$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 8327\ldots$

# ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

$C = 2\pi R$

$S = \pi R^2$

$C = \pi D$

$S = \pi \frac{D^2}{4}$

$\pi \approx 3{,}14$

$\pi \approx 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$

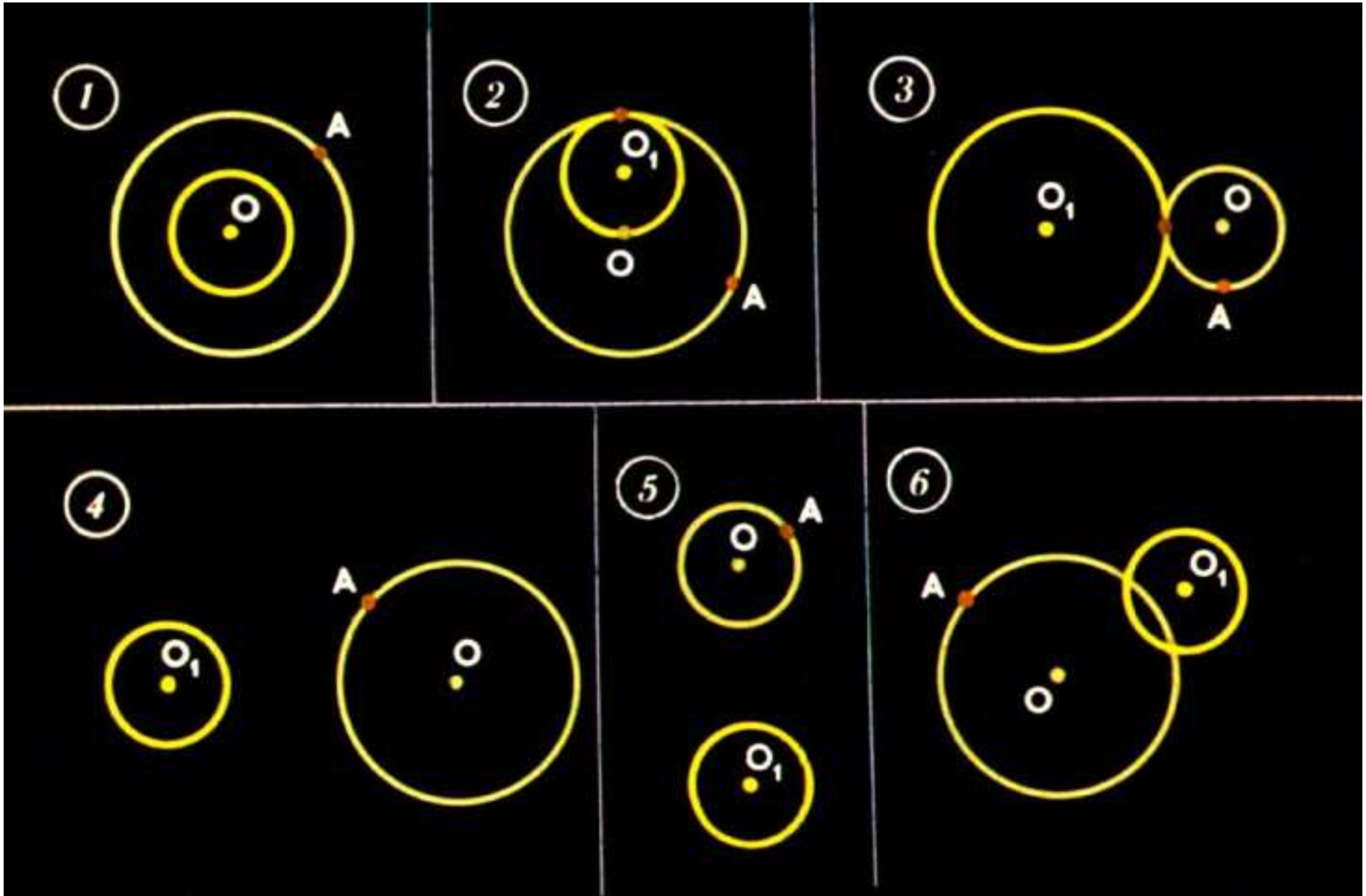
$\pi \approx \frac{355}{113}$

**Диафильм по геометрии для 8 класса**

## ФРАГМЕНТ I

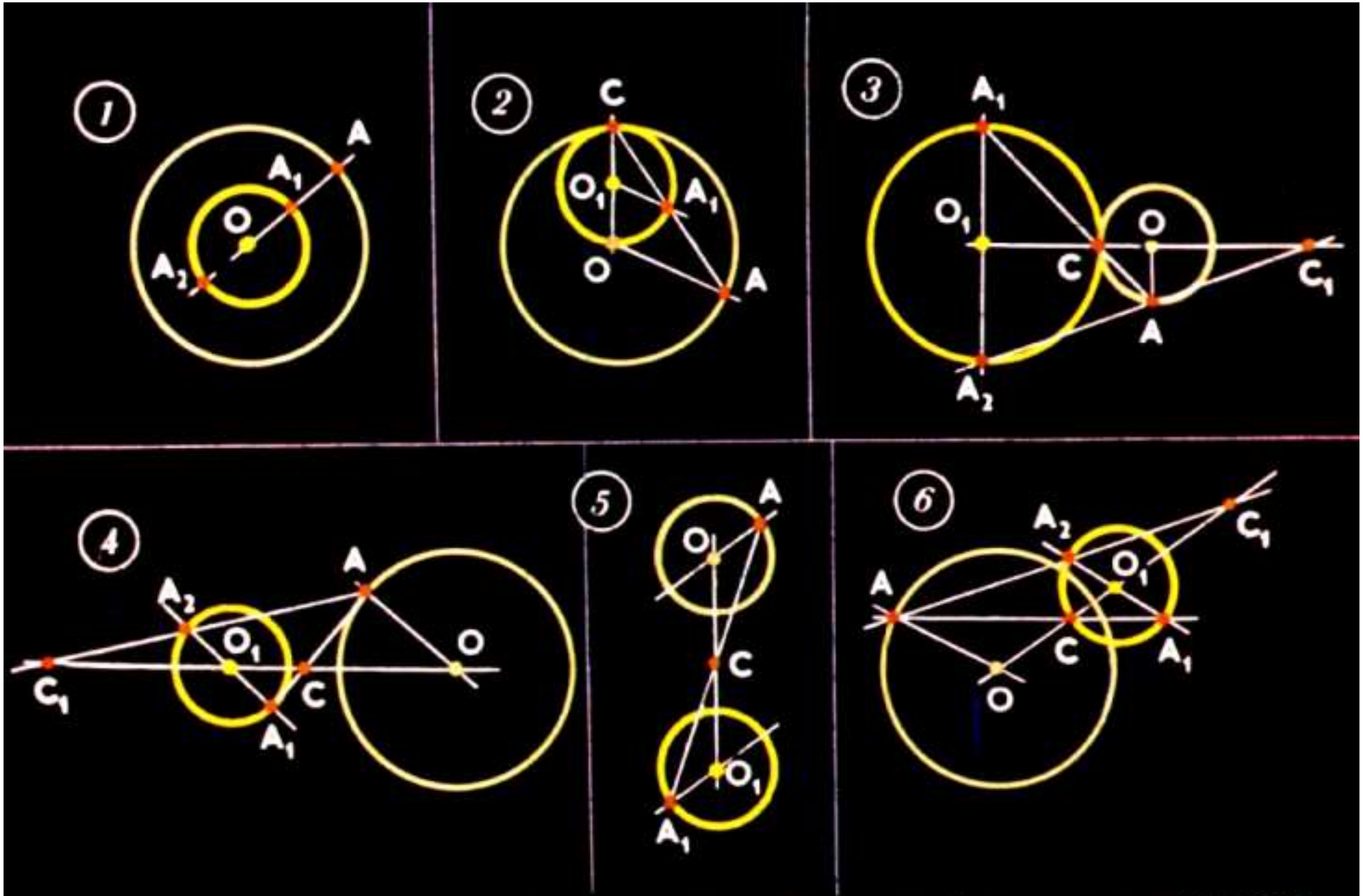
# ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

Длина [AB] есть |AB|
A
B
Длина ломаной ABC... YZ
есть |AB| + |BC| + ... + |YZ|.
A
B
C
Y
Z
Длина
окружности
Строгое определение
длины окружности
связано с понятием
*предела*
числовой последовательности.
3



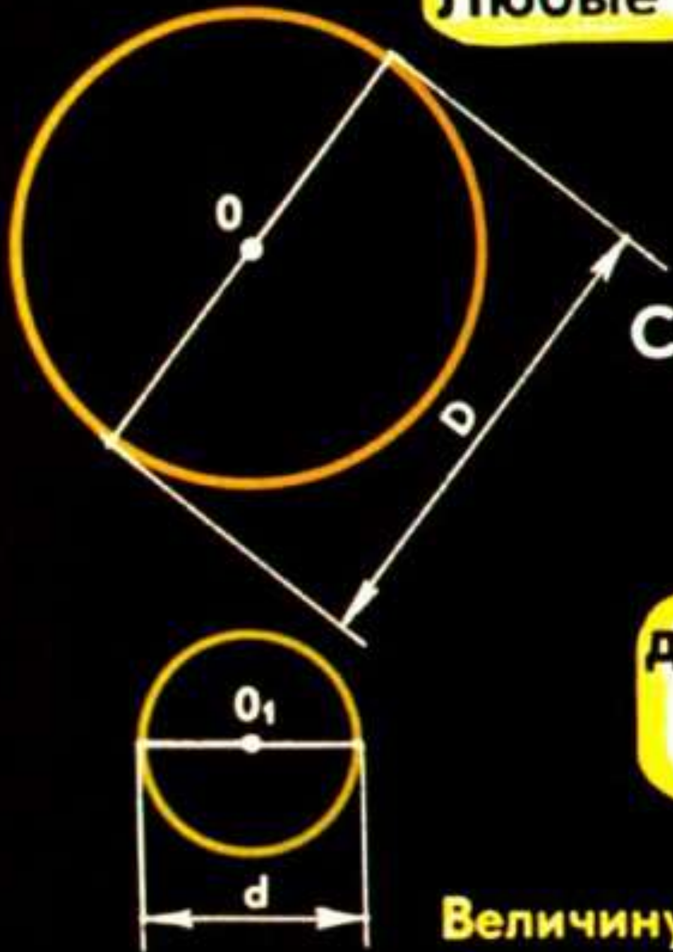

*Как найти центр, коэффициент гомотетии и образ точки A в каждом из этих случаев?*

4




***Можно ли утверждать, что всякие две окружности подобны?***

**Любые две окружности подобны.**




Поэтому $\frac{C}{c}=\frac{D}{d}$,

где

C, c — длины окружностей,

D, d — их диаметры.

Таким образом,

**для любых окружностей**

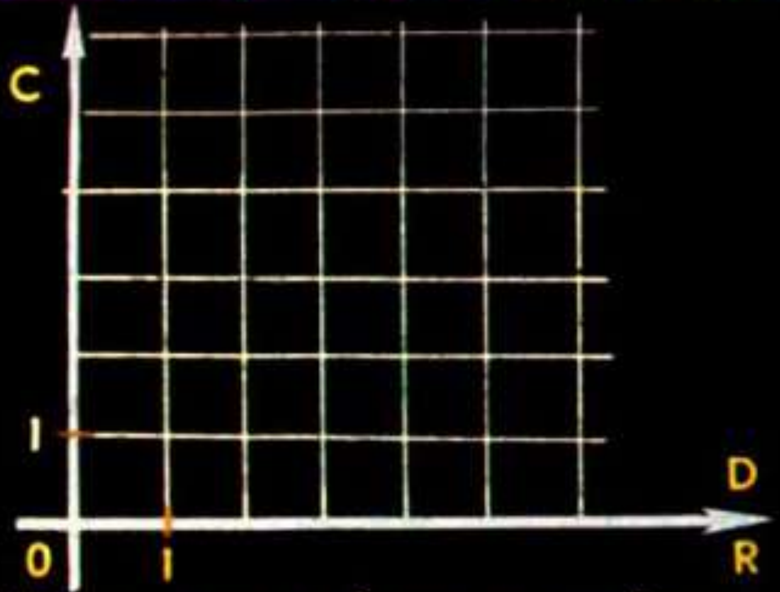
$$\frac{C}{D}=\frac{c}{d}.$$

Величину этого отношения обозначают греческой буквой $\pi$.

*Выразите длину окружности через* D; R.

## *Заполните таблицу*

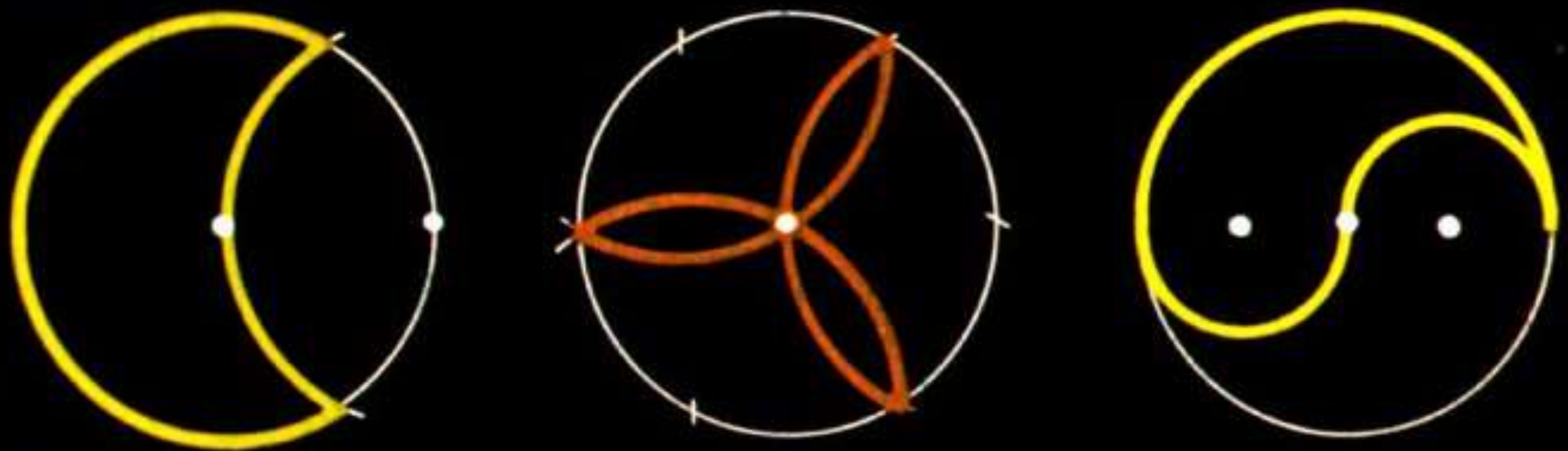
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | | 21 | | 50 | | | | |
| D | 20 | | 21 | | 50 | | | |
| C | | | | | | 628 | 10 | |



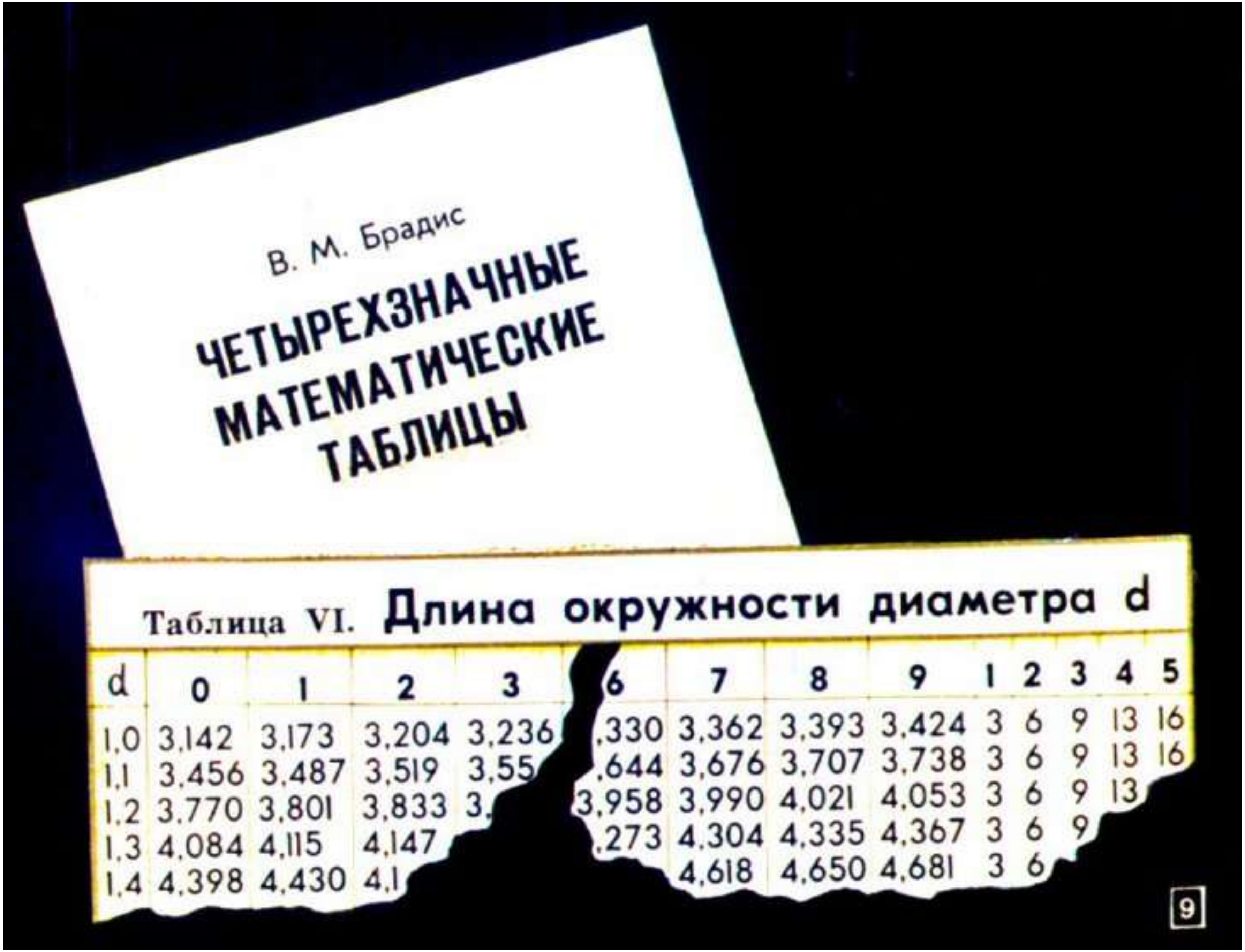


*Как выглядят графики функций* $C=\pi D$, $C=2\pi R$?

*Вычислите длины цветных линий, если*



R = 14 см,  R = 15 мм,  R = 10 м.



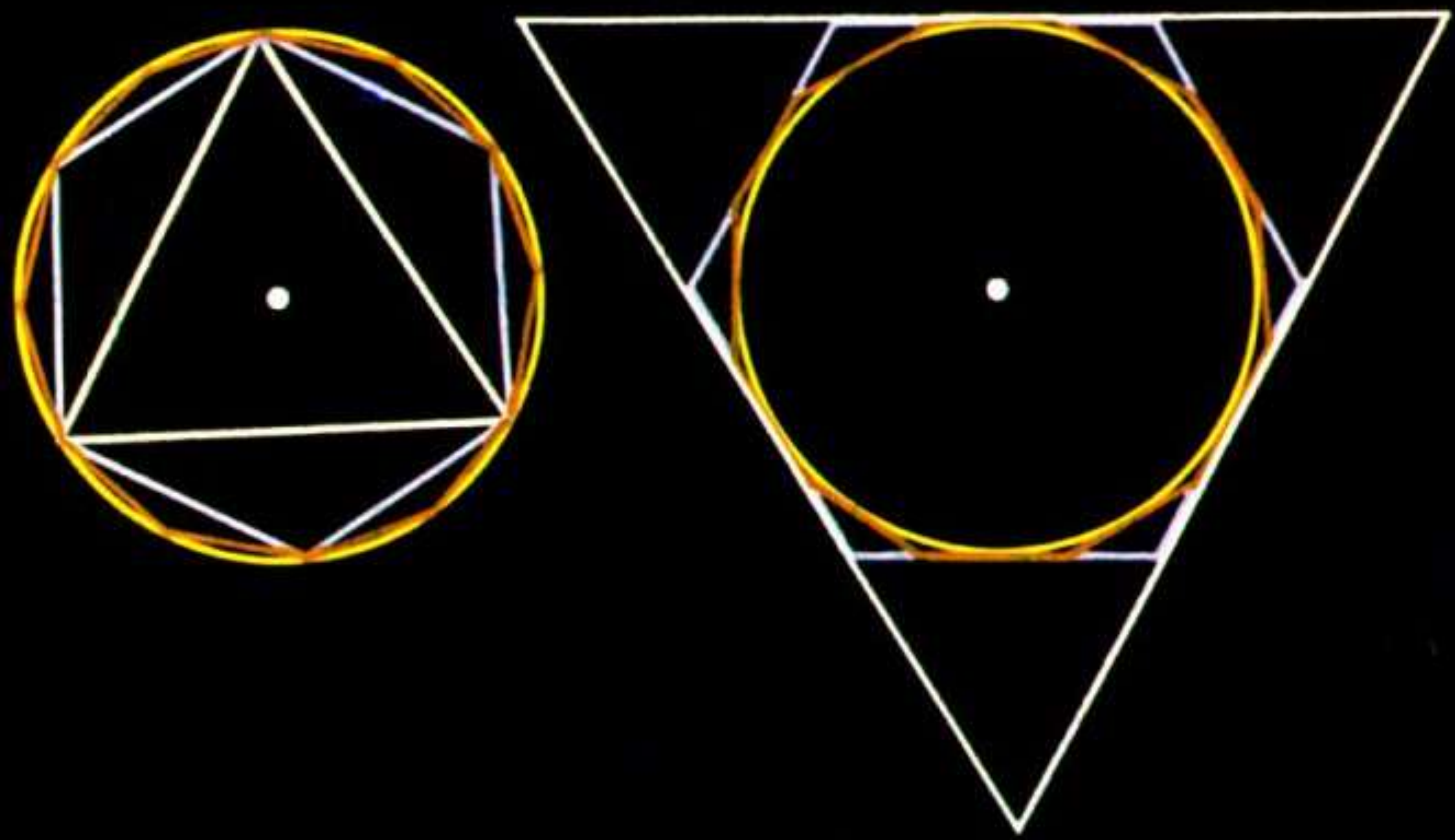

| d | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 3,142 | 3,173 | 3,204 | 3,236 | ,330 | 3,362 | 3,393 | 3,424 | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 |
| 1,1 | 3,456 | 3,487 | 3,519 | 3,55 | ,644 | 3,676 | 3,707 | 3,738 | 3 | 6 | 9 | 13 | 16 |
| 1,2 | 3,770 | 3,801 | 3,833 | 3, | 3,958 | 3,990 | 4,021 | 4,053 | 3 | 6 | 9 | 13 | |
| 1,3 | 4,084 | 4,115 | 4,147 | | ,273 | 4,304 | 4,335 | 4,367 | 3 | 6 | 9 | | |
| 1,4 | 4,398 | 4,430 | 4,1 | | | 4,618 | 4,650 | 4,681 | 3 | 6 | | | |

**Вычисление значения числа $\pi$ основано на допущении:**


длина окружности ($C$)
больше
периметра любого вписанного
в нее многоугольника ($p_n$)
и меньше
периметра любого описанного
многоугольника ($q_n$)

$$p_n < C < q_n.$$


*Используя чертежи, объясните, почему* $\pi \in \,]3;4[$.



Удваивая число сторон правильного многоугольника, можно получить многоугольник, как угодно плотно примыкающий к окружности.

*Архимед*
*287—212 г. до н. э.*

Древнегреческий математик Архимед, рассматривая правильные вписанный и описанный 96-угольники, установил, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$; $\frac{22}{7}$ называют архимедовым приближением $\pi$.


Используя метод Архимеда, можно вычислить π с любой точностью.
В 1596 г. Лудольф ван Кёлен из Дельфта, начав с квадрата и дойдя до 32 512 254 720-угольника, получил 35 знаков π.
В 1961 г. машина ИБМ—7090 за 8 ч. 43 мин. вычислила 100 625 десятичных знаков π.
π =
= 3,14159
26535
89793
23846
26433 83279
50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 ...
13

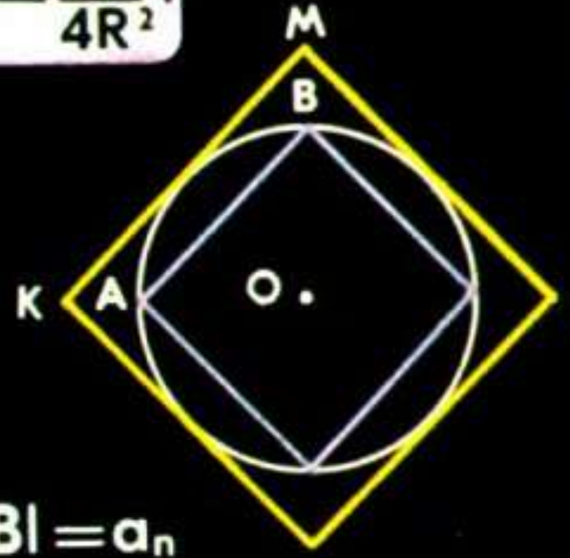
Для вычисления периметров вписанных и описанных многоугольников используют формулы:

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}};$$

$$b_n=a_n:\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4R^2}}.$$


$|AB|=a_n$

$|AC|=a_{2n}$

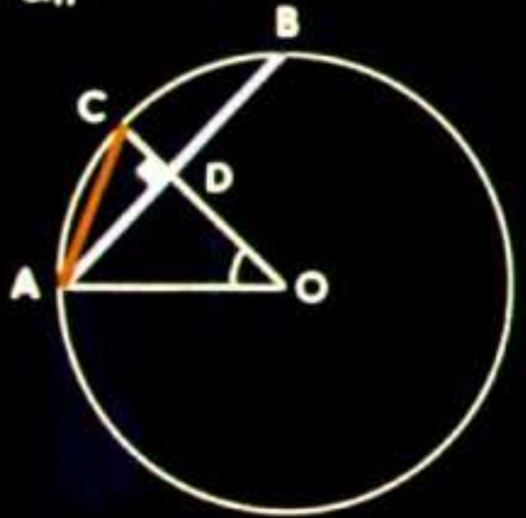



$|AB|=a_n$

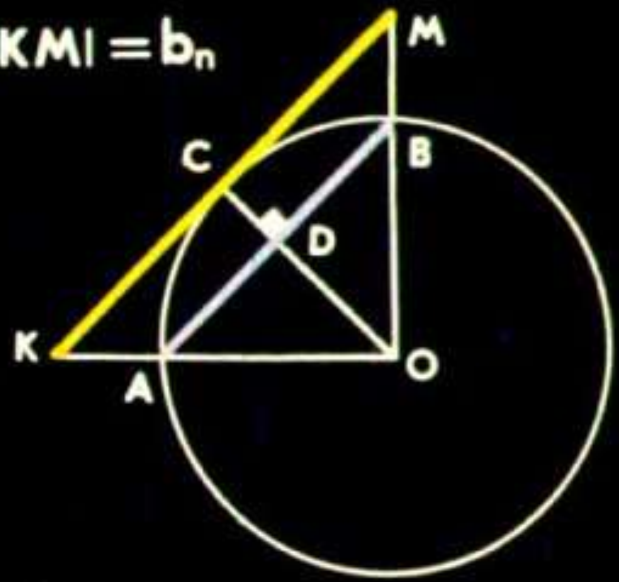
$|KM|=b_n$

***Какой вид примут эти формулы при*** $D=1$?

$|AB| = a_n$




$|KM| = b_n$




$$|AC|^2 = a_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos \widehat{AOC}$$

$$R \cdot \cos \widehat{AOC} = |OD|$$

$$|OD| = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$$

отсюда

$$\boxed{a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}}$$

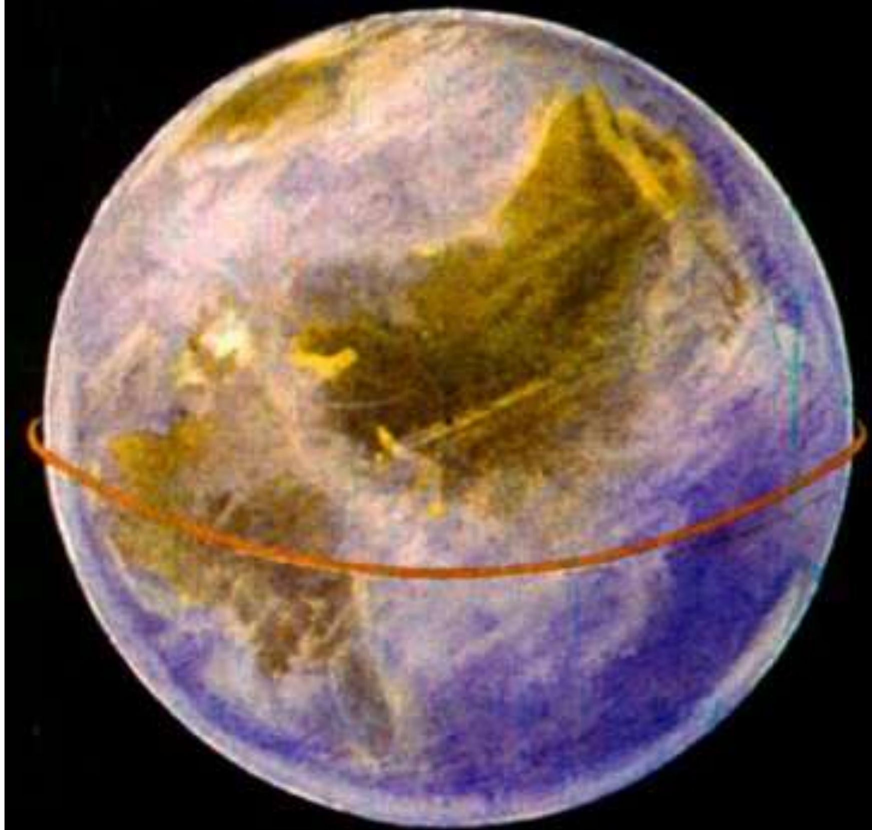
$$\frac{b_n}{2} : \frac{a_n}{2} = R : |OD|$$

$$|OD| = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$$

отсюда

$$\boxed{b_n = a_n : \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4R^2}}}$$

***На основании каких теорем получены эти равенства?***

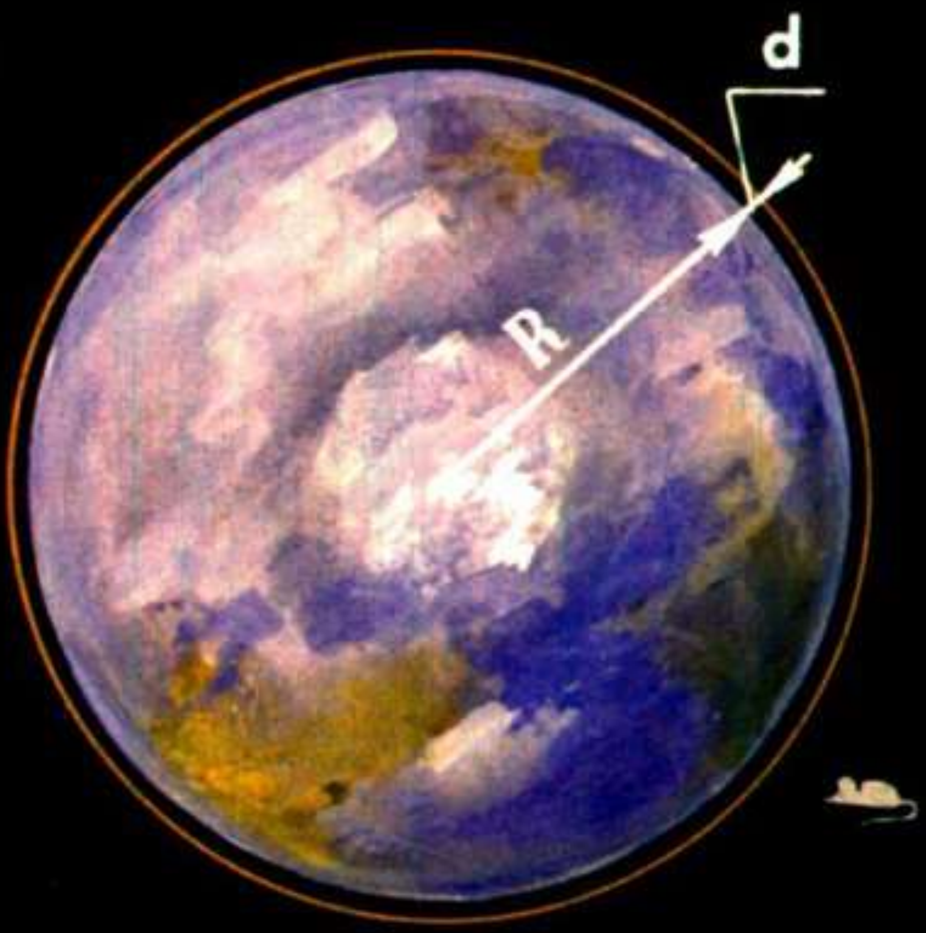


*Задача.*

**Если обтянуть земной шар по экватору проволокой и увеличить ее длину на 1 м, сможет ли между проволокой и Землей проскочить мышь?**

*Для справки:*

*длина экватора 40 075 696 м;*
*радиус Земли 6 378 000 м.*




*Решение:*

d — ширина зазора;

$$d = \frac{C + 100}{2\pi} - R \text{ (см)};$$

$$d = \frac{100}{2\pi} \text{ (см)}.$$

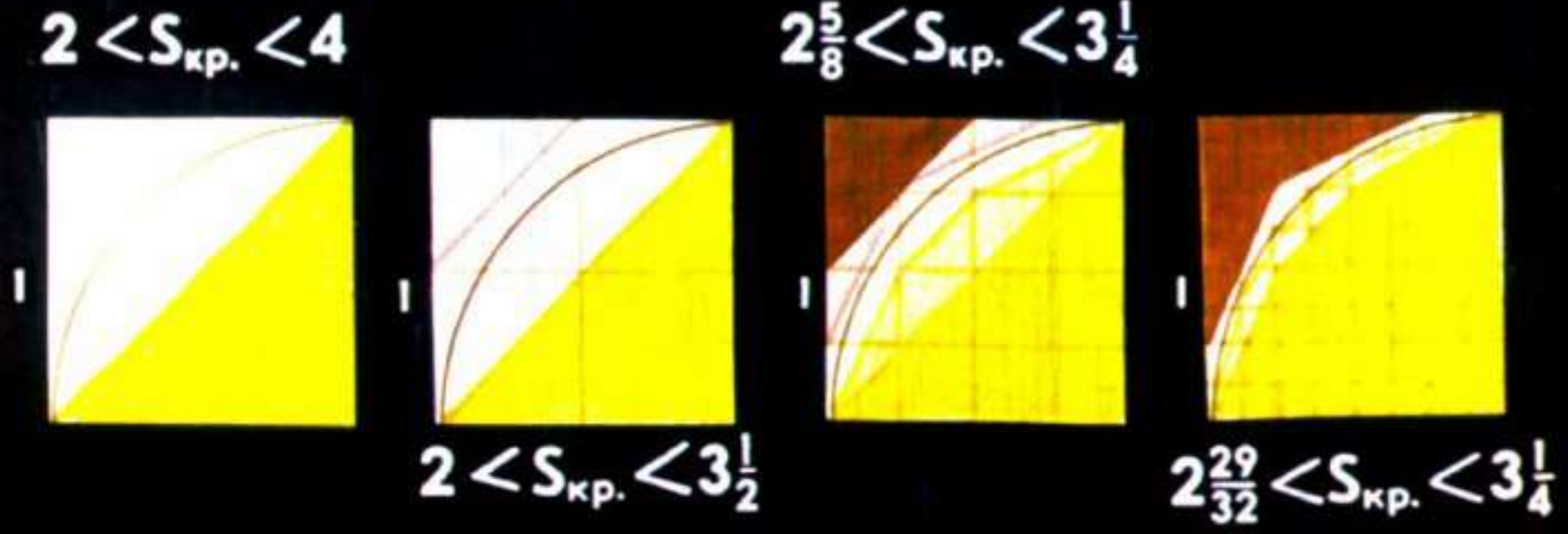
И так как $\pi < \frac{22}{7}$,

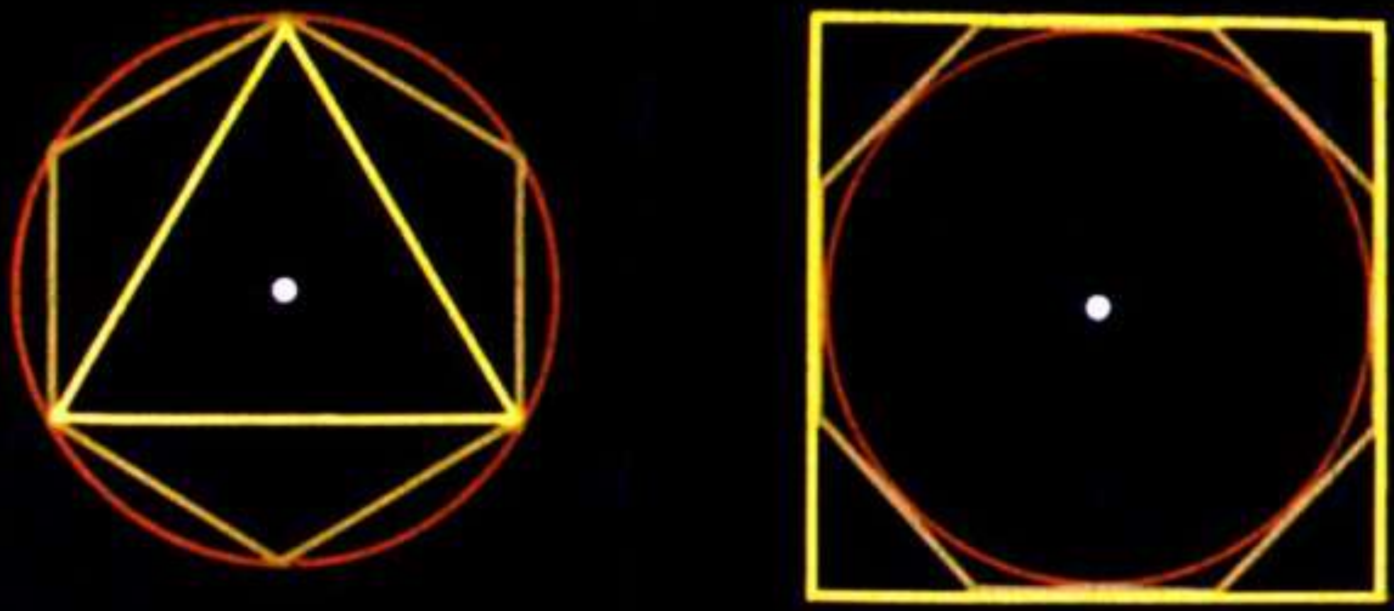
то $\frac{100}{2\pi} > \frac{100}{2 \cdot \frac{22}{7}}$,

$$\frac{100}{2\pi} > 15.$$

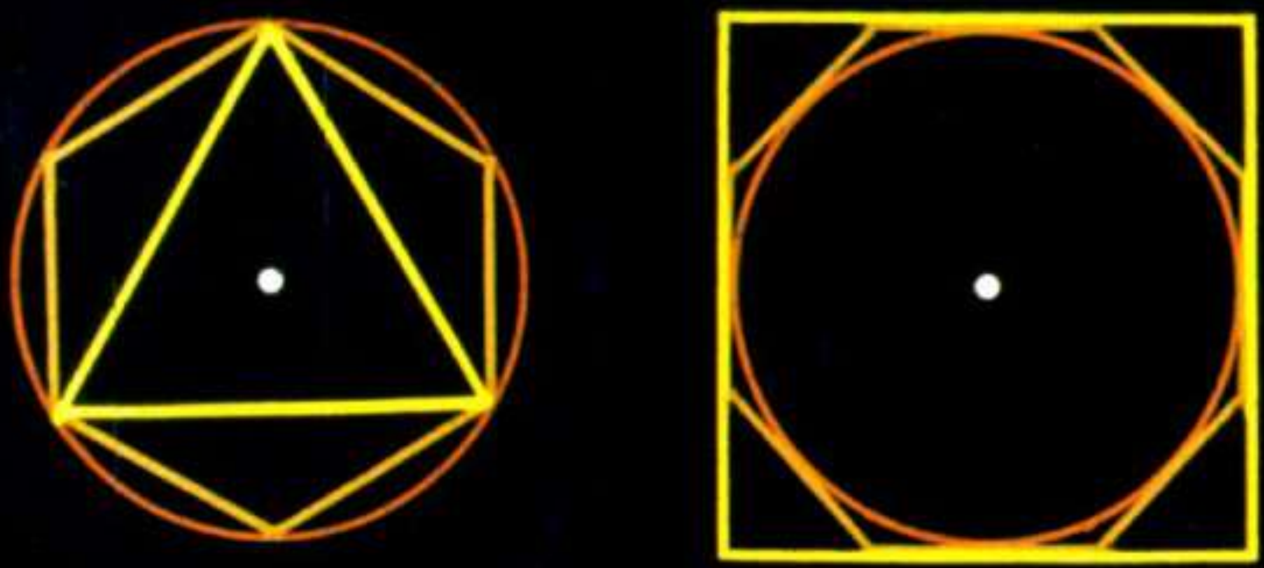
## ФРАГМЕНТ II

# ПЛОЩАДЬ КРУГА

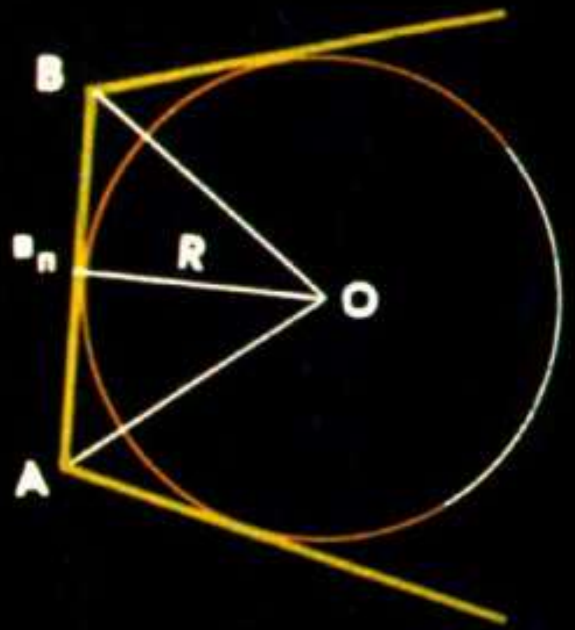




*Сравните* площади вписанного многоугольника ($S_в$), круга ($S_{кр.}$) и описанного многоугольника ($S_о$).



*Как изменяется значение выражения* $|S_{кр.} - S_n|$, *если* $n$ *возрастает?*




$$S_n = \frac{1}{2} q_n \cdot R,$$

где $q_n$—периметр описанного многоугольника.

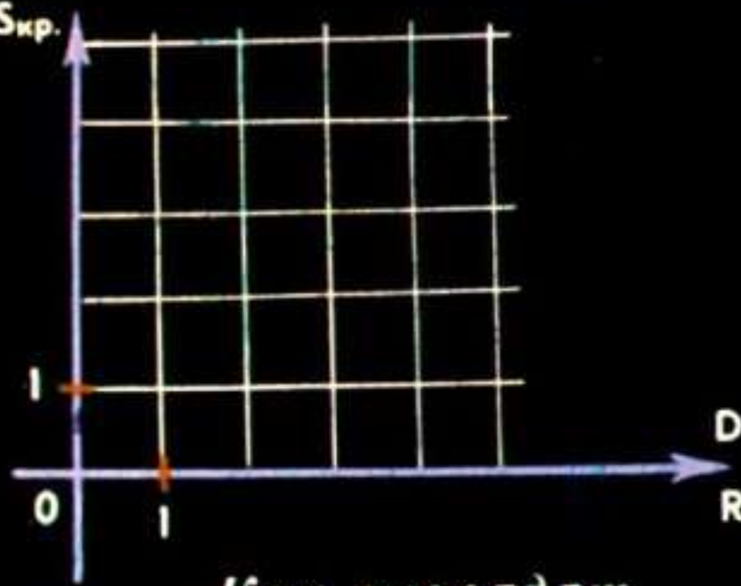
*Как изменяются* $S_n$ *и* $q_n$, *если* $n$ *возрастает?*

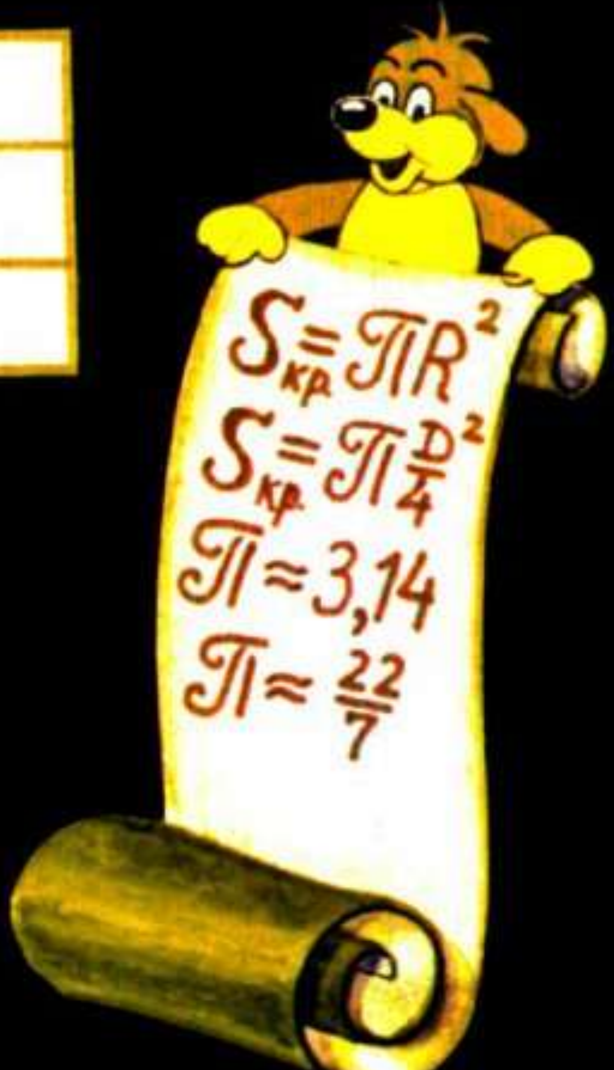
$$\boxed{S_{кр.} = \pi R^2}$$

*Выразите площадь круга через его диаметр.*

# *Заполните таблицу*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | 10 | 0,7 | | | | | |
| D | | | 2 | | | 10 | |
| $S_{кр.}$ | | | | 31,4 | $\frac{2662}{343}$ | | |




*Как выглядят графики функций*
$S_{кр.}=\pi R^2$ и $S_{кр.}=\pi \frac{D^2}{4}$ ?

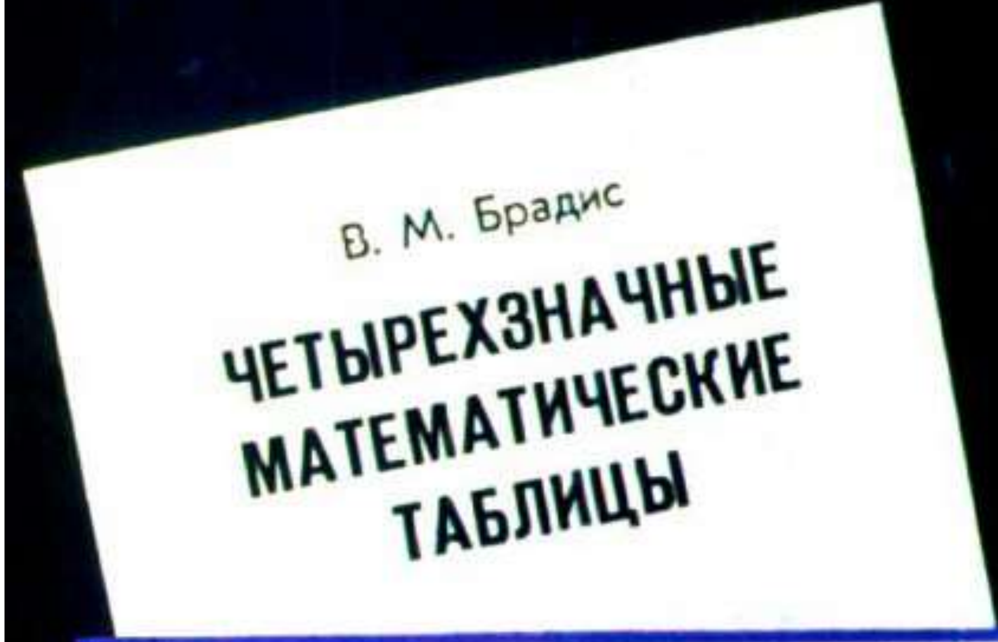
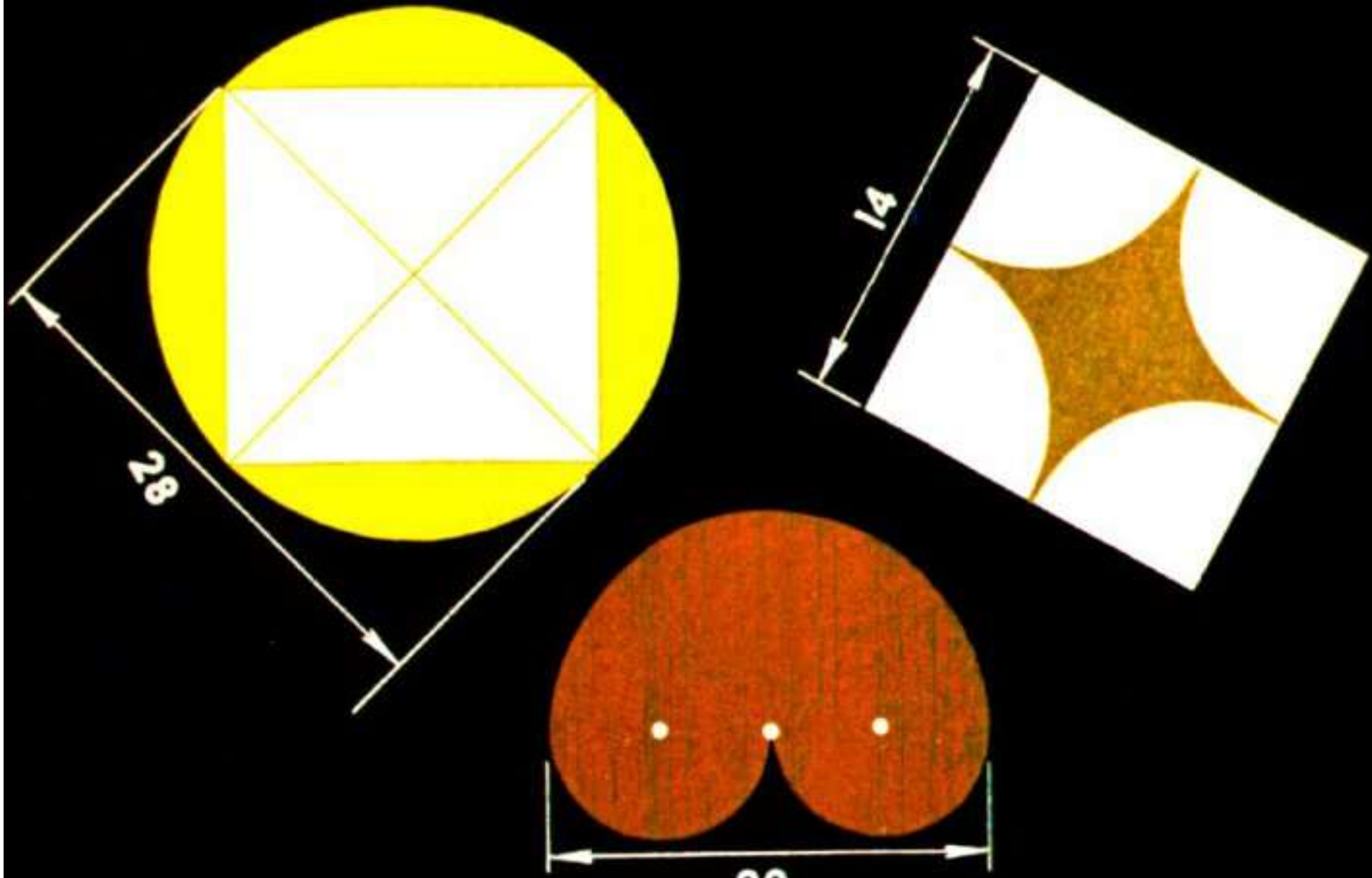



**Таблица VII. Площадь круга диаметра d**

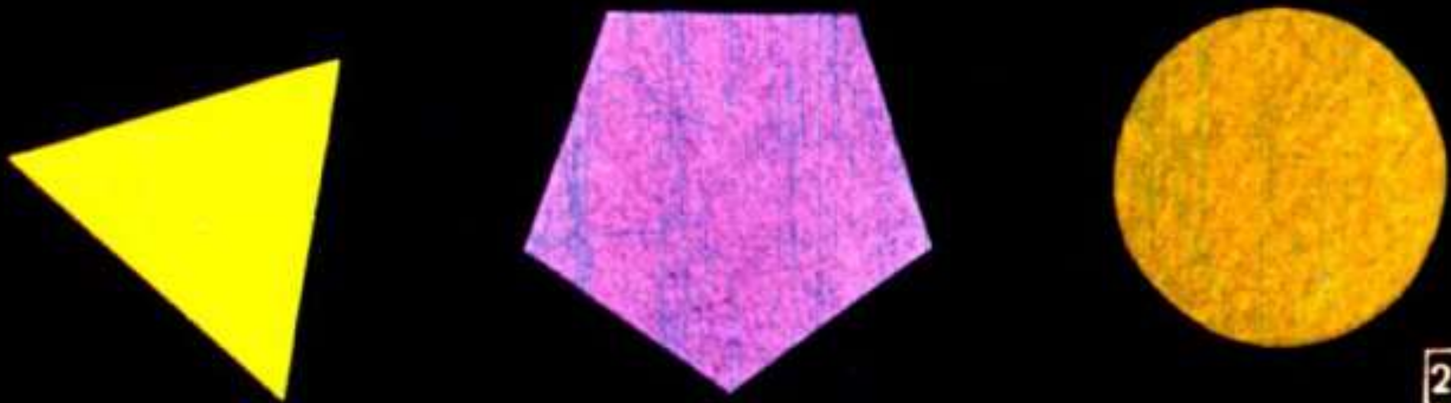
| d | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,10 | 0,9503 | ,9521 | ,9538 | ,9555 | ,9573 | ,9642 | ,9659 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 1,11 | 0,9677 | ,9694 | ,9712 | ,9729 | ,9747 | ,9817 | ,9834 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 |
| 1,12 | 0,9852 | ,9870 | ,9887 | ,9905 | ,9923 | ,9993 | 1,0011 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 |
| 1,1 | | | | 1,003 | 1,021 | 1,094 | 1,112 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 |
| 1,2 | 1,131 | 1,150 | 1,169 | 1,188 | 1,208 | 1,287 | 1,307 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 1,3 | 1,327 | 1,348 | | | | | | | | | | |




*Найдите площади закрашенных фигур.* 24

# ФРАГМЕНТ III

**Периметры многоугольников равны длине окружности. Какая из пяти фигур имеет наибольшую площадь?**




Дано: $C = P_n$

Решение:

$a =$

...


**Указание:**
*выразите $S_n$ через сторону и центральный угол правильного многоугольника.*

Сравнить $S_{кр.}$ и $S_n$.

*Дано:* $C = P_n$

*Решение:*


$$\boxed{2\pi R = n \cdot a}$$

$$\boxed{a = \frac{2\pi R}{n}}$$

$$S_n = n S_{\Delta AOB} = n \cdot \frac{a}{2} \cdot |CO| = \frac{na^2}{4tg\frac{\pi}{n}}$$

$$\boxed{S_n = \frac{\pi}{n\,tg\frac{\pi}{n}} \cdot \pi R^2}$$


$$\boxed{\frac{S_n}{S_{кр.}} < 1;\ \frac{S_n}{S_{кр.}} = 1;\ \frac{S_n}{S_{кр.}} > 1}$$

Сравнить $S_{кр.}$ и $S_n$.

*Дано:* $C = P_n$

*Решение:*


$$\boxed{2\pi R = n \cdot a}$$

$$\boxed{a = \frac{2\pi R}{n}}$$

$$\boxed{S_n = \frac{\pi}{n\,tg\frac{\pi}{n}} \cdot \pi R^2}$$

$$\boxed{\frac{S_n}{S_{кр.}} = \frac{\pi}{n\,tg\frac{\pi}{n}}}$$


...

$$\boxed{\frac{S_n}{S_{кр.}} < 1;\ \frac{S_n}{S_{кр.}} = 1;\ \frac{S_n}{S_{кр.}} > 1}$$

Сравнить $S_{кр.}$ и $S_n$.

| n | $tg\frac{\pi}{n}$ | $n\,tg\frac{\pi}{n}$ |
|---|---|---|
| 3 | 1,732 | 5,196 |
| 4 | 1 | 4 |
| 5 | 0,7265 | 3,6325 |
| 6 | 0,5774 | 3,4644 |
| 7 | 0,4813 | 3,3691 |
| 8 | 0,4142 | 3,3136 |
| 9 | 0,3640 | 3,2760 |
| 10 | 0,3249 | 3,249 |
| ... | ... | ... |
| 900 | 0,0035 | 3,15 |
| ... | ... | ... |

## *К сведению учителя*

Диафильм состоит из трех фрагментов.
I—«Длина окружности» (кадры 2—17 к п. 90 учебного пособия «Геометрия 6—8», 1979 г.).
II—«Площадь круга» (кадры 18—25, к п. 91).
III—предназначается для внеклассной кружковой работы. В нем рассматривается задача о фигуре наибольшей площади при постоянном периметре (кадры 26—29).
Значок ▲ обозначает конец фрагмента.

В кадре 4 нужно вспомнить с учащимися способ построения гомотетичной точки и обсудить, сколько решений имеет эта задача в каждом случае. Кадр 5 содержит ответ на задание кадра 4. Здесь следует показать учащимся, что если задача имеет два решения, то модули коэффициентов гомотетии равны.

В кадрах 7; 8; 17; 22; 24; 25 числа подобраны таким образом, что нужно пользоваться то одним, то другим приближенным значением $\pi$. Пустые рамки яркого цвета показывают учителю, какой шаг в решении задачи следует обсудить с классом. В последующих кадрах цвет рамки тускнеет, внутри появляются формулы, к которым нужно было прийти в результате обсуждения.


**Диафильм сделан по программе, утвержденной Министерством просвещения СССР**

*Автор П. Камаев*

*Художник-оформитель Н. Дунаева*

*Редактор Т. Разумова*



**101000, Москва, Центр, Старосадский пер., 7**

**Цветной 0-30**