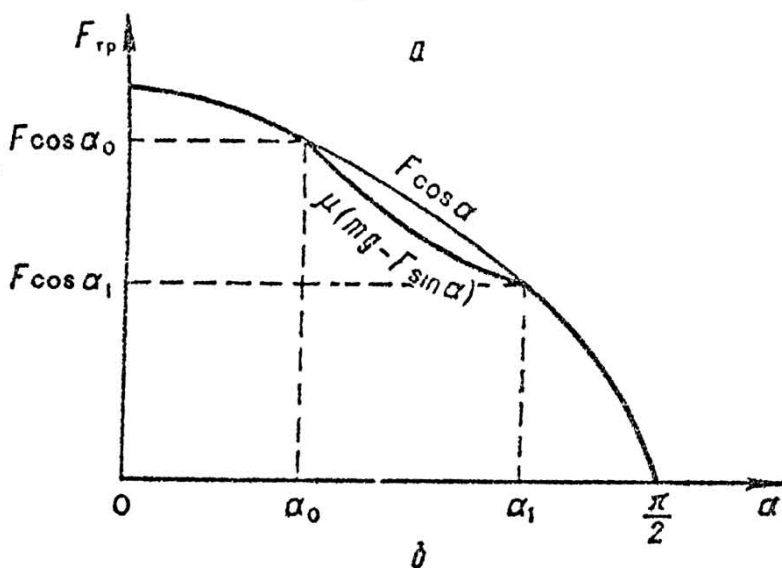
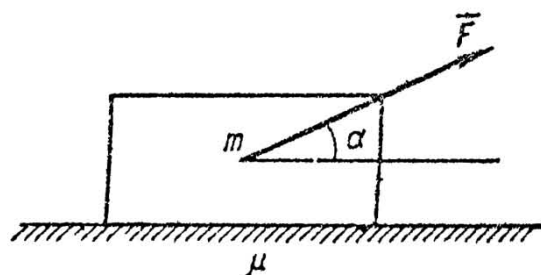


Рис. 126

Задача 14.12. Тело массы m лежит на горизонтальном столе. К телу приложена сила F под углом α к горизонту, причем $F \sin \alpha < mg$.

Найти зависимость силы трения от угла α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

Коэффициент трения тела о стол μ (рис. 126, а).

Решение. В главе 17 показано, что равномерное движение тела по столу начинается при $\alpha_0 = \operatorname{arctg} \mu$. В этом случае сила трения равна $F \cos \alpha_0$. С другой стороны, это сила трения скольжения и равна она $\mu \cdot N$, где $N = mg - F \sin \alpha_0$. При некотором дальнейшем возрастании угла α значение $F \sin \alpha$ возрастет, а значение силы трения скольжения уменьшется. Это происходит до тех пор, пока $F \cos \alpha_1$ не станет равной $\mu (mg - F \sin \alpha_1)$. После чего сила трения равна $F \cos \alpha$ вплоть до достижения углом α значения $\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим теперь интервал изменения α от 0° до α_0 . Для определенности положим, что тело покоится. Тогда сила трения равна $F \cos \alpha$. График зависимости $F_{\text{тр}}$ от угла α дает целостное и полное уяснение этой зависимости (рис. 126, б).

Определим угол α_1 . Напомним, что $F \cos \alpha_1 = \mu \times (mg - F \sin \alpha_1)$, откуда

$$\mu \sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 = \frac{\mu mg}{F}$$

$$\text{или } \sqrt{1 + \mu^2} \left(\frac{\mu}{1 + \mu^2} \sin \alpha_1 + \frac{1}{1 + \mu^2} \cos \alpha_1 \right) = \frac{\mu mg}{F}.$$

$$\text{Покажите, что } \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \sin \alpha_0 \text{ и } \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \cos \alpha_0.$$

Воспользуемся тем, что

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha - \beta),$$

$$\cos (\alpha_1 - \alpha_0) = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2} F}.$$

$$\text{Откуда } \alpha_1 = \alpha_0 + \arccos \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2} F}.$$

Задача 14.13. Дан процесс, совершенный газом в координатах PT (рис. 127, а). Построить этот же процесс в осях VT и PV .

Решение. Для решения этой графической задачи воспользуемся методом двойного обозначения линий каждого процесса.

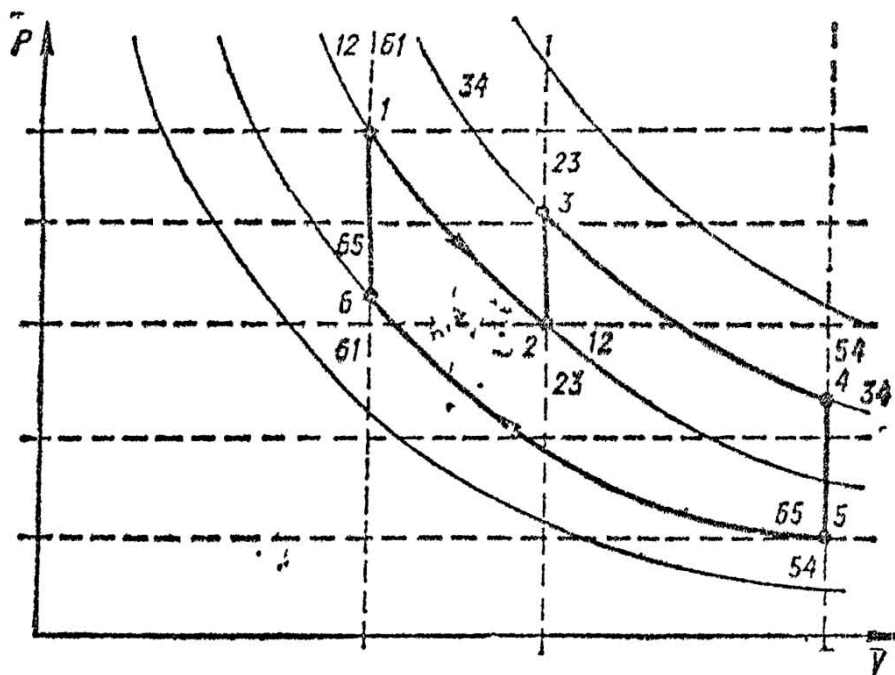
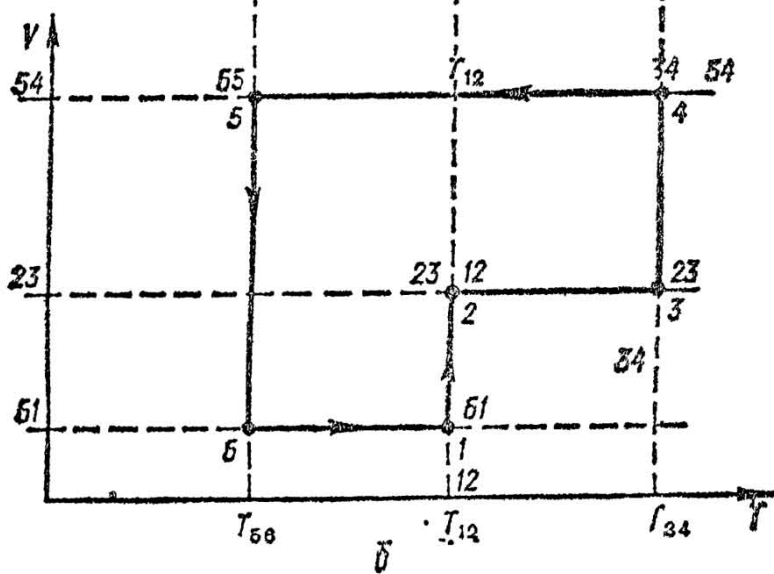
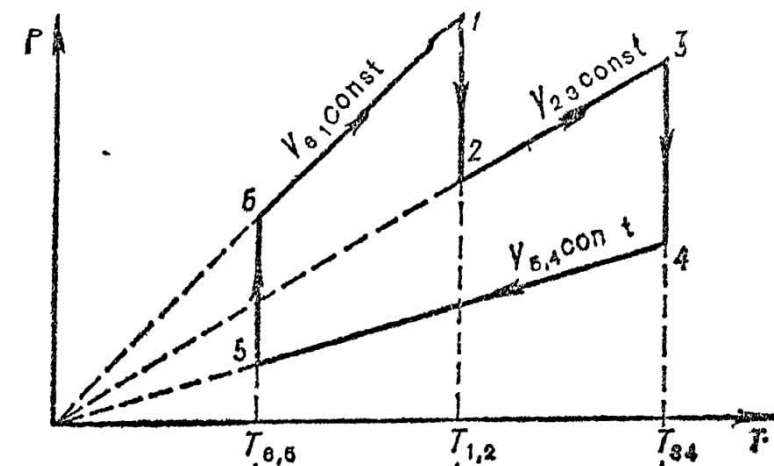


Рис. 127

Участки 6—1, 2—3, 5—4 (рис. 127, а) соответствуют изохорным процессам, причем чем больше угол наклона этих прямых, тем меньше объемы, то есть $V_{5-4} > V_{2-3} > V_{6-1}$. Обозначим эти линии в координатах VT (рис. 127, б). Вертикальные прямые 6—5, 1—2, 3—4 соответствуют постоянным температурам, $T_{5-6} < T_{1-2} < T_{3-4}$. Обозначим точки пересечения соответствующих значениям постоянного объема и постоянной температуры процессов той цифрой, которая является общей для этих пересечений, и соединим полученные точки.

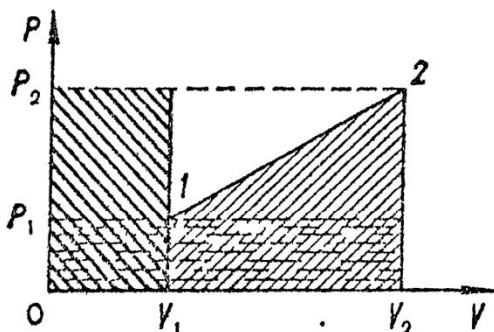


Рис. 128

На осях PV (рис. 127, в) проведем изохоры $V_{5-4} > V_{2-3} > V_{6-1}$ и изотермы $T_{3-4} > T_{1-2} > T_{5-6}$.

Запишем точки пересечения линий:

- 6—1 и 1—2 — точка 1,
- 1—2 и 2—3 — точка 2,
- 3—4 и 2—3 — точка 3,
- 3—4 и 4—5 — точка 4,
- 4—5 и 5—6 — точка 5,
- 5—6 и 6—1 — точка 1.

Остается соединить эти точки вдоль указанных линий. Метод двойного обозначения линий процесса автоматически указывает направление процесса в других осях. Он прост и легок для усвоения.

Задача 14.14. Один моль идеального газа нагревают от T_1 до T_2 . При этом температура изменяется пропорционально квадрату давления. Найти работу газа.

Решение. По условию $T = \alpha P^2$ (1), где α — некоторая константа. Из уравнения Менделеева — Клапейрона для одного моля $PV = RT$ (2). Разделив (1) на (2), получим $P = \beta V$ (3), где β — также константа.

В координатах PV построим график этой зависимости (рис. 128).

Зафиксируем $(P_1; V_1)$ и $(P_2; V_2)$.

Поскольку работа газа численно равна площади под графиком в координатах PV ,

$$A = \frac{P_1 + P_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} (P_1 V_2 + P_2 V_2 - P_1 V_1 - P_2 V_1).$$

Заметим, что $P_1 V_1 = RT_1$ и $P_2 V_2 = RT_2$.

Кроме того, $P_1 V_1 = P_2 V_2$.
Докажем это аналитически.
 $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$. Домножим левую и правую части равенства на $V_1 V_2$.

$$P_1 V_2 \cdot \frac{V_1^2}{T_1} = P_2 V_1 \cdot \frac{V_2^2}{T_2}.$$

Из уравнений (1) и (3): $\frac{V_1^2}{T_1} =$

$$= \frac{V_2^2}{T_2}, \text{ поэтому } P_1 V_1 = j(A) = P_2 V_2.$$

Итак, окончательно:

$$A = \frac{1}{2} R (T_2 - T_1).$$

Убедитесь, что графически ответ получить проще.

Задача 14.15. На графике (рис 129) представлена изотерма влажного воздуха. Найти относительную влажность воздуха φ_1 ; φ_2 ; φ_3 .

Решение. По определению относительная влажность есть отношение давления пара при данной температуре к давлению насыщенного пара при той же температуре. Излом изотермы в точке 2 соответствует изменению массы водяного пара и означает начало конденсации его. Значит, давление P_2 и есть давлением насыщенного пара. Поэтому

$$\varphi_1 = \frac{P_1}{P_2} \cdot 100 \%;$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 100 \%.$$

Задача 14.16. На рисунке 130 а показана зависимость тока, проходящего через автомобильную лампочку, от напряжения на ней. Лам-

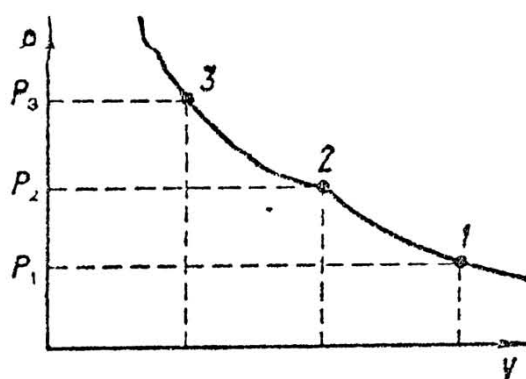


Рис. 129

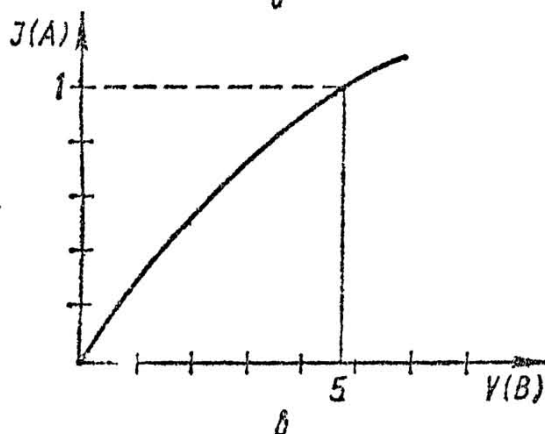
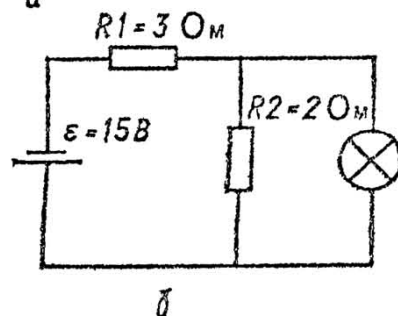
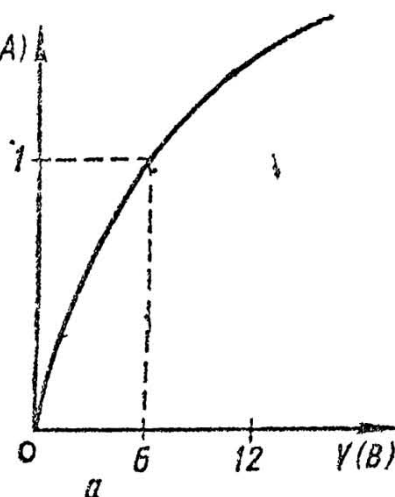


Рис. 130

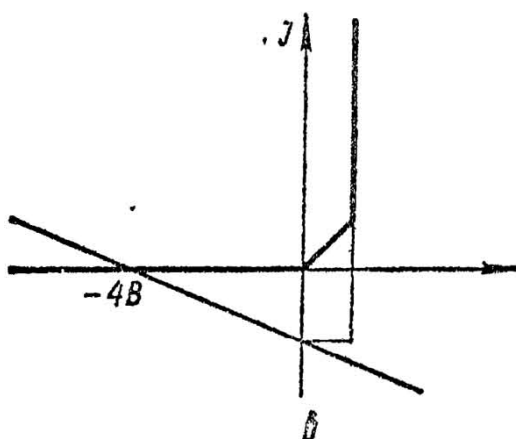
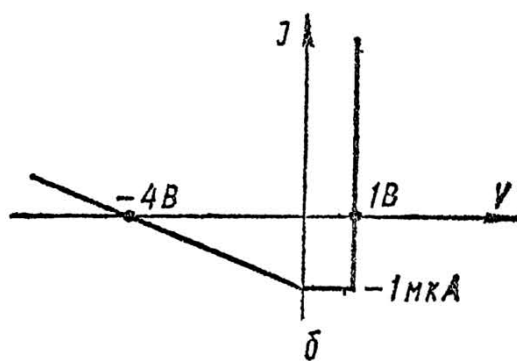
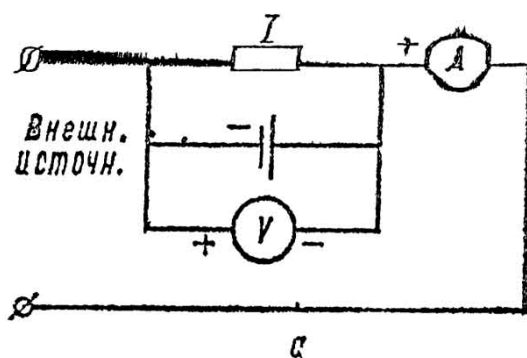


Рис. 131

почку включают в цепь (рис. 130, в).

Найти мощность, выделяющуюся на лампочке.

Решение. Если на лампочке и на резисторе с сопротивлением R_2 напряжение U , то на резисторе с сопротивлением R_1 оно равно $\mathcal{E} - U$; ток через R_1 равен $I_1 = \frac{\mathcal{E} - U}{R_1}$; ток через R_2 $I_2 = \frac{U}{R_2}$. Следовательно, ток, текущий через лампочку при напряжении на ней U , равен

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\mathcal{E} - U}{R_1} - \frac{U}{R_2} = \frac{\mathcal{E}}{R_1} - U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (1)$$

Лампочка горит, если U и I , связанные соотношением (1), соответствуют точке на вольт-амперной характеристике лампочки. Эти значения определяют точку пересечения графика функции $I = 5 - \frac{5}{6} U$ (после

подстановки в (1) числовых значений) с вольт-амперной характеристикой лампочки.

Построив график (рис. 130, в), находим $U \approx 4,8$ В; $I \approx 1$ А. Таким образом, мощность, выделяющаяся на лампочке, $P \approx 4,8$ Вт.

Задача 14.17. Нелинейный элемент Z подключен к внешнему источнику тока параллельно с батареей, ЭДС которой 4 В и внутреннее сопротивление 4 кОм (рис. 131, а). Вольт-амперная характеристика такой цепи приведена на рисунке 131, б.

Постройте в том же масштабе вольт-амперную характеристику нелинейного элемента Z . Какова мощность, рассеиваемая нелинейным элементом, при токе от внешнего источника $+0,5$ мкА?

Решение Для нахождения вольт-амперной характеристики нелинейного элемента Z лучше всего в том же масштабе построить вольт-амперную характеристику батареи $\mathcal{E}$ и для одних и тех же напряжений вычитать токи. При токе через внешний источник $I = 0,5$ мкА на нелинейном элементе напряжение равно 1 В и мощность, выделяемая им, равна $P = 0,5$ мкВт. В другом случае (для $U < 0$) ток через Z равен 0 и мощность $P = 0$.

Графики и векторы с успехом используются для вывода формул, важных соотношений между физическими величинами.

Изменение значения и направления скорости при произвольном движении точки наглядно характеризуется с помощью **годографа скорости**. Годограф представляет собой кривую, которую строят так: из какой-нибудь неподвижной точки C проводят векторы, выражающие по величине и направлению скорости движущейся точки в разные моменты времени; геометрическое место концов этих векторов и есть **годограф скорости**. Перемещение конца вектора по **годографу** характеризует изменение скорости движущейся точки.

Для равномерного прямолинейного движения **годограф скорости** представляет собой... точку; для равномерного ускоренного прямолинейного движения **годограф** — прямая линия. Для движения по окружности с постоянной скоростью **годограф скорости** представляет собой окружность радиуса v .

Задача 14.18. Тело движется по окружности радиуса R со скоростью v , модуль которой постоянен.

Определить величину и направление ускорения при этом движении.

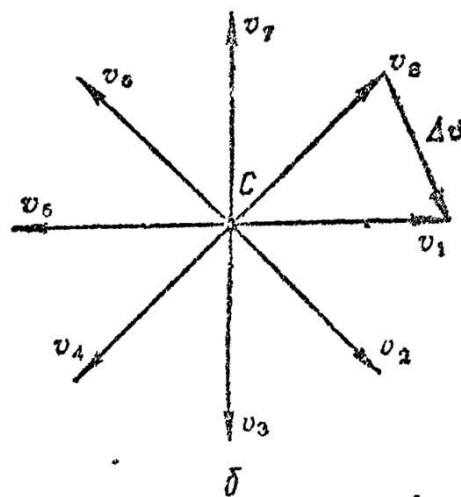
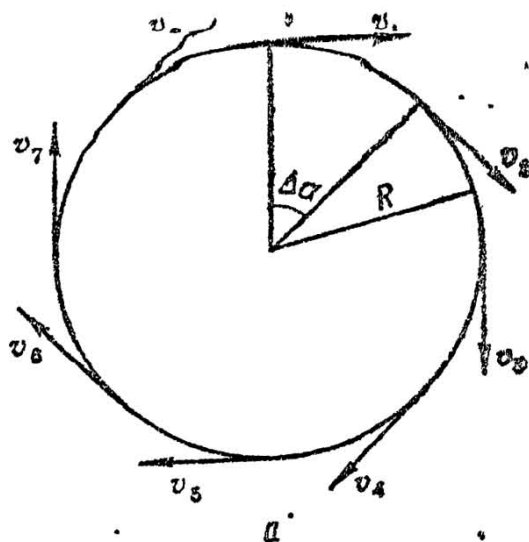


Рис. 132

Решение. Покажем изменение скорости в каждой точке траектории (рис. 132, а), помня, что меняется лишь направление скорости. Построим годограф скорости с центром в точке С (рис. 132, б)

Δv — изменение скорости при повороте на малый угол $\Delta\alpha$. Из годографа видно, что сумма этих изменений за один период равна длине окружности с радиусом v , то есть $\sum_{i=1}^n \Delta v_i = 2\pi v$. Время одного оборота $\Delta t = \frac{2\pi R}{v}$. Так как ускорение — это изменение скорости за время (в нашем случае меняется только направление скорости), то $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v}{\frac{2\pi R}{v}} = \frac{v^2}{R}$.

Это ускорение называют *центростремительным*. Оно показывает изменение скорости только по направлению, если Δv направлена (при $\Delta t \rightarrow 0$) по касательной к траектории. (В этом случае — касательная к окружности перпендикулярна радиусу, коим в построенном годографе является скорость, то есть $a_{\text{цс}}$ перпендикулярно скорости.) На рисунке 132, а перпендикуляр v совпадает с R , значит, $a_{\text{цс}}$ направлено по радиусу к центру.

Задача 14.19. Используя зависимость заряда на конденсаторе от величины подаваемого напряжения, найти изменение энергии конденсатора при изменении напряжения от U_1 до U_2 .

Решение. Из формулы $C = \frac{q}{U}$ следует, что $q = CU$.

Емкость конденсатора C не меняется в процессе его зарядки ($C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$). Заряд конденсатора линейно зависит от подаваемого напряжения. (Рис. 133)

А поскольку при медленной зарядке и в отсутствии активного сопротивления ($R \rightarrow 0$) работа равна изменению потенциальной энергии конденсатора, то заштрихованная площадь на графике, равная разности площадей двух треугольников, равна площади заштрихованной трапеции.

$$\Delta W = q_{2\text{ср}} U_2 - q_{1\text{ср}} U_1,$$

так как заряд линейно меняется $q_{\text{ср}} = \frac{q}{2}$.

$$\Delta W = \frac{q_1 U_2}{2} - \frac{q_1 U_1}{2} = \frac{C}{2} (U_2^2 - U_1^2).$$

В случае, когда $U_1 = 0$, эта формула переходит в $W = \frac{CU_2^2}{2}$, что равносильно переносу новых осей в точку

4. Метод эпюр

Задача 14.20. Определить напряжение, возникающее в каждой связи при растяжении цепочки из разных масс под действием внешней силы F ($m = 1$, кг; $F = 28$ Н) (рис. 134).

Решение. Статическое решение громоздко $a = \frac{F}{\Sigma m}$, где $\Sigma m = m_1 + 3m_1 + m_1 + 4m_1 + 3m_1 + 2m_1$.

Определяем общее ускорение системы связанных тел, а затем поочередно записываем для каждого $T_1 =$

$= m_1 a = 2$ Н; $T_2 = (m_1 + 3m_1) a = 8$ Н; $T_3 = (m_1 + 3m_1 + m_1) a = 10$ Н; $T_4 = (m_1 + 3m_1 + m_1 + 4m_1) a = 18$ Н; $T_5 = (m_1 + 3m_1 + m_1 + 4m_1 + 3m_1) a = 24$ Н.

Задача 14.21. В условии задачи 14.20 сила F приложена под углом 60° к горизонту (рис. 135). Решить задачу.

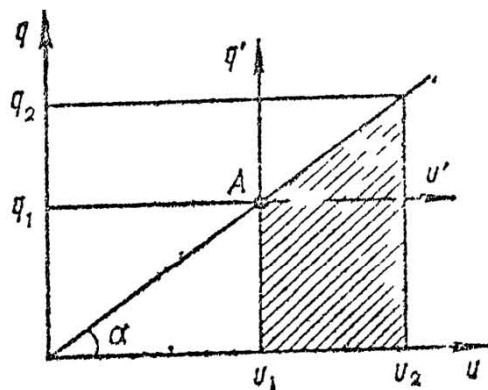


Рис. 133

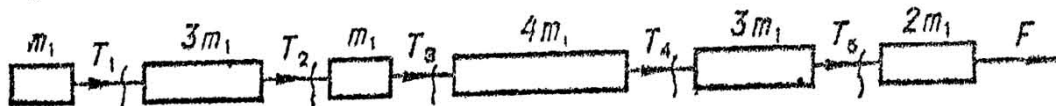


Рис. 134

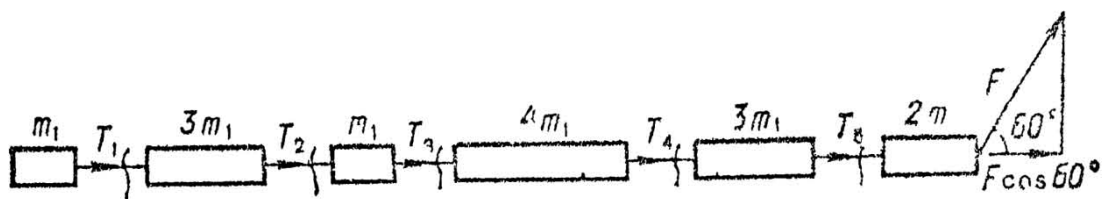


Рис. 135

Решение. В предыдущем решении вместо F записываем $F \cos 60^\circ$.

Задача 14.22. В условии задачи 14.20 учесть коэффициент трения $\mu = 0,1$ (рис. 136, а).

Решение задачи несколько усложняется наличием сил трения.

$$a = \frac{F - \mu g (m_1 + 3m_1 + m_1 + 4m_1 + 3m_1 + 2m_1)}{\Sigma m}$$

аналогично $T_1 = (\mu g + a) m_1$; $T_2 = (\mu g + a) (m_1 + 3m_1)$ и т. д.

Покажем простое графическое решение этой задачи методом построения эпюр.

Отложим вдоль луча x (рис. 136, б) отрезки, пропорциональные массам тел. Из конца этой цепочки восстановим перпендикуляр, отложим на нем величину вектора внешней силы F и соединим точки A и C

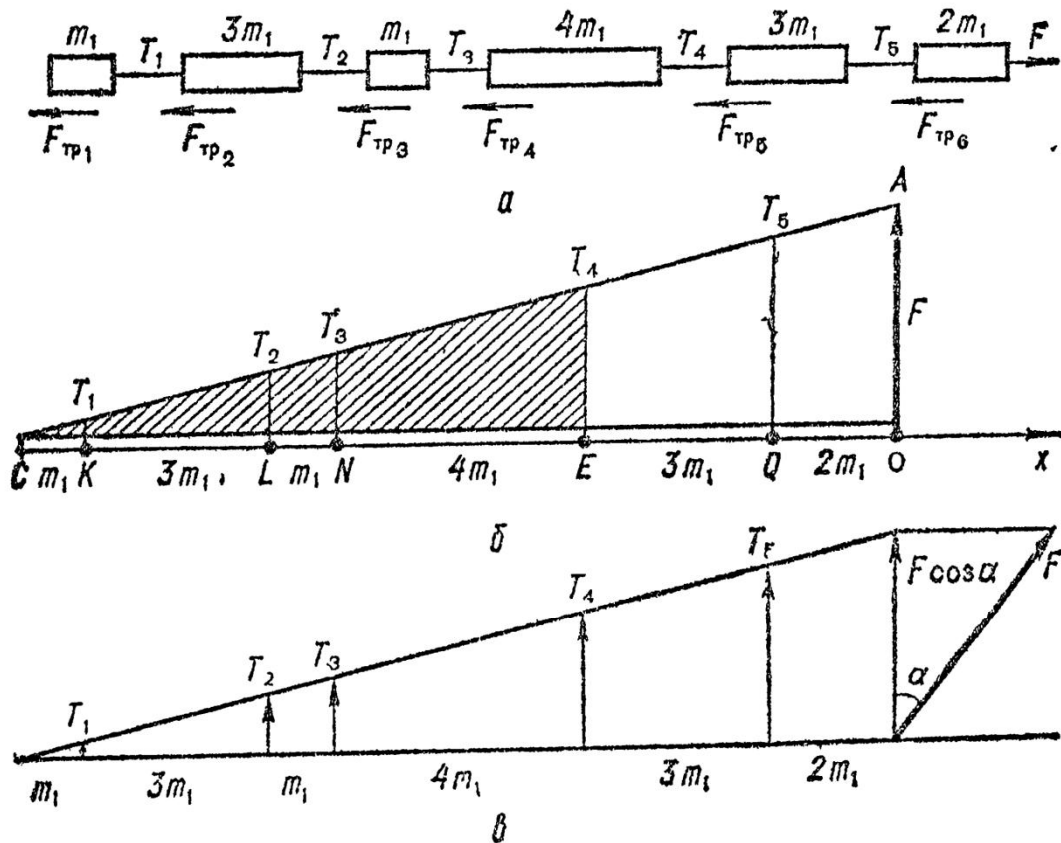


Рис. 136

Восстановим перпендикуляры из точек K, L, N, E, Q до пересечения с прямой CA . Величина этих перпендикуляров соответствует значению натяжений связей. Проверим это. Например, для определения T_4 :

$$\frac{T_4}{m_1 + 3m_1 + m_1 + 4m_1} = \frac{F}{\Sigma m} ; \quad T_4 = 18 \text{ Н},$$

что соответствует ответу задачи.

Понятно, что по мере удаления от места приложения силы ее воздействие (то есть натяжение, вызванное этой силой) ослабевает и, как видно из аналогичного решения задачи 14.21, при действии силы F под углом α вертикально откладывается не значение F , а значение $F \cos \alpha$, ибо именно эта проекция силы вызывает натяжение связей (рис. 136, в).

С учетом силы трения элюра натяжений^{II} строится так же, ибо наличие этой силы, пропорциональной массам тел, не меняет даже распределения между телами приложенной внешней силы.

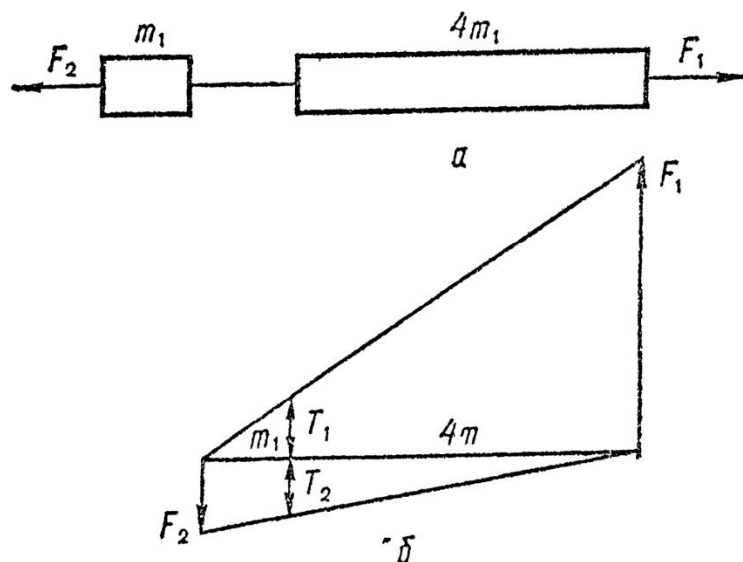


Рис. 137

Задача 14.23. На два бруска массой m_1 и $4m_1$, действуют силы $F_1 = 20$ Н и $F_2 = 5$ Н (рис. 137, а). Найти натяжение нити, связывающей тела.

Решение. Из рисунка 137, б запишем:

$$T_1 = \frac{F_1}{5}; \quad T_2 = \frac{4}{5} F_2;$$

$$T = T_1 + T_2 = 8 \text{ Н.}$$

5. Метод развертки

Задача 14.24. Определить поле видимости зеркального перископа и рабочие размеры нижнего зеркала (рис. 138, а).

Решение. Сделаем развертку по ходу луча (рис. 138, б). Из геометрии следует, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2(a+b)}$.

Поле видимости, определяемое максимально возможным углом зрения $\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{d}{2(a+b)}$.

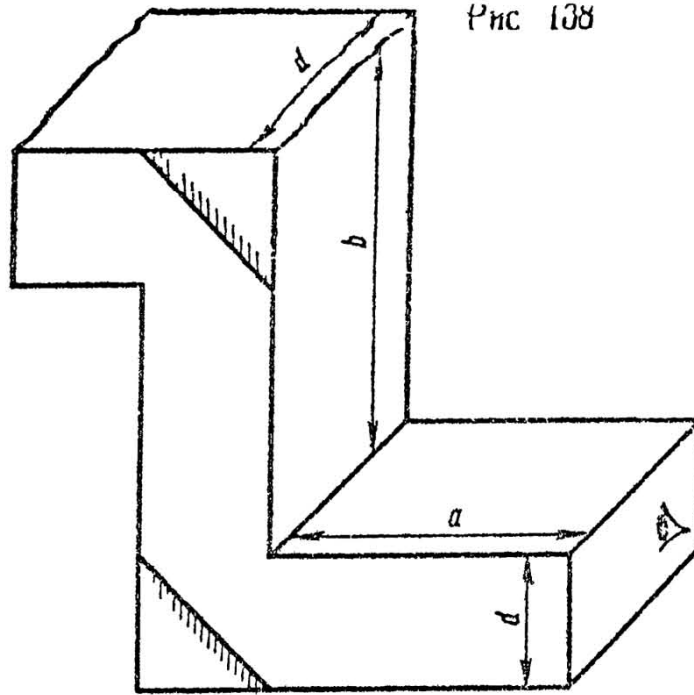
Из подобия треугольников рабочие размеры нижнего зеркала

$$\frac{h}{2a} = \frac{d}{2(a+b)}; \quad h = \frac{da}{a+b}; \quad S = \frac{d^2 a^2}{(a+b)^2};$$

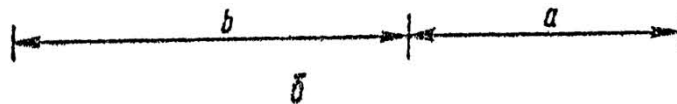
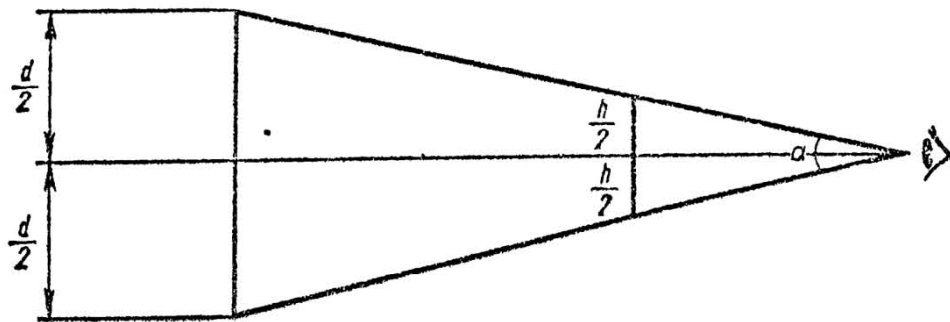
S — полезная площадь нижнего зеркала.

Задача 14.25. По спирали радиуса r при шаге h без трения начинает скользить продетая на нее бусинка.

Рис 138



a



Определить время спуска, скорость и ускорение в нижней точке после прохождения N витков (рис 139, а).

Решение Представим развертку винтовой линии в виде наклонной плоскости с размерами, указанными на рисунке 139, б.

Из закона сохранения энергии определяется конечная скорость $\frac{mv^*}{2} = mgNh$; $v = \sqrt{2Ngh}$.

Из уравнения динамики $mg \sin \alpha = ma$ определим касательное ускорение

$$a_t = g \sin \alpha = g \frac{h}{2\pi r};$$

$$a_n = \frac{v^*}{r} = \frac{2Ngh}{r}.$$

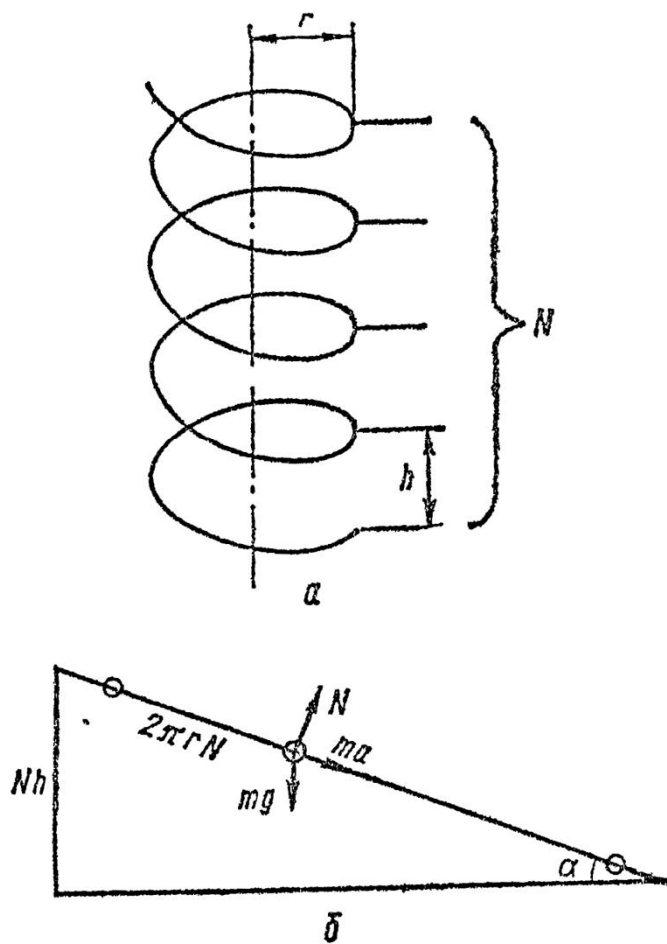


Рис. 139

Полное ускорение после прохождения N витков:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_r^2} = \frac{gh}{r} \sqrt{4N^2 + \frac{1}{4\pi^2}}.$$

Заметим, что время спуска определяется только величинами $2\pi rN$ и $a = g \sin \alpha$, где $\sin \alpha = \frac{h}{2\pi r}$. Таким образом,

$$t = \sqrt{\frac{8\pi^2 r N}{gh}}.$$

Задача 14.26. Небольшой мяч бросили между двумя гладкими параллельными стенками со скоростью $v_0 = 8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Горизонтальная составляющая скорости мяча перпендикулярна стенкам. Сколько раз мяч ударится о стенки до того, как вернется на прежнюю высоту h ? Расстояние между стенками $l = 1$ м, удары абсолютно упругие (рис. 140, а).

Решение. Траектория мяча после удара — это зеркальное отражение траектории при отсутствии удара.

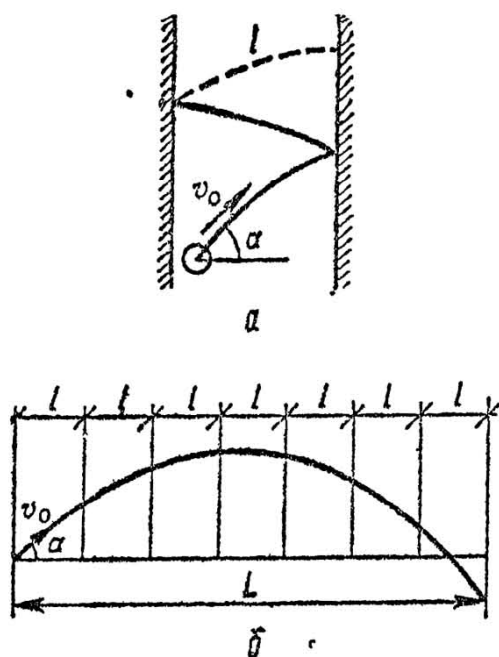


Рис. 140

Решение. Если бы не было стенок, то траектория имела бы вид обычной параболы (рис. 141, б). Общая дальность полета 20 м. Горизонтальная скорость не меняется, следовательно, общее время полета относится ко времени полета после удара, как $20 : 5 = t_{\text{полета}} : 0,5 \text{ с}$, $t_{\text{полета}} = 2 \text{ с}$. Но время подъема равно времени спуска и составляет 1 с. Значит, вертикальная составляющая начальной (и конечной) скорости опускания $v = v_0 \sin \alpha = gt$.

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } \sin \alpha &= \frac{gt}{v_0} = \\ &= \frac{1}{2}; \alpha = 30^\circ \text{ — начальный угол бросания. Максимальная высота } h_{\text{max}} = \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 5 \text{ м.} \end{aligned}$$

Задача 14.28. От точечного источника света (рис. 142, а) (I — сила света) лучи падают на экран: одни сразу, другие после одного, двух, трех и т. д. отражений от зеркала цилиндрической поверхности радиуса R . Высота цилиндра L .

Определить, как относятся световые потоки лучей,

«Развернем» траекторию (рис. 140, б). Дальность полета $L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 6 \text{ м}$.

На пути мяча «стоит» 6 стенок. Он ударится 6 раз.

Задача 14.27. Мяч, брошенный под углом к горизонту, ударившись о стенку, удаленную от игрока на 15 м, через 0,5 с после удара упал в 5 м от стенки (рис. 141, а). Начальная скорость мяча 20 м/с. Определить время полета, максимальную высоту броска, угол бросания.

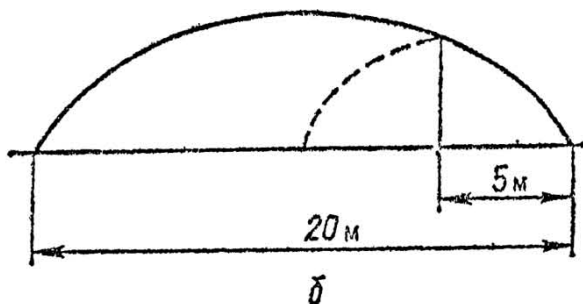
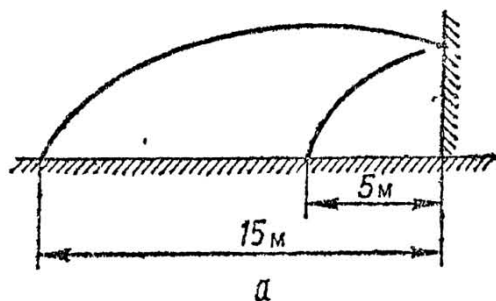


Рис. 141

которые сразу попадают на экран, к потокам лучей, которые падают на него после одного, двух, трех и т. д. отражений от зеркал.

Решение. Световой поток $\Phi = I \Omega$, где Ω — телесный угол, внутри которого он распространяется. $\Omega = \frac{S}{L^2}$; S — площадь сферической поверхности, которая заключена внутри телесного угла, L^2 — квадрат расстояния до поверхности из центра сферы.

Выпрямим отраженные от зеркал лучи, сделаем развертку хода лучей. Получим картинку, изображенную на рисунке 142, б. Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3 \dots &= I \Omega_1 : I \Omega_2 : I \Omega_3 \dots = \\ &= \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3 \dots = 1 : 9 : 25 \dots \end{aligned}$$

6. Метод векторных диаграмм

Метод векторных диаграмм основан на понимании аналогии колебательного движения и равномерного движения точки по окружности, координата которой x определяется из уравнения, идентичного уравнению колебательного движения: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$. Для движения по окружности A — радиус точки, ω — угловая скорость, φ — начальный угол, а для колебательного движения соответственно амплитуда, циклическая частота, фаза. Мгновенное положение точки на окружности можно задать ее радиус-вектором, а само движение точки описать движением радиус-вектора с угловой скоростью ω против часовой стрелки (принятое направление движения).

Задача 14.29. В схеме, изображенной на рисунке 143, а, активное сопротивление отсутствует. Найти реак-

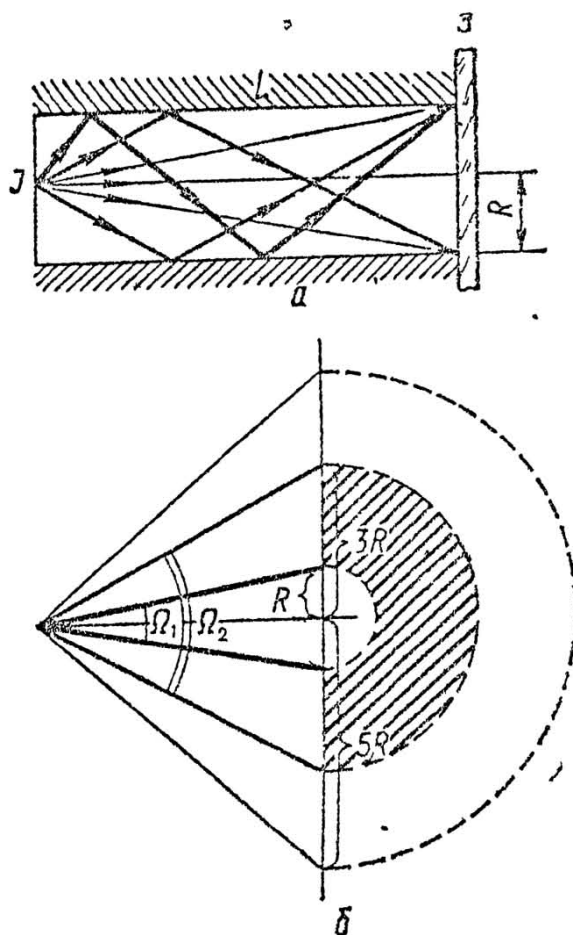


Рис. 142

тивное сопротивление X_L и разность фаз между током и напряжением.

Решение. Пусть ток в цепи изменяется по закону $i = I_0 \cos(\omega t + \Delta\varphi)$, где $I_0 = \frac{U_0}{X_L}$ — по закону Ома и $\Delta\varphi$ —

искомая разность фаз.

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{di}{dt} = -LI_0\omega \sin(\omega t + \Delta\varphi) \text{ — по закону электромагнитной индукции.}$$

Из II закона Кирхгофа $U + \mathcal{E}_i = 0$, поэтому

$$U_0 \cos \omega t = -LI_0\omega \sin(\omega t + \Delta\varphi).$$

Полученное выражение справедливо для любого момента времени, и, следовательно, $\cos \omega t = -\sin(\omega t + \Delta\varphi)$, откуда $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$. $X_L =$

$= \frac{U_0}{I_0} = \omega L$ — реактивное сопротивление катушки, называемое *индуктивным*.

Огставание тока от напряжения на индуктивном сопротивлении качественно и количественно описываются законом электромагнитной индукции, а наглядно изображаются с помощью векторной диаграммы взаимно перпендикулярных векторов тока и напряжения с учетом их амплитудных значений и разности фаз на основе направления вращения этой системы векторов (рис. 143, б).

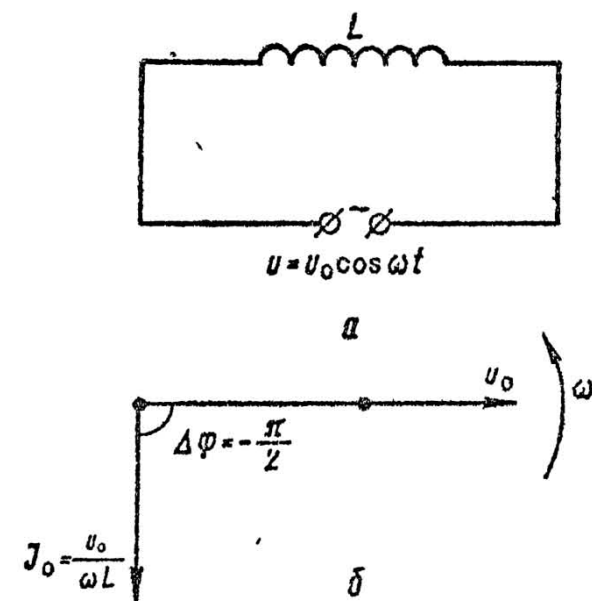


Рис. 143

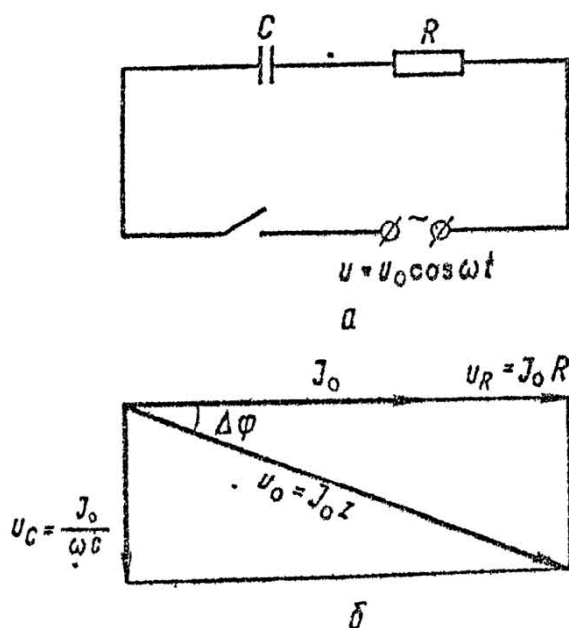


Рис. 144

Задача 14.30. В условии предыдущей задачи вместо катушки подключен конденсатор емкостью C . Убедиться самостоятельно, что $X_C = \frac{1}{\omega C}$ и $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Для подтверждения преимуществ векторных диаграмм рассмотрим следующую задачу.

Задача 14.31. В цепи, изображенной на рисунке 144, а, необходимо найти полное сопротивление цепи Z и разность фаз $\Delta\varphi$.

Решение. Пусть ток $i = I_0 \cos(\omega t + \Delta\varphi)$, тогда $q = \int i dt = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \Delta\varphi)$. Напряжение при последовательном соединении конденсатора и резистора $U = \frac{q}{C} + iR$ или

$$\begin{aligned} U_0 \cos \omega t &= \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \Delta\varphi) + I_0 R \cos(\omega t + \Delta\varphi) = \\ &= \sqrt{\frac{I_0^2}{\omega^2 C^2} + I_0^2 R^2} \left(\frac{I_0 \sin(\omega t + \Delta\varphi)}{\omega C \sqrt{\frac{I_0^2}{\omega^2 C^2} + I_0^2 R^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_0 R \cos(\omega t + \Delta\varphi)}{\sqrt{\frac{I_0^2}{\omega^2 C^2} + I_0^2 R^2}} \right) = \\ &= I_0 \sqrt{\frac{1}{(\omega C)^2} + R^2} (\sin(\omega t + \Delta\varphi) \sin \alpha + \\ &\quad + \cos(\omega t + \Delta\varphi) \cos \alpha), \end{aligned}$$

$$\text{где } \sin \alpha = \frac{1}{\omega C \sqrt{\frac{1}{(\omega C)^2} + R^2}} \text{ и } \cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{\frac{1}{(\omega C)^2} + R^2}},$$

$$\text{или } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\omega C R}.$$

Напомним, что $\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta)$.

Поэтому

$$\begin{aligned} U_0 \cos \omega t &= I_0 \sqrt{\frac{1}{(\omega C)^2} + R^2} \times \\ &\times \cos \left[\omega t - \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\omega C R} - \Delta\varphi \right) \right]. \end{aligned}$$

Из последнего выражения

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{1}{(\omega C)^2} + R^2} \text{ и } \Delta\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega C R}.$$

Рассмотрим далее решение данной задачи методом векторных диаграмм. В качестве горизонтальной оси выберем вектор тока, поскольку при последовательном

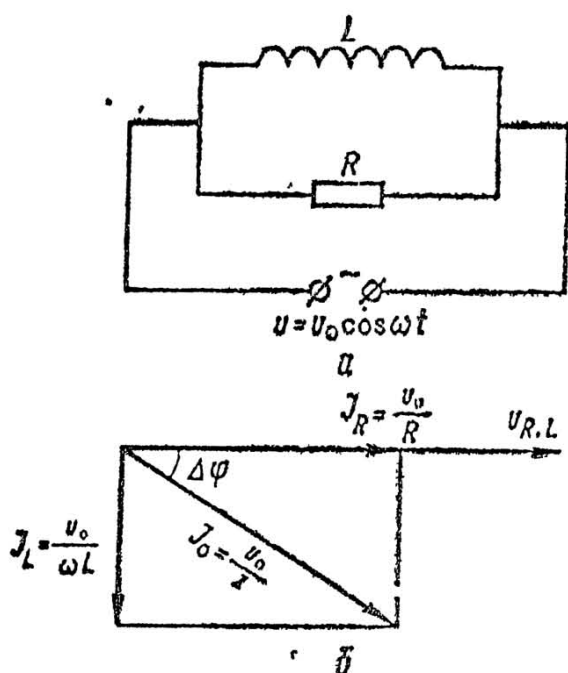


Рис. 145

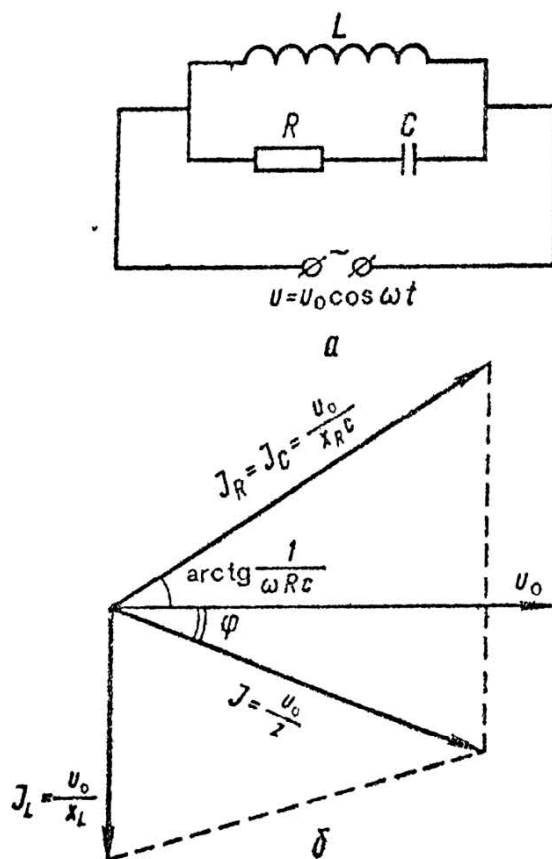


Рис. 146

соединении ток через R и C одинаков. Напряжение на R совпадает по фазе с током, поэтому векторы U_R и I сонаправлены. U_C отстает от тока на $\frac{\pi}{2}$ (см. задачу 14.30).

Суммарное же напряжение найдем по правилу сложения векторов (рис. 144, б), после чего ответы, полученные выше, становятся очевидными.

Задача 14.32. Найти полное сопротивление и разность фаз для цепи, изображенной на рисунке 145, а.

Решение. В отличие от предыдущей задачи в этой напряжением на R и L одинаково. Векторная диаграмма приведена на рисунке 145, б, откуда $Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}}}$ и $\Delta\varphi = \arctg \frac{R}{\omega L}$.

Задача 14.33. Найти полное сопротивление и разность фаз (рис 146, а).

Решение. Векторная диаграмма показана на рисунке 146, б.

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\omega L)^2} + (\omega C)^2 + 2 \frac{C}{L} \sin \left(\arctg \frac{1}{\omega RC} \right)}};$$

$$\Delta\varphi = \arccos \frac{Z}{Z_{R,C}},$$

где $Z_{R,C}$ известно (см. задачу 14.31).

Из школьного курса физики известно, как можно графически решать различные задачи геометрической оптики. Например, чтобы найти положение изображения точечного источника света в тонкой линзе, достаточно построить ход двух произвольных лучей, вышедших из него и прошедших через линзу.

Рассмотрим еще один, несколько необычный графический способ решения подобных задач. При этом на предлагаемых вам рисунках вы не увидите ни световых лучей, ни оптических осей линзы, ни даже самой линзы. О каких же тогда графиках пойдет речь?

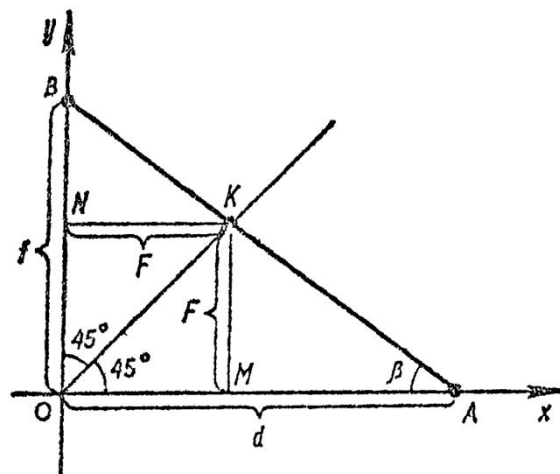
В математике существует специальный раздел, называемый *номографией* (от греческих слов «*номос*» — закон и «*графо*» — пишу), в котором изучаются методы построения особых чертежей *номограмм*. С их помощью можно, например, не производя вычислений, получать приближенные решения уравнений или находить приближенные значения интересующих нас функций. Воспользуемся и мы такой возможностью.

Пусть светящийся предмет находится на расстоянии d от линзы с фокусным расстоянием F , а его изображение — на расстоянии f от нее. Можно показать, что эти три величины связаны простым соотношением — формулой тонкой линзы: $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$.

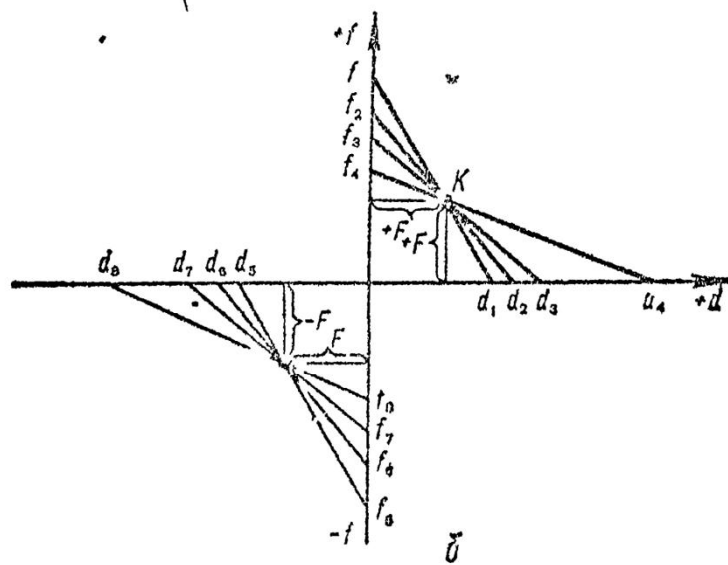
Заметим, что каждое слагаемое, входящее в формулу, может быть как положительным, так и отрицательным. Если предмет, или его изображение, или фокус линзы действительные, величины d , f , F берутся со знаком «плюс», если же — мнимые, то соответствующие величины считаются отрицательными.

Построим номограмму для формулы линзы и покажем, как с ее помощью можно решать конкретные задачи.

Изобразим на плоскости прямоугольную систему координат xOy (рис. 147, а). По оси x отложим отрезок OA длиной d , а по оси y — отрезок OB длиной f , считая для определенности d и f положительными. Соединим точки A и B отрезком прямой, проведем биссектрису прямого угла AOB и найдем точку K ее пересечения с AB . Из точки K опустим на оси координат перпендикуляры, обозначив длину полученных равных отрезков KM и KN через F . Из подобия треугольников AOB и AMK следует,



a



б

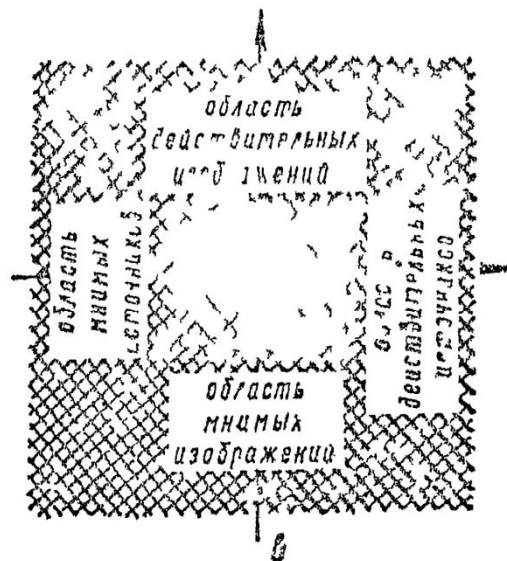


Рис. 147

что $\frac{OB}{OA} = \frac{KM}{MA}$, или $\frac{f}{d} = \frac{f}{d-f}$, откуда легко получается знакомое нам уравнение.

Таким образом, длины d , f и F построенных на чертеже отрезков связаны между собой уравнением тонкой линзы (вот почему при построении мы использовали именно такие обозначения длин отрезков), а это означает, что мы умеем строить номограмму для формулы линзы. Действительно, если по горизонтальной оси прямоугольной системы координат откладывать расстояния от предмета до линзы, а по вертикальной — расстояния от линзы до изображения, то все прямые, соединяющие концы соответствующих отрезков, пересекаются в одной точке (рис 147, б). Проекция этой точки на оси координат одинаковы и равны фокусному расстоянию F данной линзы.

Для определения прямой на плоскости достаточно знать всего две принадлежащие ей точки. Поэтому с помощью построенной номограммы по известным двум из трех величин d , f и F всегда можно графически определить недостающую третью. Так, например, при построении, приведенном на рисунке 147, а, мы фактически определили фокусное расстояние линзы (F) по известным расстояниям от линзы до предмета (d) и от линзы до изображения (f).

Легко убедиться в том, что предложенный способ годится не только для собирающих линз, но и для рассеивающих, а также для любых расположений предмета и изображения относительно линзы. Если, например, предмет или изображение мнимые, то соответствующие значения d или f отрицательны и, следовательно, их надо откладывать в отрицательном направлении от начала координат (влево или вниз). Может случиться, что точка пересечения всех отрезков K , соответствующая фокусу линзы, имеет отрицательные проекции. Это означает, что фокус линзы — мнимый, то есть линза — рассеивающая. Области расположения действительных и мнимых предметов и изображений показаны на рисунке 147, в.

Номограммы можно использовать и для определения линейного увеличения линзы — отношения линейного размера H изображения к линейному размеру h предмета: $\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}$. Из рисунка 147, а видно, что $\Gamma = \operatorname{tg} \beta$.

Таким образом, изображение может быть увеличенным, уменьшенным или такого же размера, как и сам предмет.

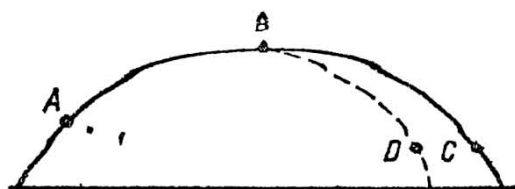


Рис. 148

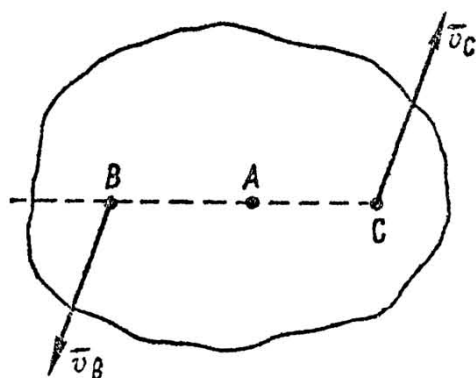


Рис. 149

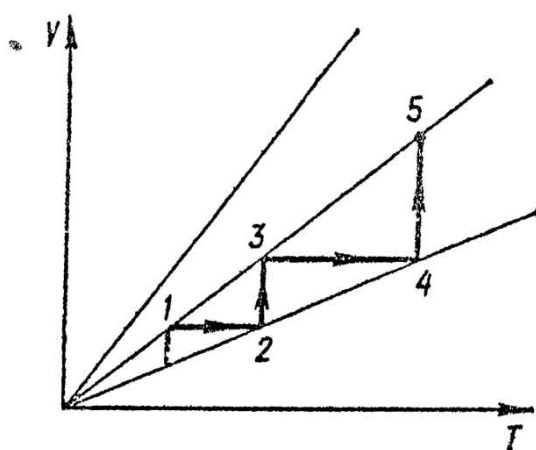


Рис. 150

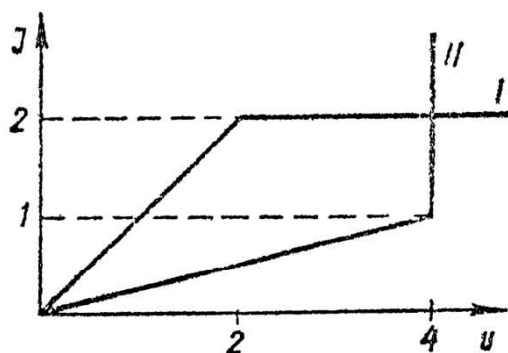


Рис. 151

ке 151. Начертить вольт-амперную характеристику участка цепи, состоящего из этих двух элементов. Рассмотреть случай последовательного и параллельного соединений.

Можно решить и обратную задачу — по заданному увеличению и известному фокусному расстоянию линзы определить расстояния d и f . Для этого достаточно построить знакомую нам точку K и провести через нее прямую, наклоненную к горизонтальной оси под углом β . Точки пересечения этой прямой с осями координат и дадут нам искомые значения d и f .

Задачи для самостоятельного решения

14.35. Определить графически вектор ускорения в ряде точек на траектории тела, брошенного под углом к горизонту: а) с учетом и б) без учета силы сопротивления воздуха (рис. 148).

14.36. Определить графически скорость точки A абсолютно твердого тела, если скорости точек B и C указаны (рис. 149).

14.37. Осью точкая металлическая пластина в виде равнобедренного треугольника с двух сторон обогревается паром при $t = 100^\circ\text{C}$, а с одной стороны погружена в лед при 0°C . Определить установившуюся температуру в центре треугольника.

14.38. На рисунке 150 показан процесс изменения состояния одного моля идеального газа в осях VT . Изобразить этот процесс в осях PT и PV .

14.39. Имеются два элемента с нелинейными вольт-амперными характеристиками, не являющиеся источниками тока. Характеристики даны на рисунке 151.

