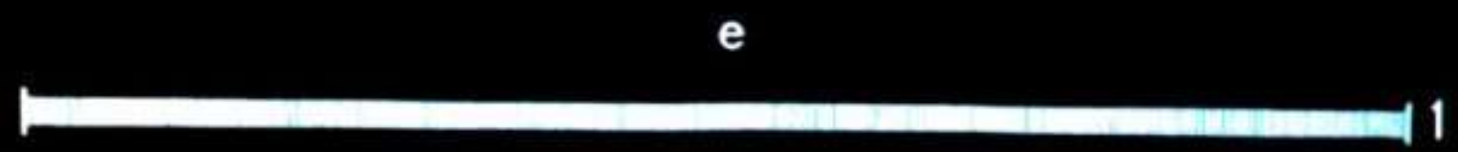
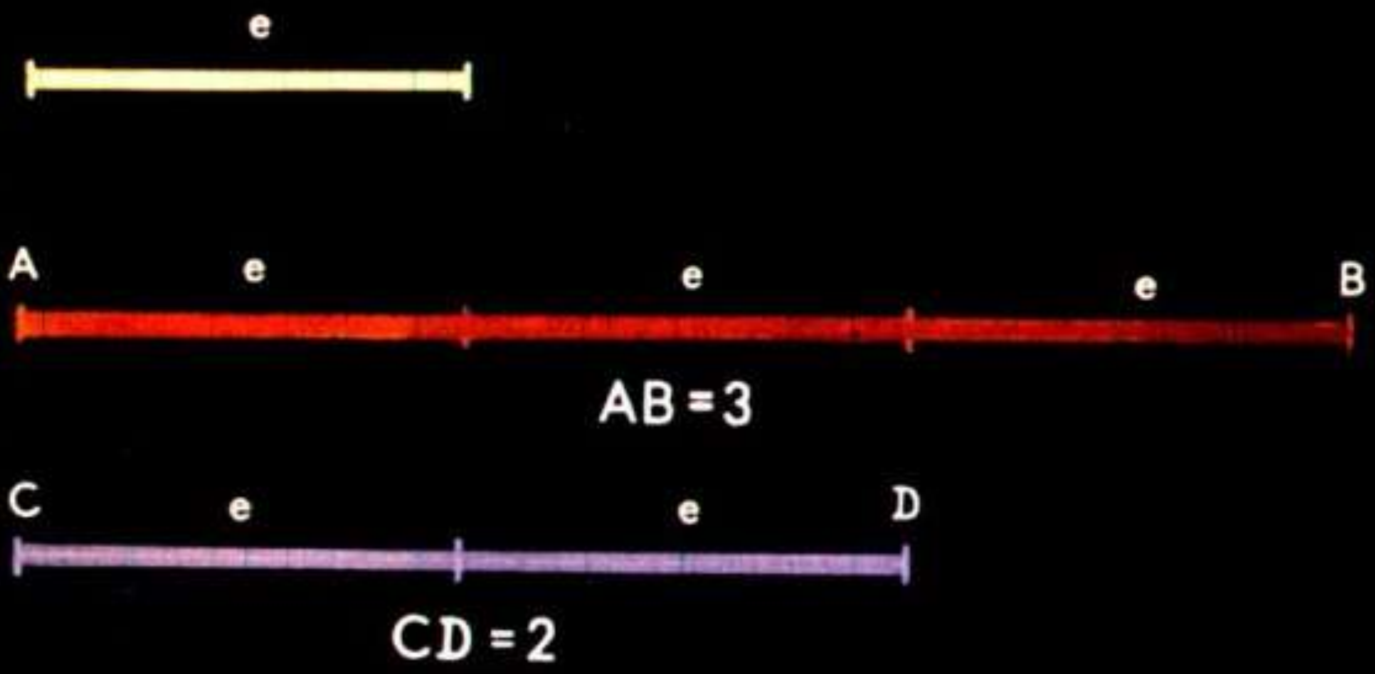
ДЛИНА ОТРЕЗКА. ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ ОТРЕЗКОВ

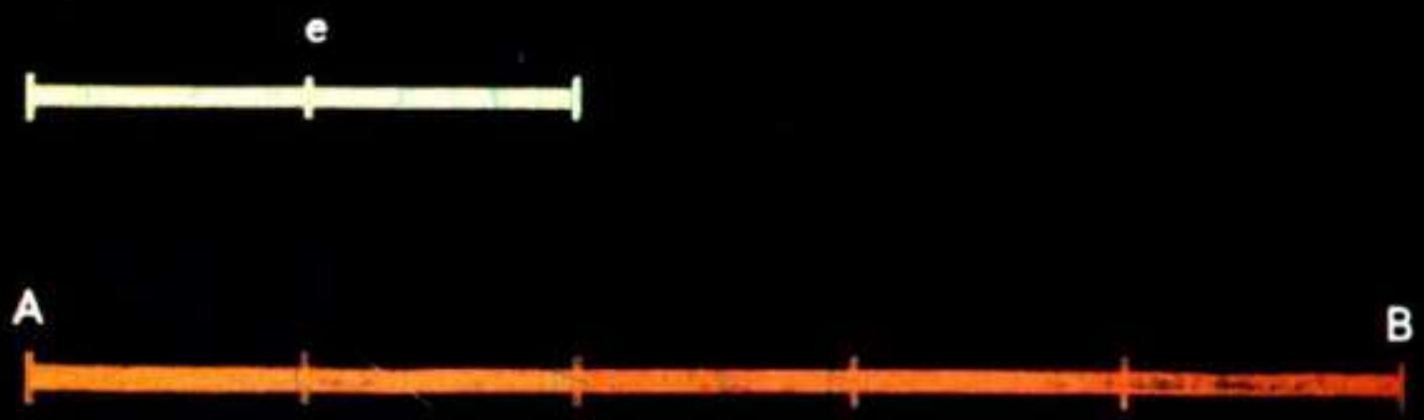
I. Длина отрезка



Для измерения отрезков выбирают произвольный отрезок е.
Отрезку е ставится в соответствие число 1.
Говорят, что длина отрезка е равна 1.

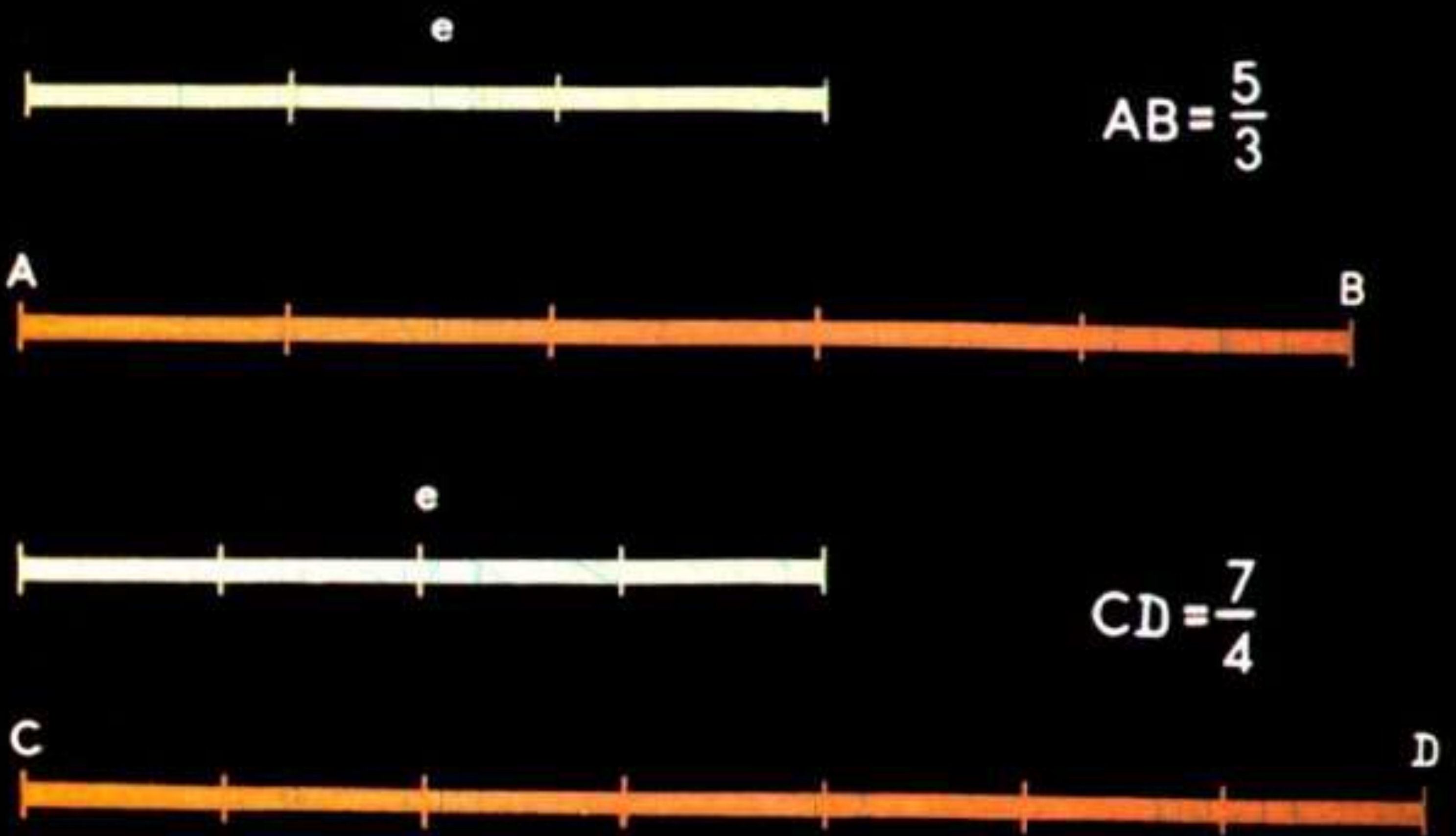


Если отрезок e укладывается в данном отрезке AB целое число (m) раз без остатка, то говорят, что длина отрезка AB равна целому числу m.

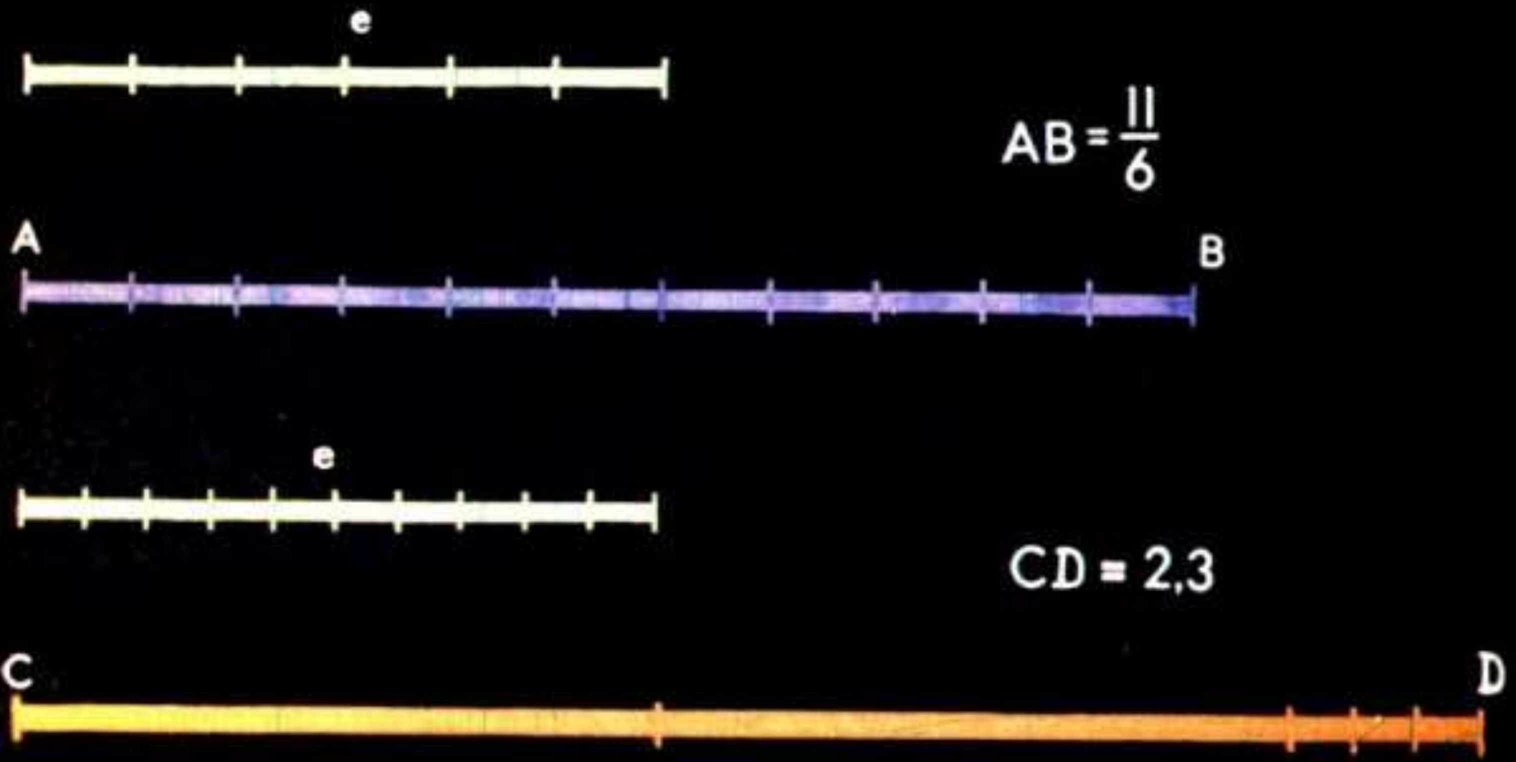


$$AB = \frac{5}{2}$$

Если отрезок е не укладывается в АВ целое число раз, то берут половину отрезка е. Если половина отрезка е уложится в АВ целое число (к) раз, то длина отрезка выразится числом $\frac{к}{2}$.

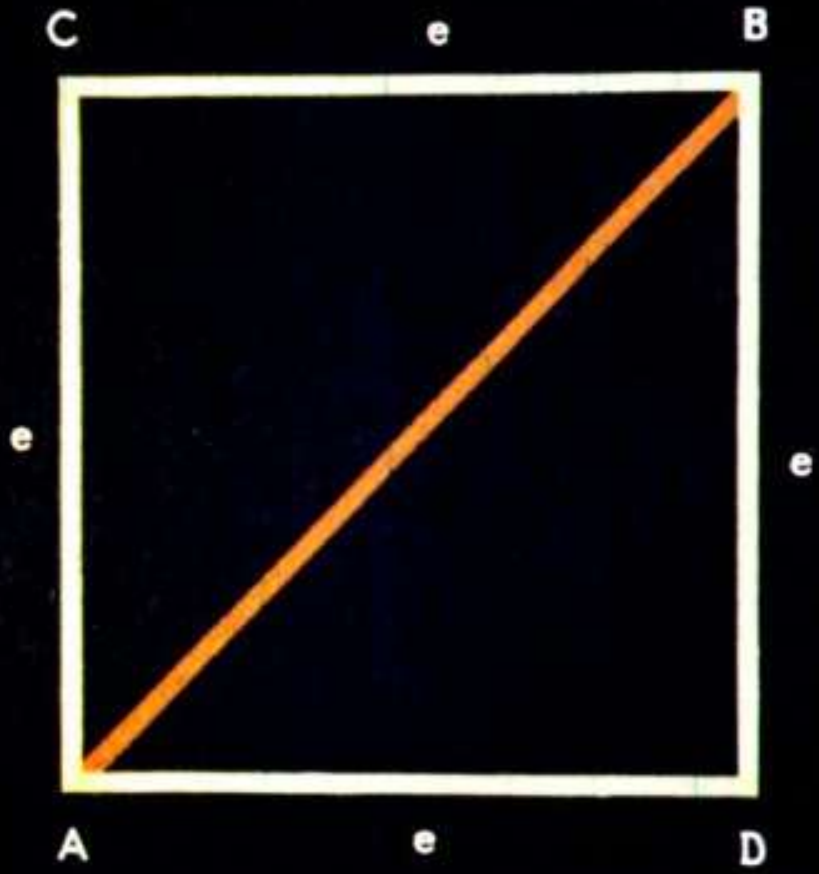


Если половина отрезка e не укладывается в AB целое число раз, то берут $\frac{1}{3}$ отрезка e, потом $\frac{1}{4}$ отрезка e и т. д.

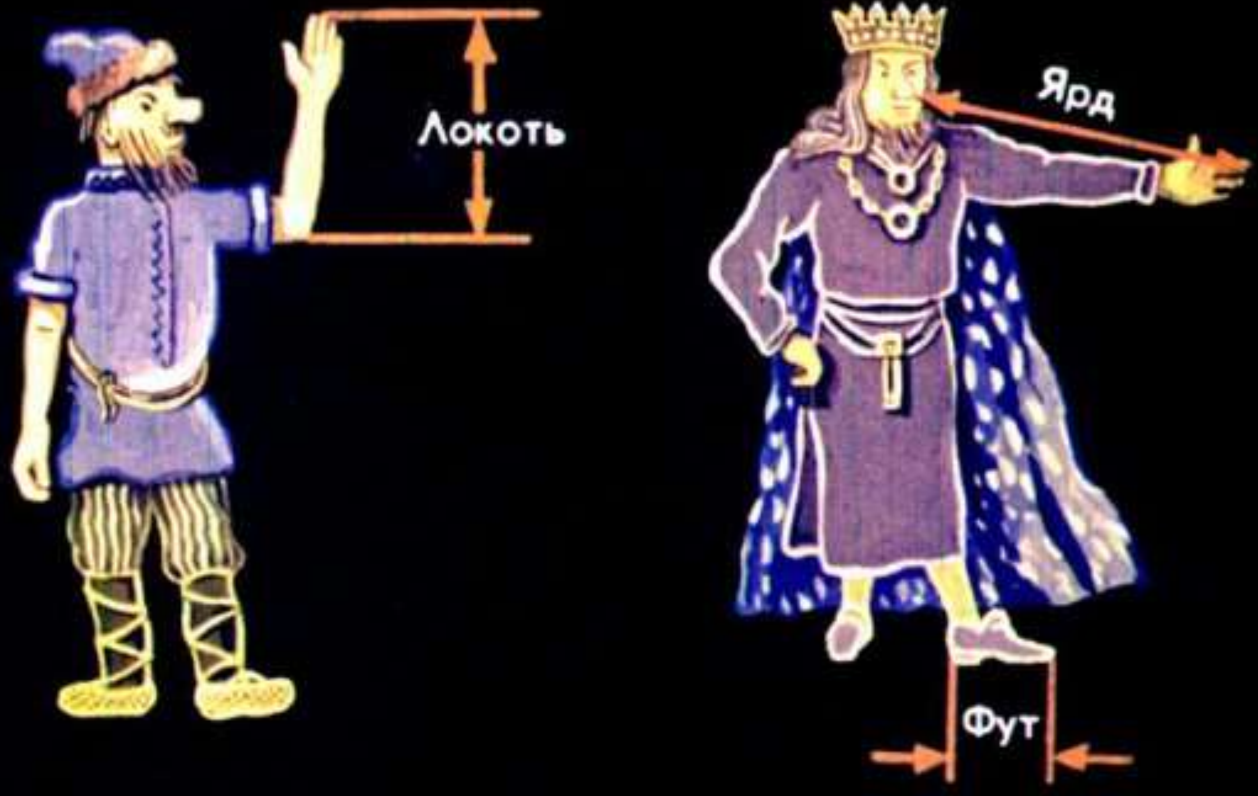


Если найдётся целое число n, и $\frac{1}{n}$ часть отрезка e укладывается в AB целое число (m) раз, то отрезки e и AB называют соизмеримыми, и длина отрезка AB выражается дробью $\frac{m}{n}$.

$AB = \sqrt{2}$



Если никакая $\frac{1}{n}$ часть отрезка e не укладывается в AB целое число раз, то отрезки e и AB называются **несоизмеримыми**, и тогда длина отрезка AB выражается иррациональным числом. Например, сторона и диагональ квадрата — несоизмеримы.

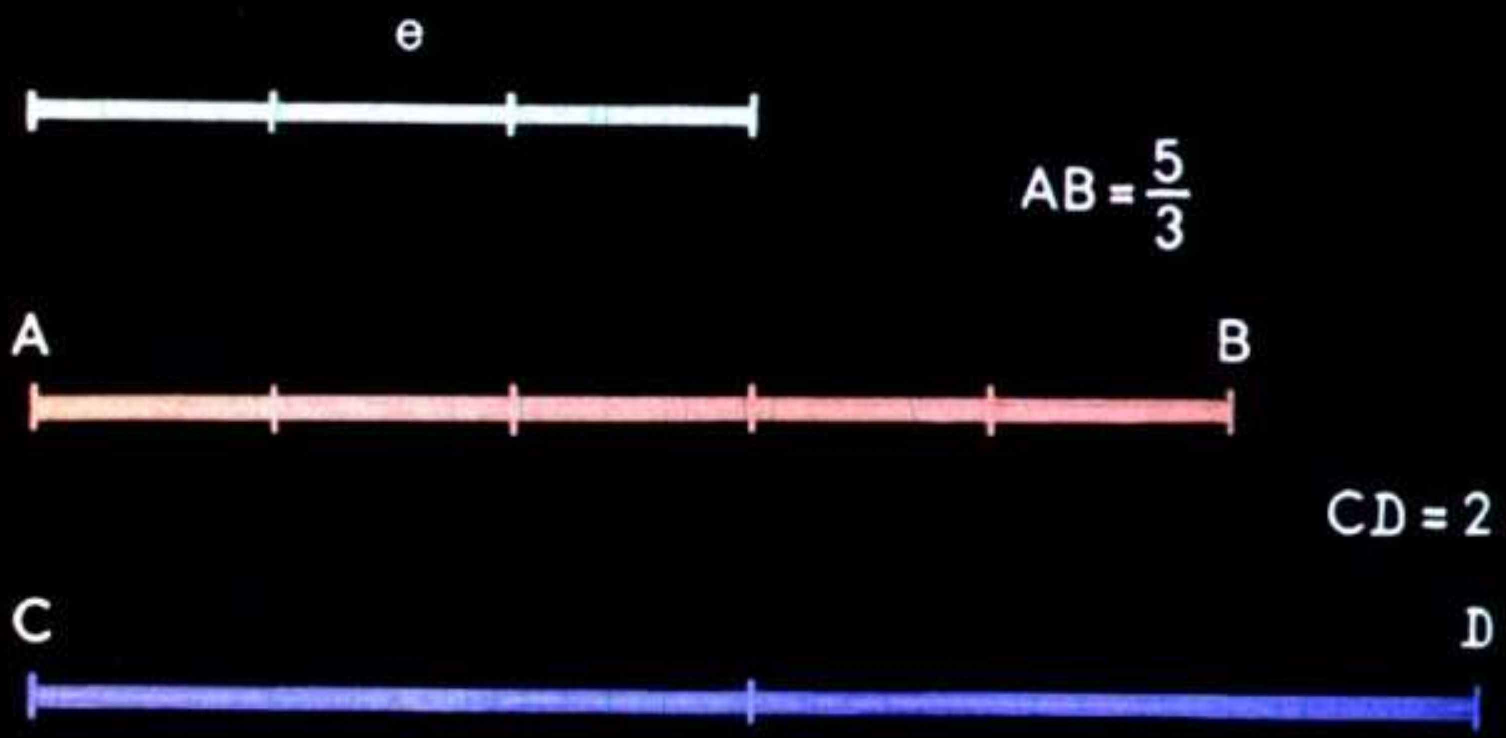


Каждый народ придумывал свои единицы измерения длины.

Разнообразие единиц длины и трудность перевода из одной меры в другую создавали большие неудобства, особенно в торговле.

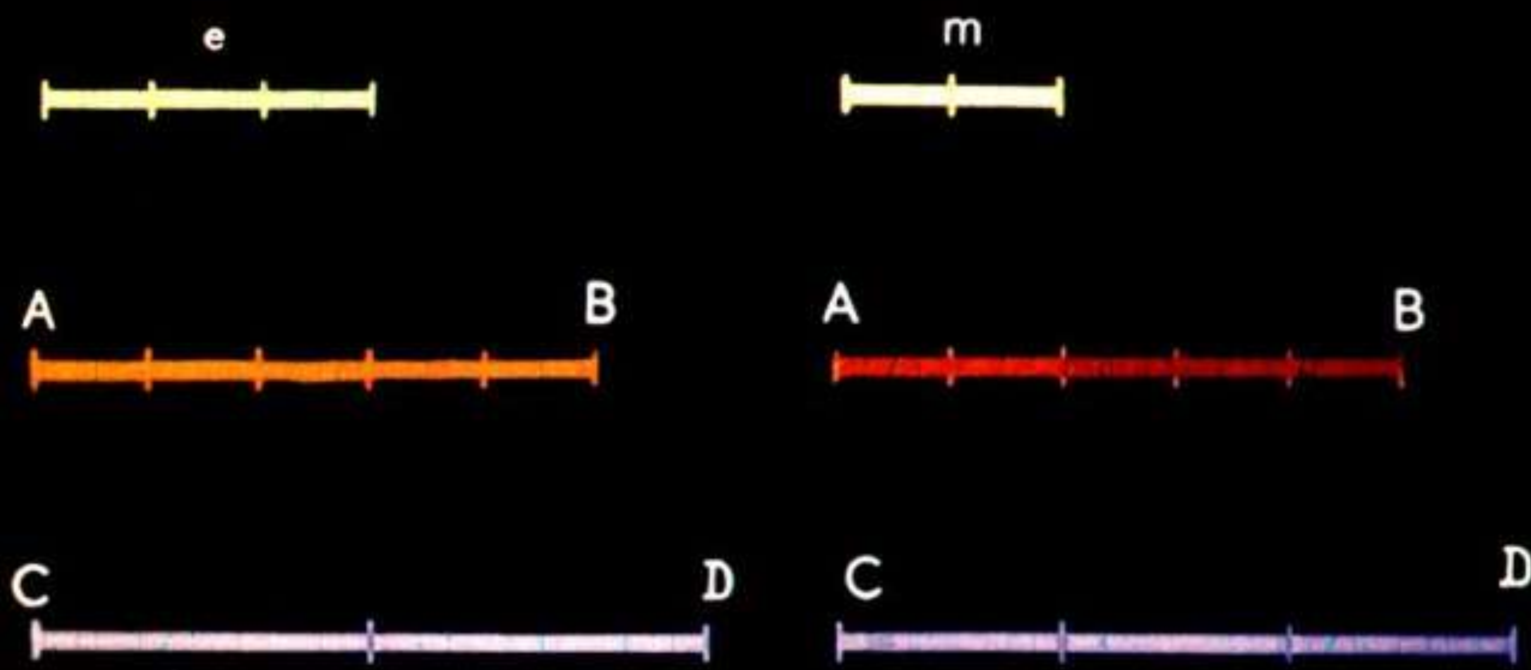
В настоящее время большинство народов пользуется метрической системой мер. За основную единицу длины в этой системе принят МЕТР.

2.
Основная теорема о пропорциональных отрезках



$$\frac{AB}{CD} = \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{6}$$

Отношением двух отрезков называется отношение длин этих отрезков, найденных в одной и той же единице измерения.



$AB = \frac{5}{3}e$

$CD = 2e$

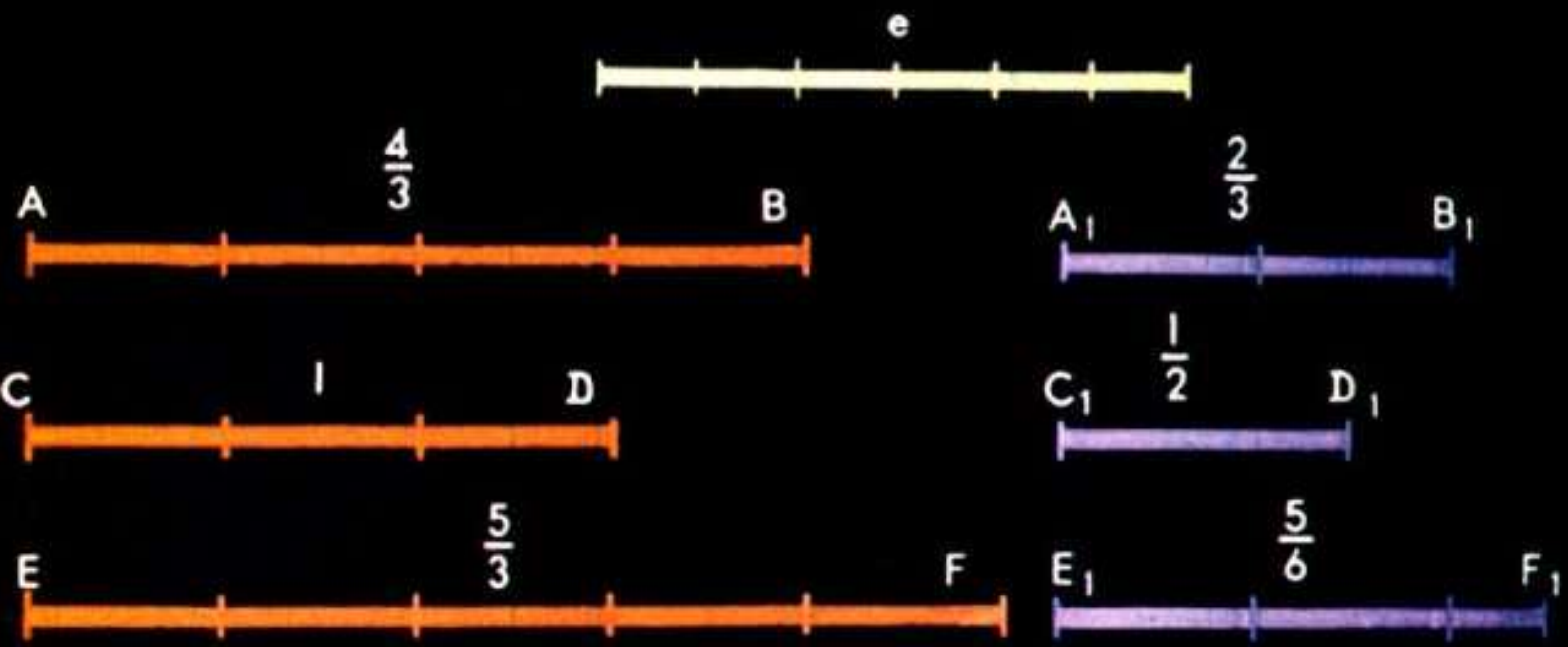
$AB:CD = 5:6$

$AB = \frac{5}{2}m$

$CD = 3m$

$AB:CD = 5:6$

Отношение двух отрезков не зависит от выбора единицы измерения.



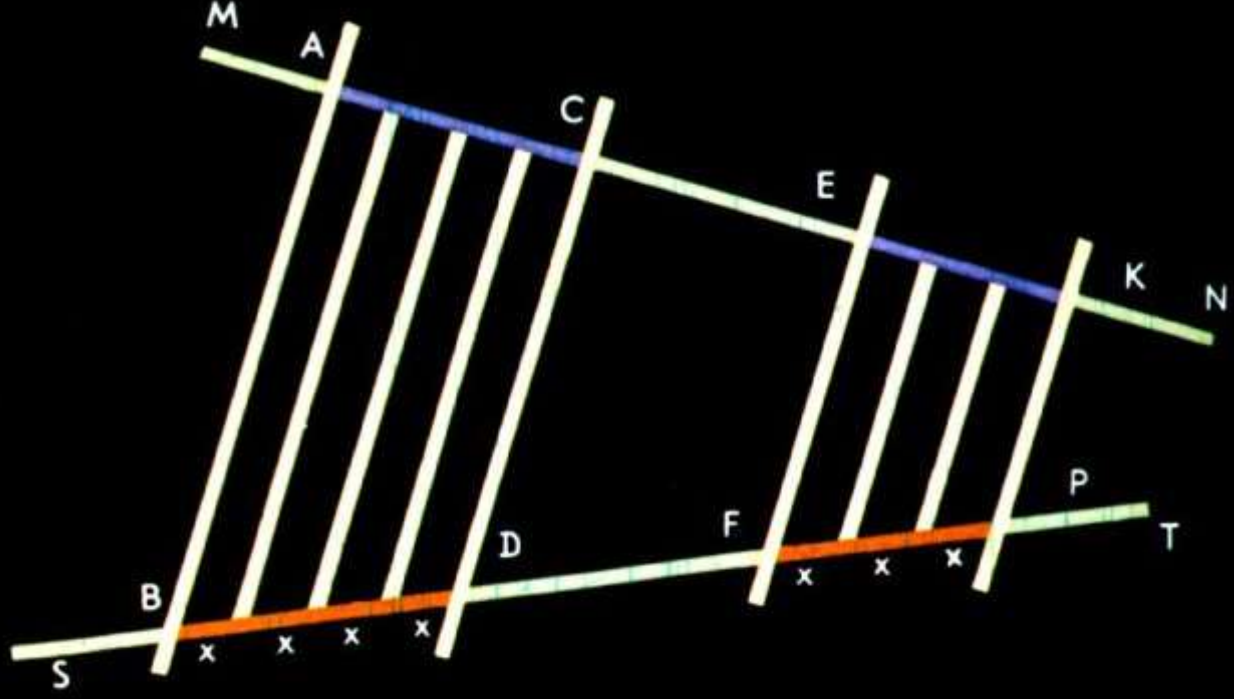
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{EF}{E_1F_1}=2$$

Отрезки AB, CD, EF **называются пропорциональными соответственно отрезкам** A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1, **если имеет место равенство** $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{EF}{E_1F_1}=K$, **где** K **— коэффициент пропорциональности.**

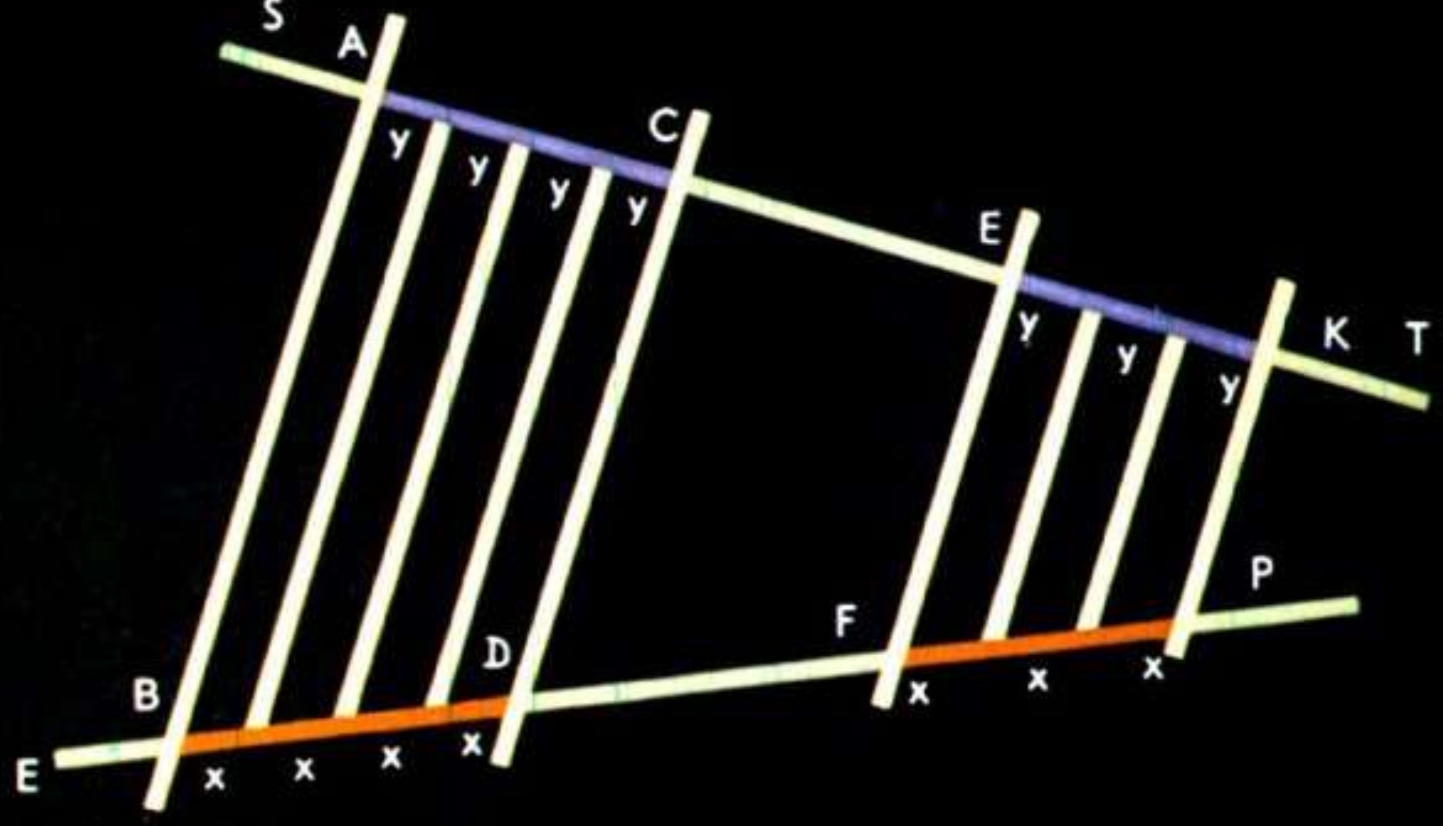
Дано: $AB \parallel CD \parallel EF \parallel KP$

Доказать: $\frac{BD}{FP} = \frac{AC}{EK}$

Теорема. Ряд параллельных прямых отсекают на двух произвольных прямых пропорциональные отрезки.

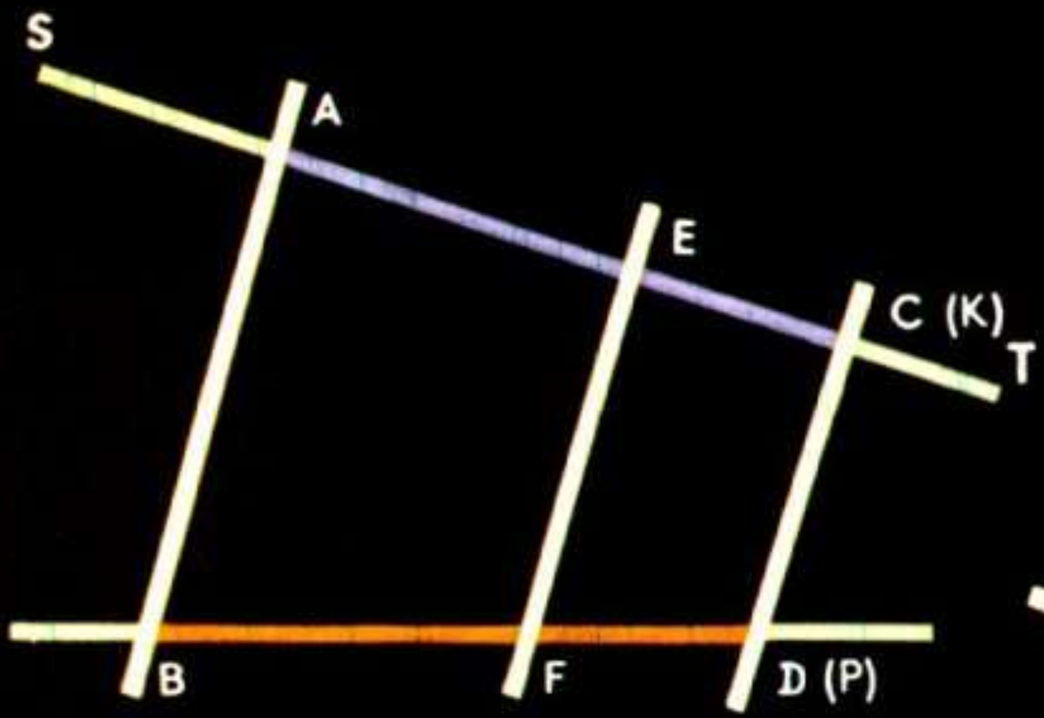


Доказательство. Пусть отрезки BD и FP соизмеримы. Значит, $\frac{1}{n}$ часть отрезка FP (отрезок x) укладывается в BD целое число (m) раз, а в FP n раз. Через точки деления проведём прямые, параллельные AB.

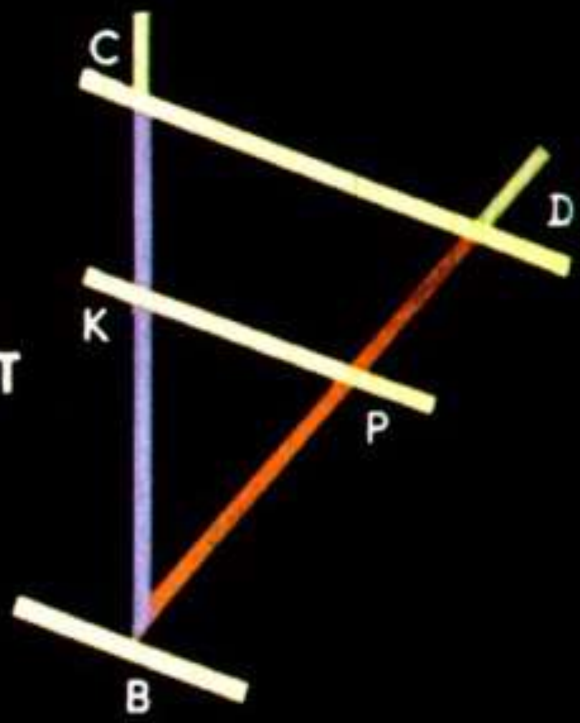


Отрезки AC **и** EK **также разделятся на** m **и** n **равных отрезков** y. **Отсюда** $BD = mx$, $FP = nx$, $AC = my$, $EK = ny$. **Значит,**

$$\frac{BD}{FP} = \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}, \quad \frac{AC}{EK} = \frac{my}{ny} = \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad \frac{BD}{FP} = \frac{AC}{EK}.$$

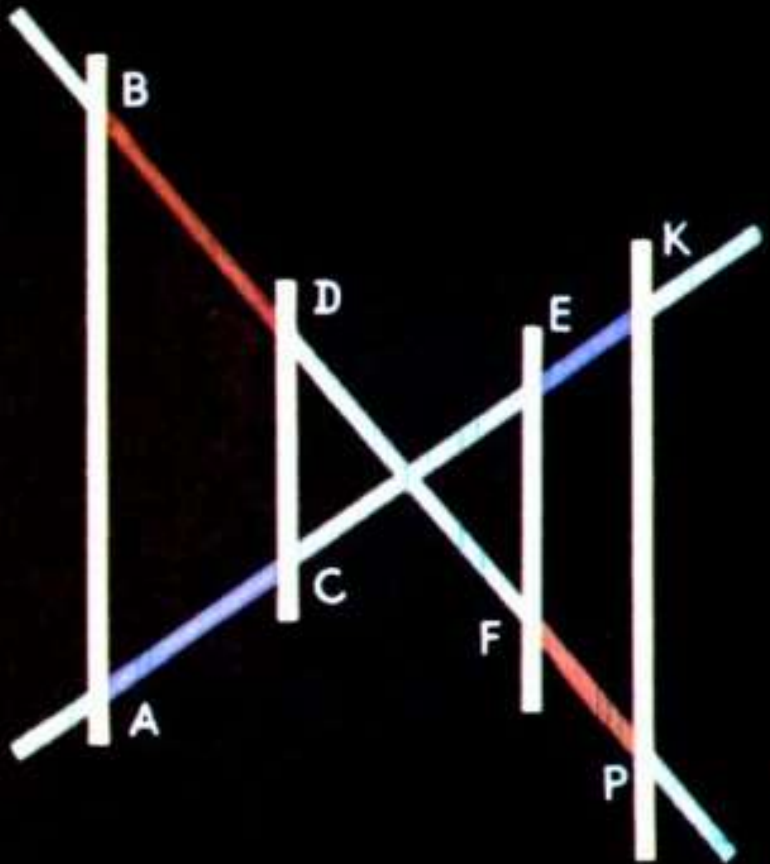


$$\frac{BD}{FD}=\frac{AC}{EC}$$

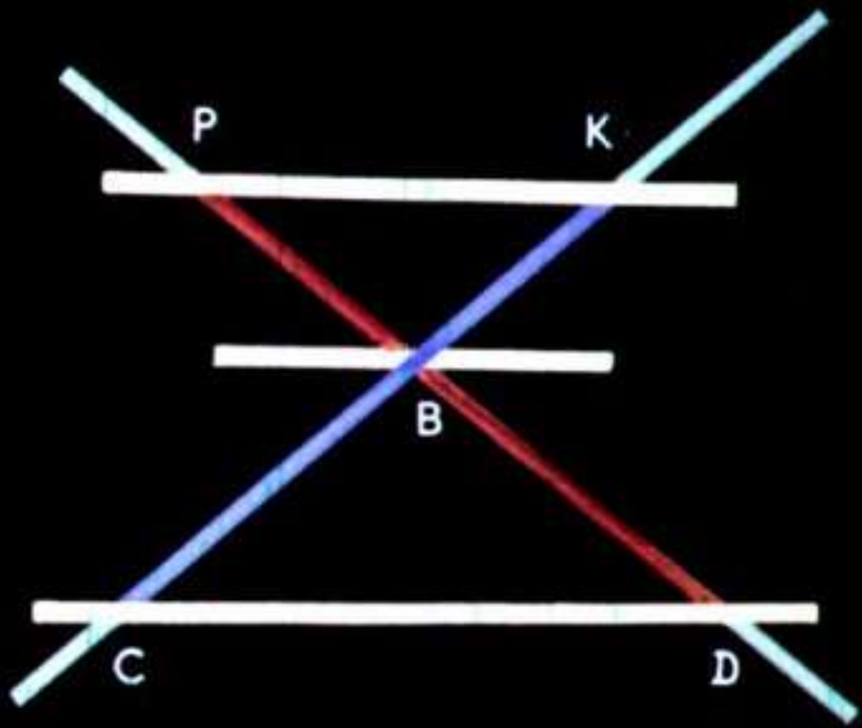


$$\frac{BD}{BP}=\frac{BC}{BK}$$

Доказательство теоремы не зависит от положения отрезков AC **и** EK **на прямой** ST. **Теорема верна и когда отрезки** AC **и** EK **несоизмеримы.**

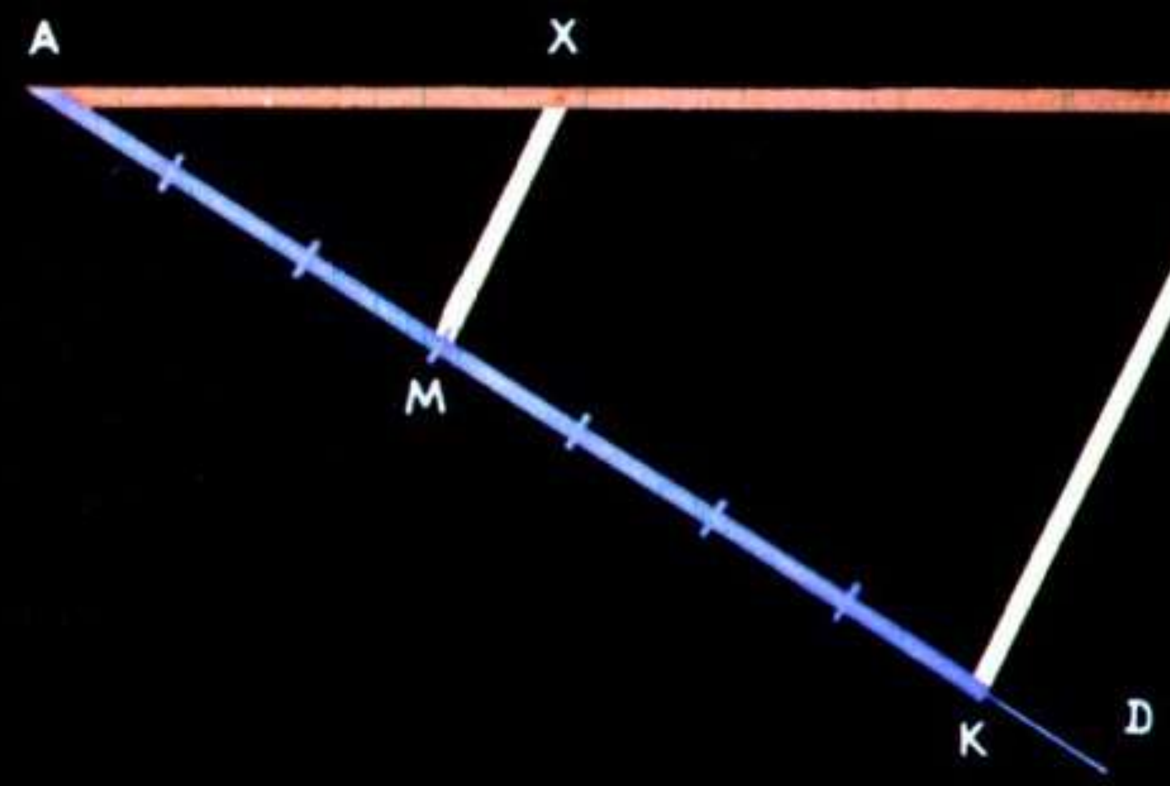


$$\frac{BD}{FP} = \frac{AC}{EK}$$



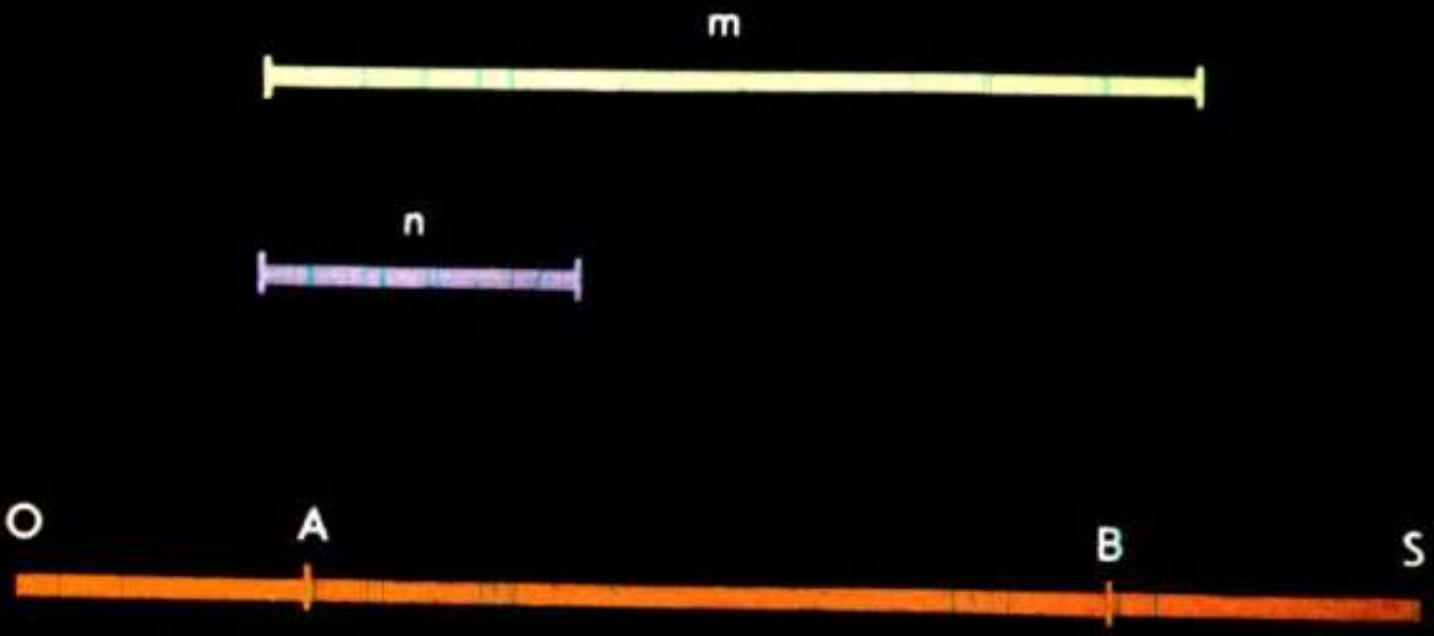
$$\frac{BD}{BP} = \frac{BC}{BK}$$

3.
Построение пропорциональных отрезков

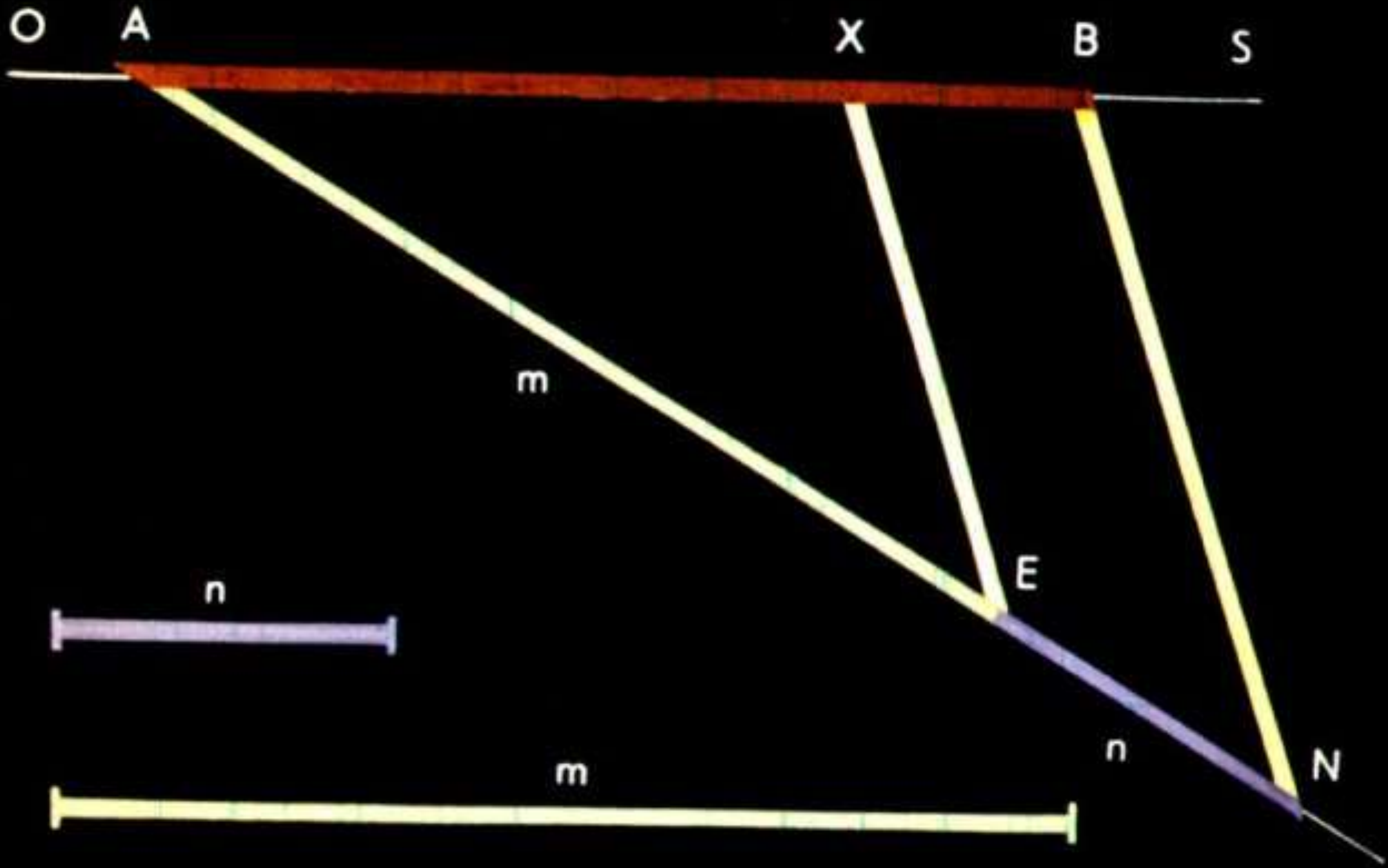


Задача 1. Разделить отрезок AB в отношении 3 : 4.

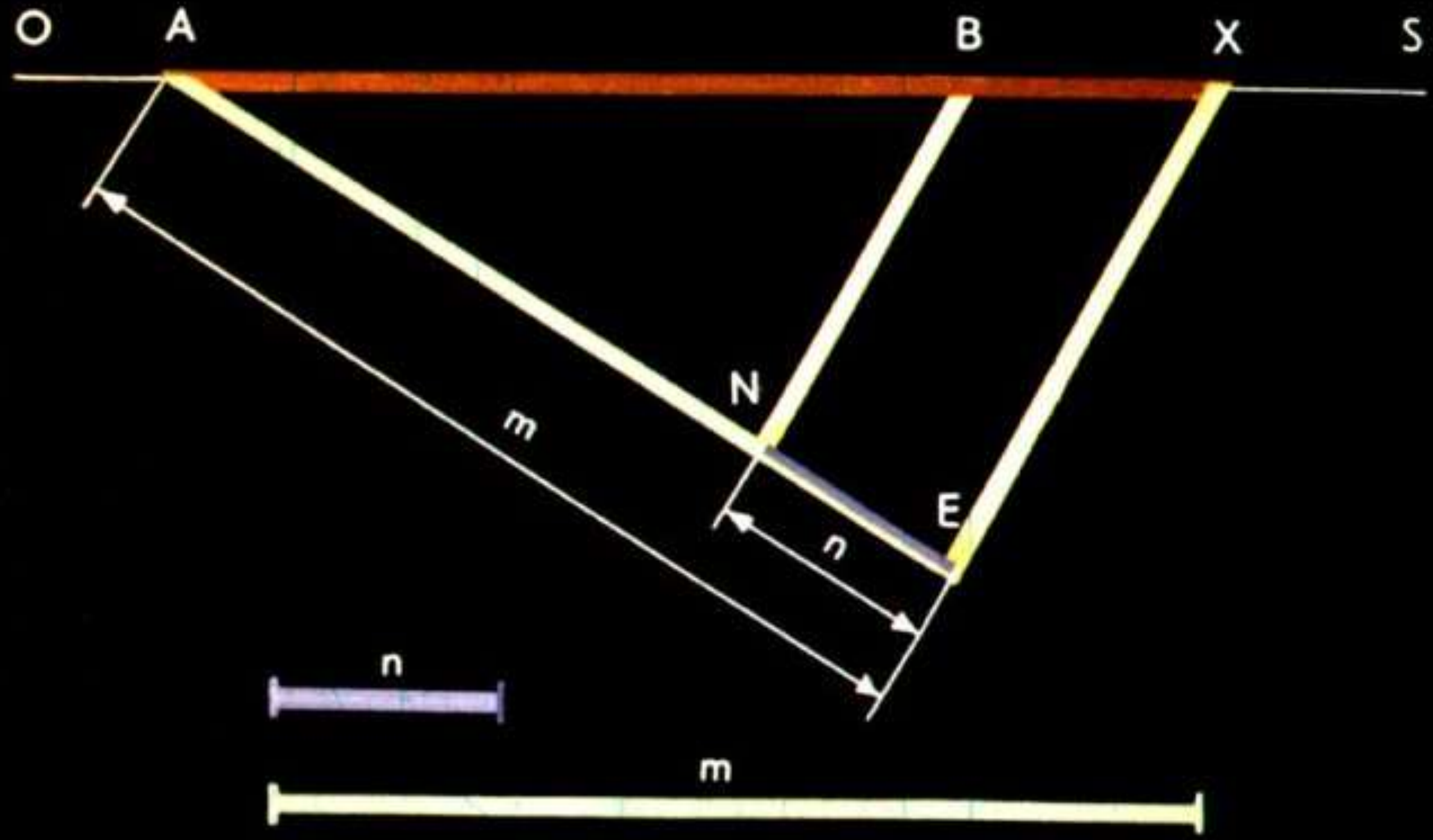
Решение: проведём через точку A луч AD и отложим на нём от точки A семь произвольных, но равных отрезков. Соединим конец последнего отрезка с точкой B. Через конец третьего отрезка проведём MX ǁ KB.



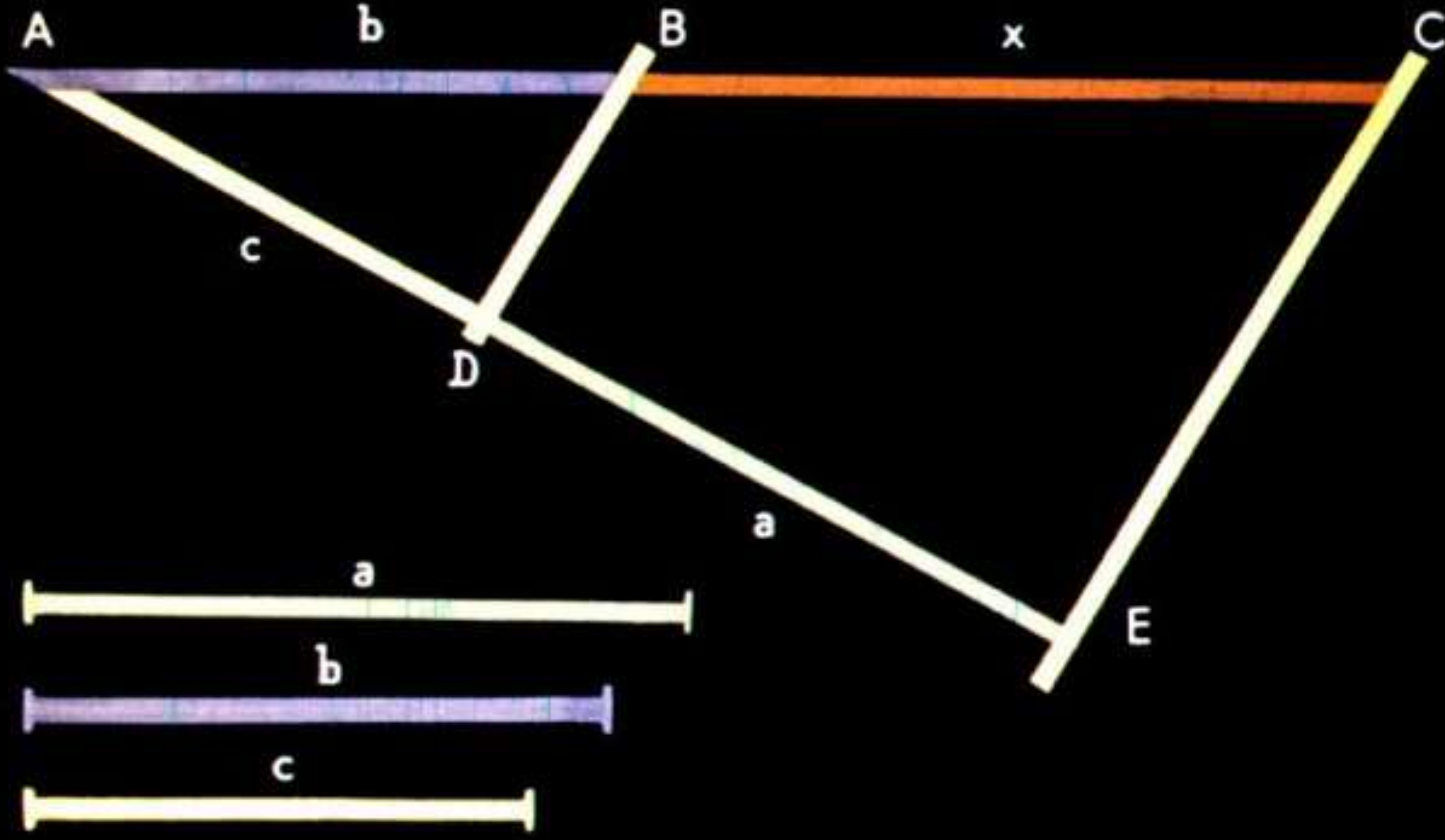
Задача 2. На прямой OS даны две точки A и B. Найти на этой прямой такую точку X, чтобы $XA : XB = m : n$, где m и n — данные отрезки.



I случай (точка X лежит внутри отрезка AB).
Объясните ход решения задачи.

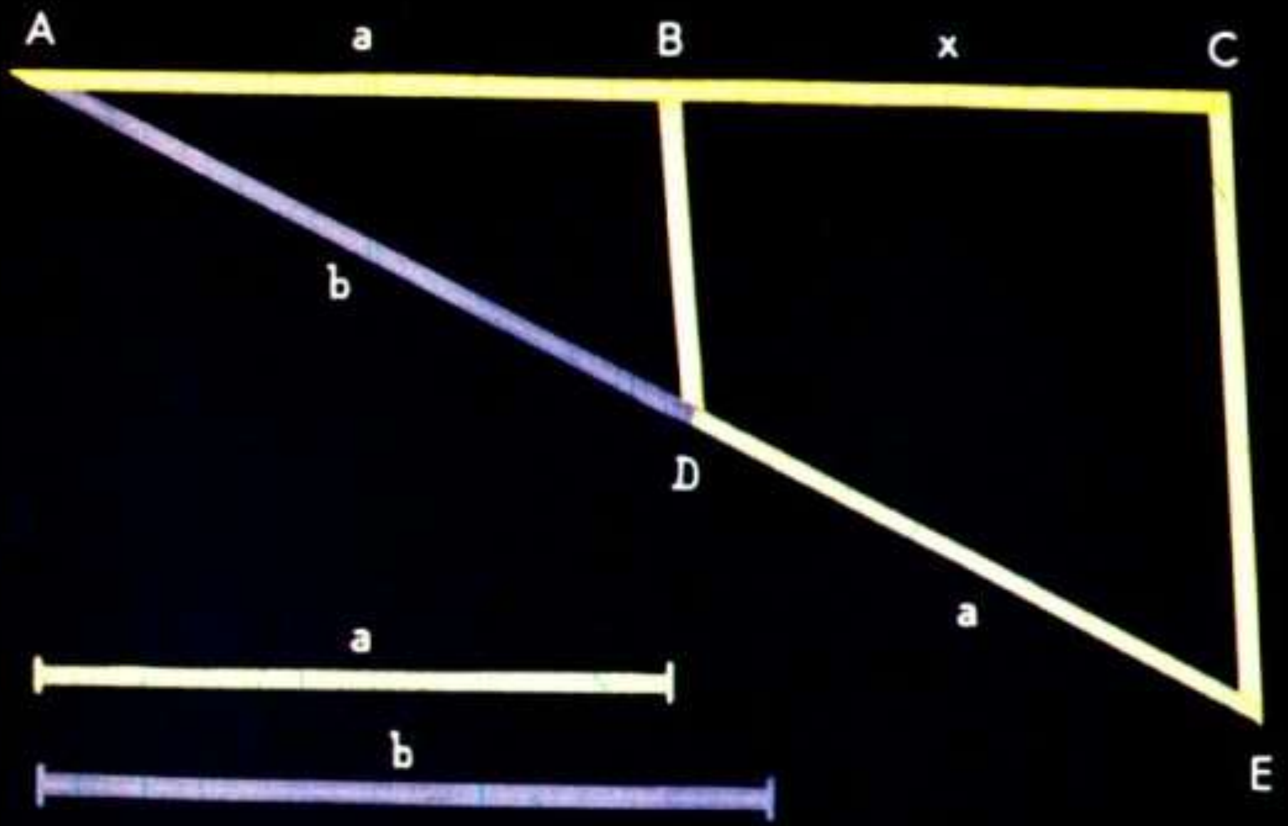


2 случай (точка X лежит вне отрезка AB).
Объясните ход решения задачи.

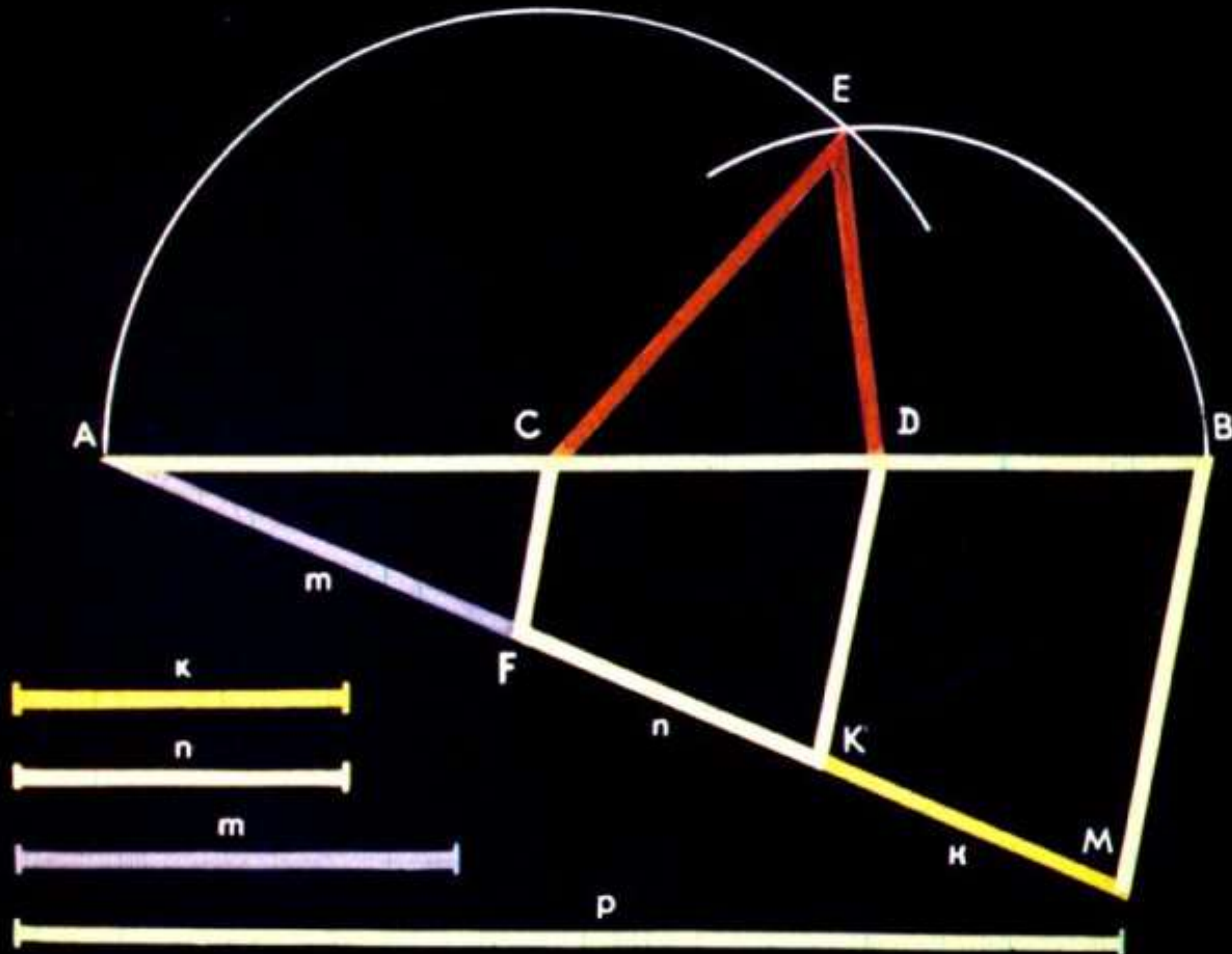


Задача 3. Построить отрезок x так, чтобы $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$, где a, b и c—данные отрезки.

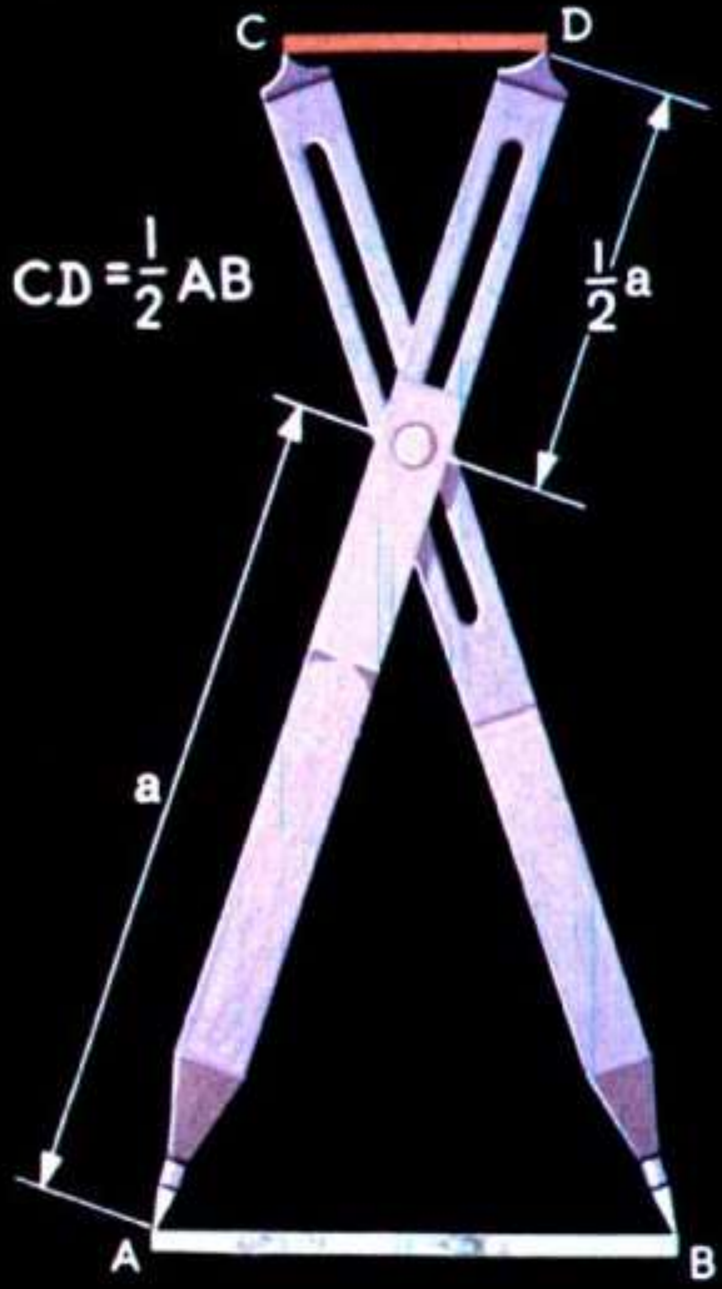
Объясните ход решения задачи.



Задача 4. Построить отрезок x так, чтобы $x=\frac{a^2}{b}$, где a и b—данные отрезки. **Решение:** запишем данное равенство в виде пропорции $\frac{x}{a}=\frac{a}{b}$. Объясните дальнейший ход построения.

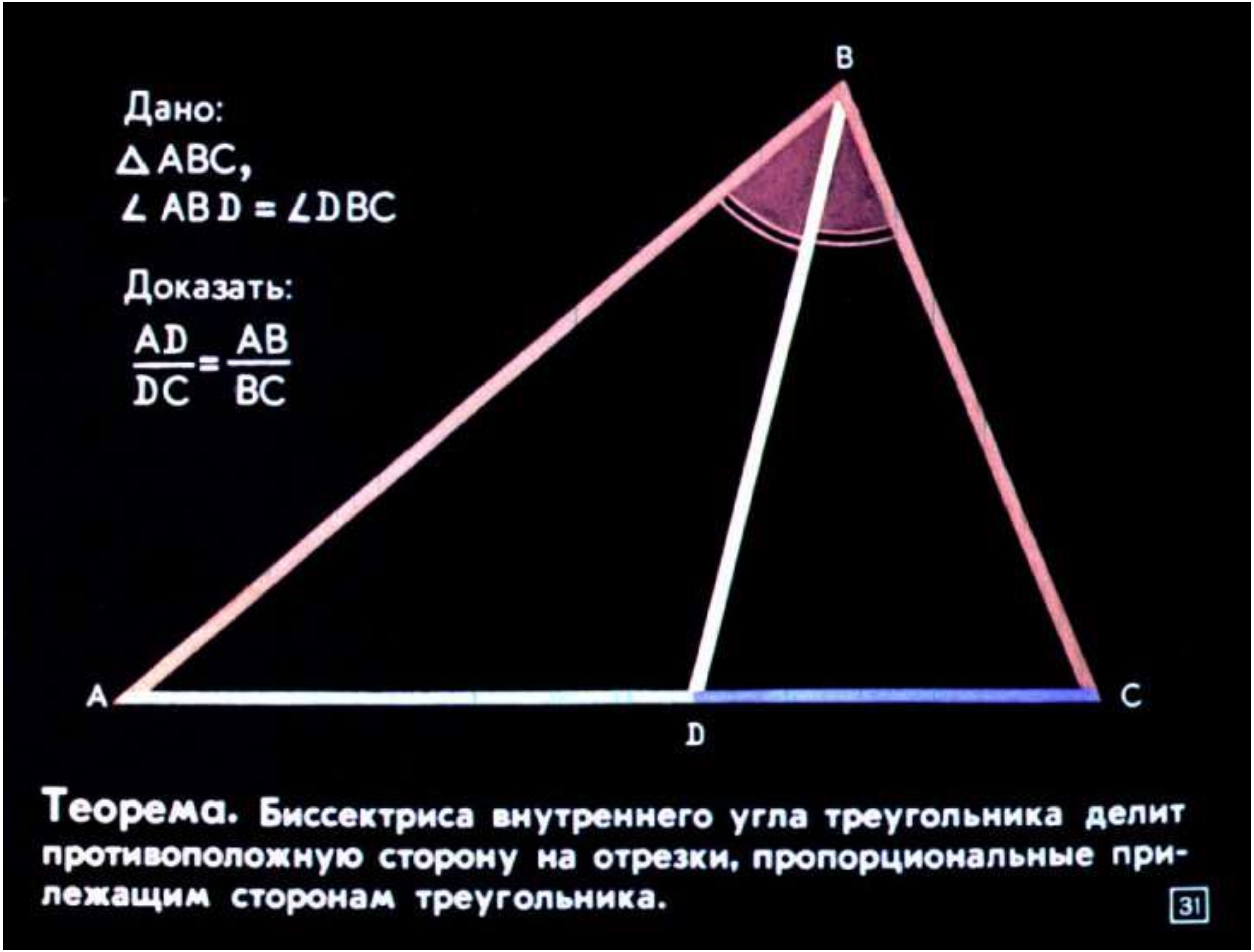


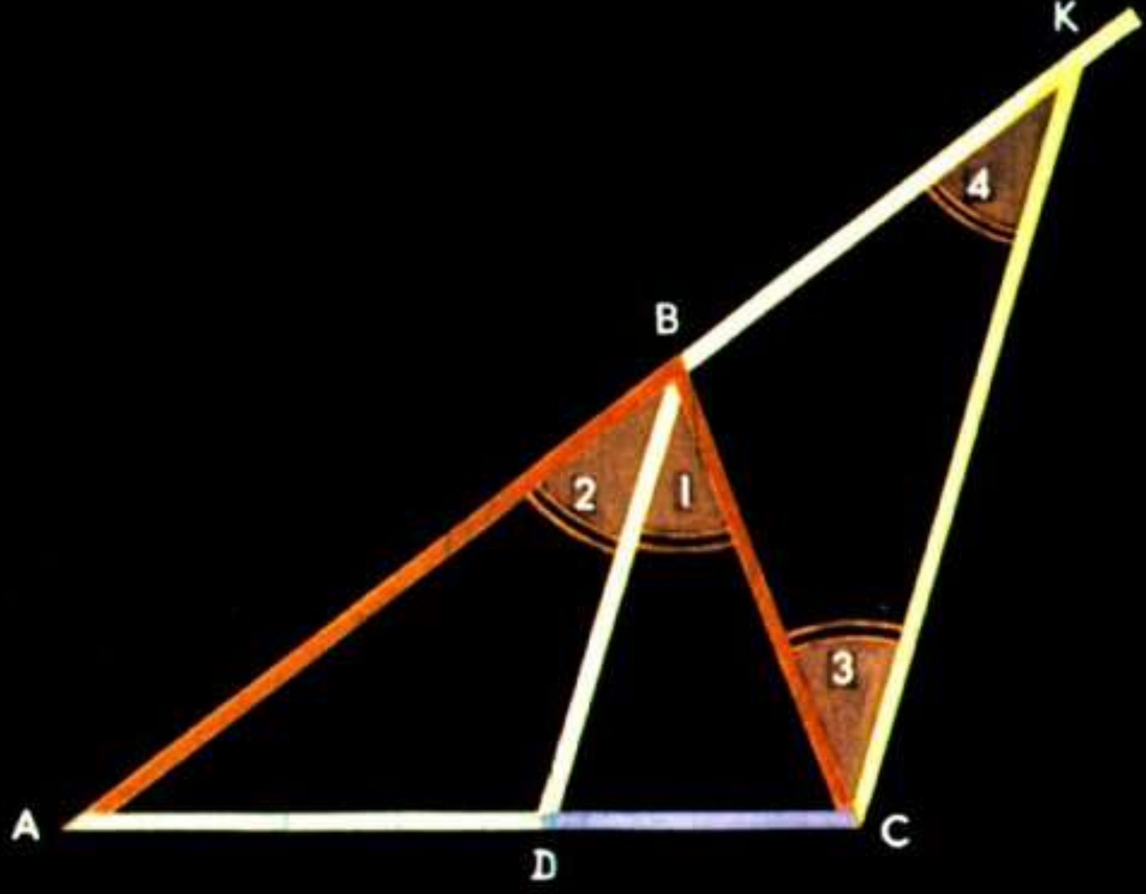
Задача 5. Построить треугольник по данному периметру и отношению его сторон. Объясните ход построения.



Для построения пропорциональных отрезков и деления отрезка на равные части удобно пользоваться пропорциональным циркулем.

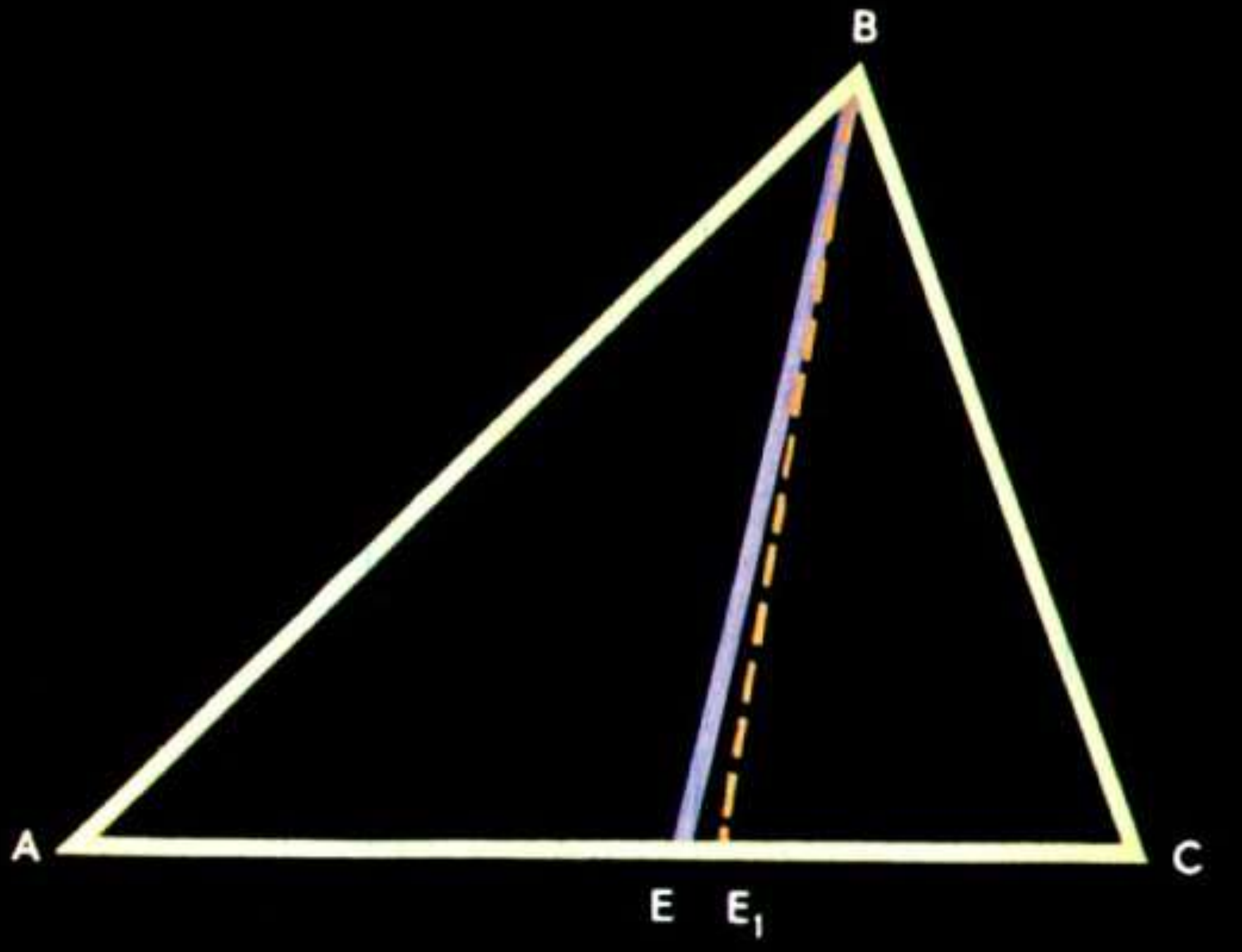
4.
Некоторые пропорциональные отрезки в треугольнике


B
Дано:
△ABC,
∠ABD = ∠DBC
Доказать:
AD/DC = AB/BC
A
D
C
Теорема. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.
31

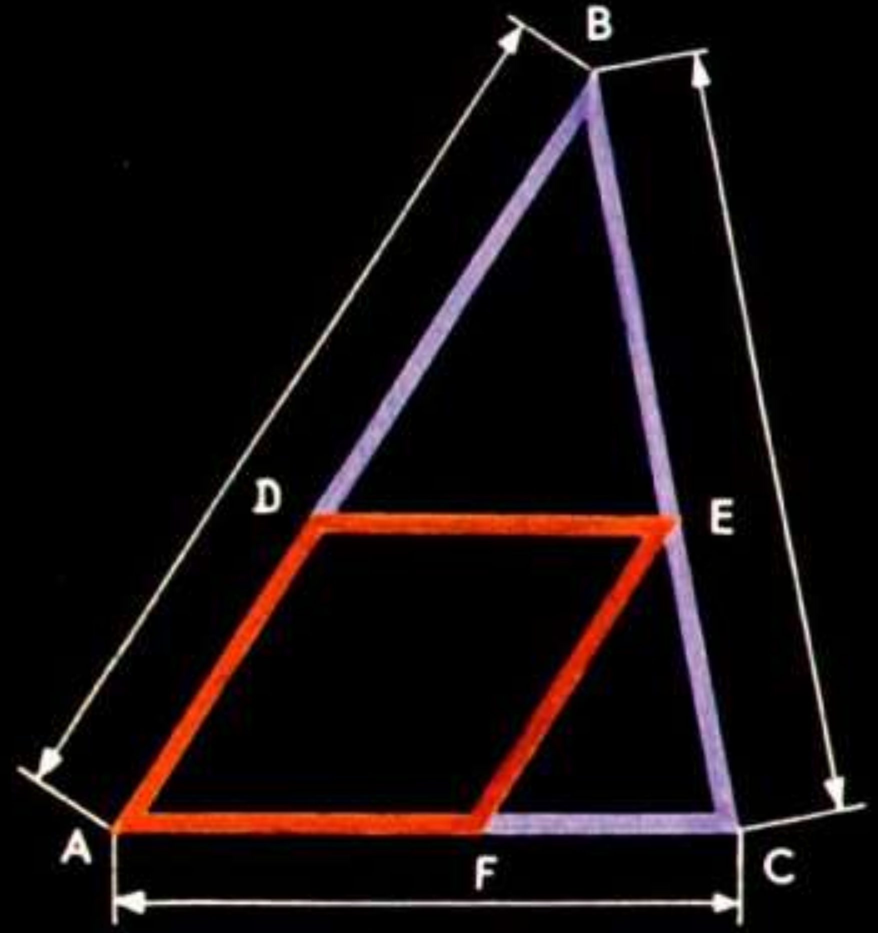


Доказательство. Проведём $CK \parallel DB$, тогда $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BK}$, но $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$, значит, $\angle 3 = \angle 4$ и, следовательно, $BK = BC$, отсюда $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, что и требовалось доказать.

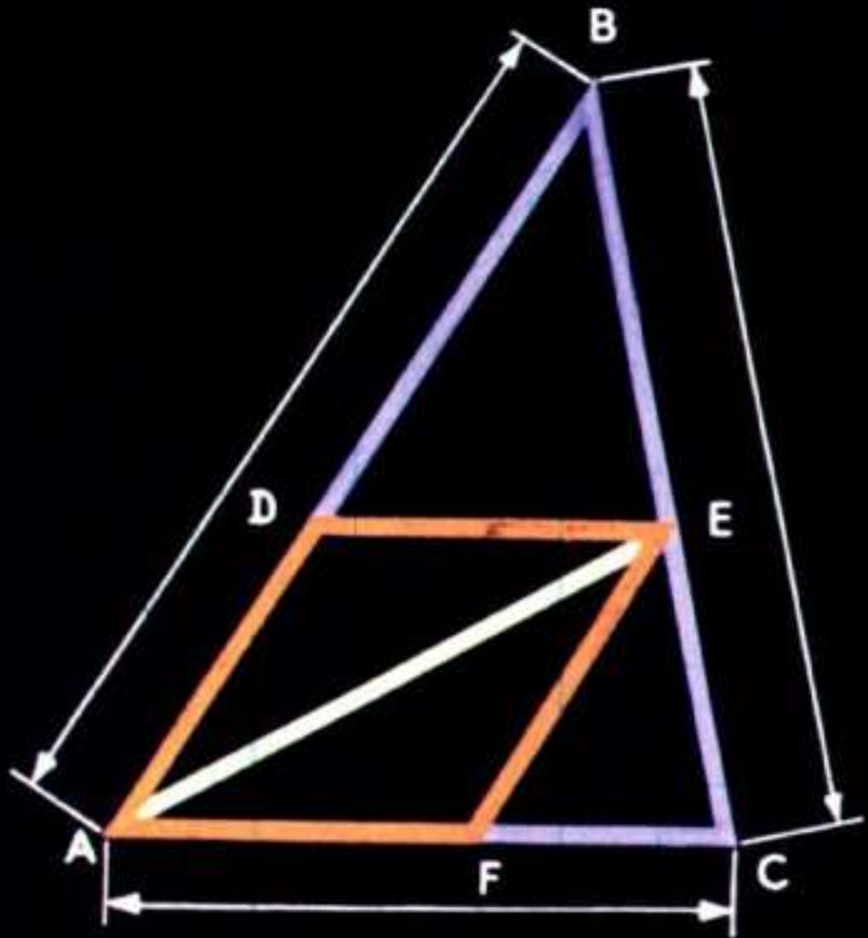
Объясните этапы доказательства.



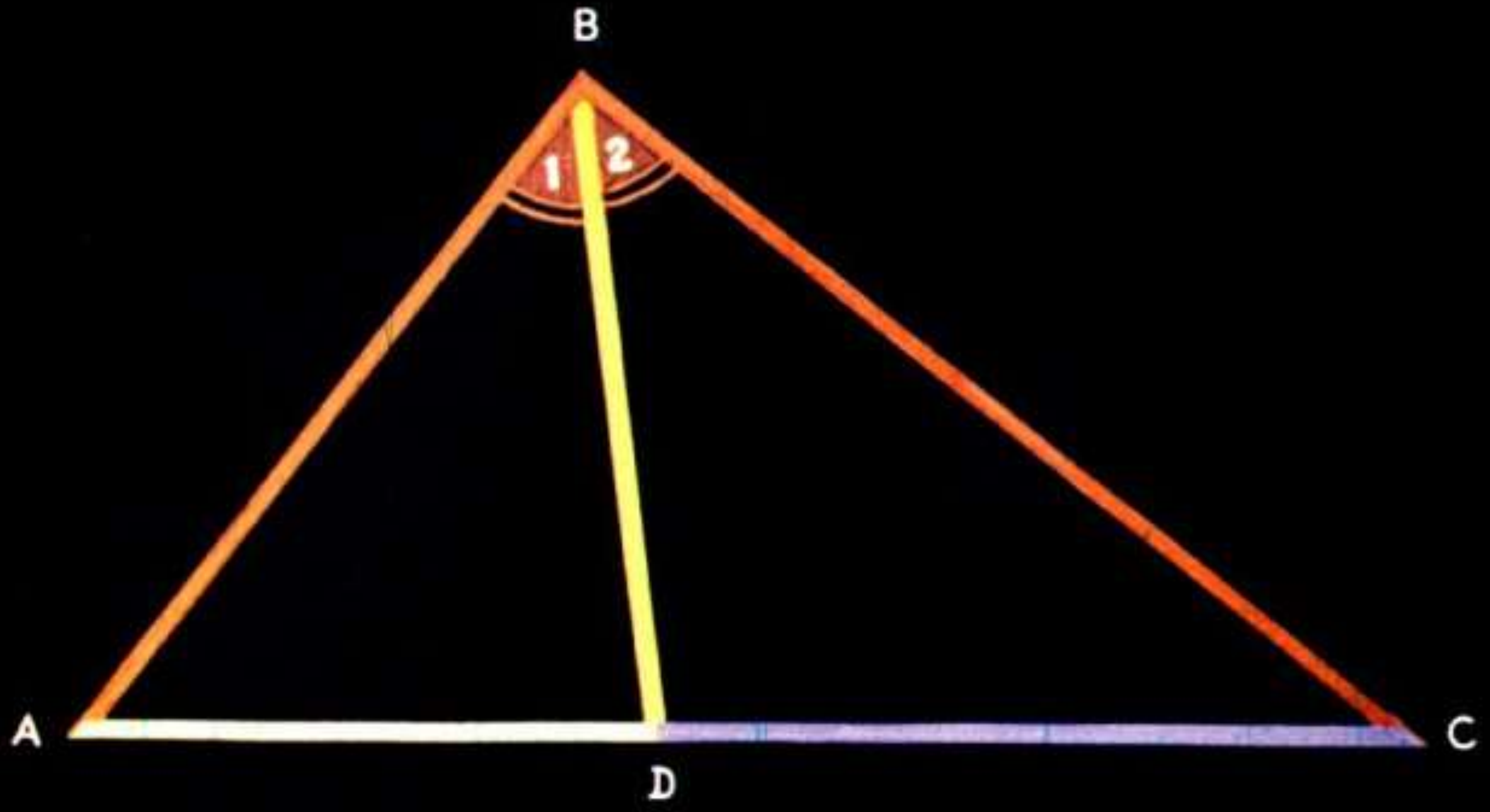
Теорема (обратная). Если прямая BE проходит через вершину B треугольника ABC и делит сторону AC так, что AE:EC= =AB:BC, то прямая BE — биссектриса угла B.
Докажите теорему, пользуясь методом от противного.



Задача. В треугольник ABC вписан ромб ADEF, как показано на чертеже.
Определите отрезки BE и EC, если AB=14 см, BC=12 см и AC=10 см.

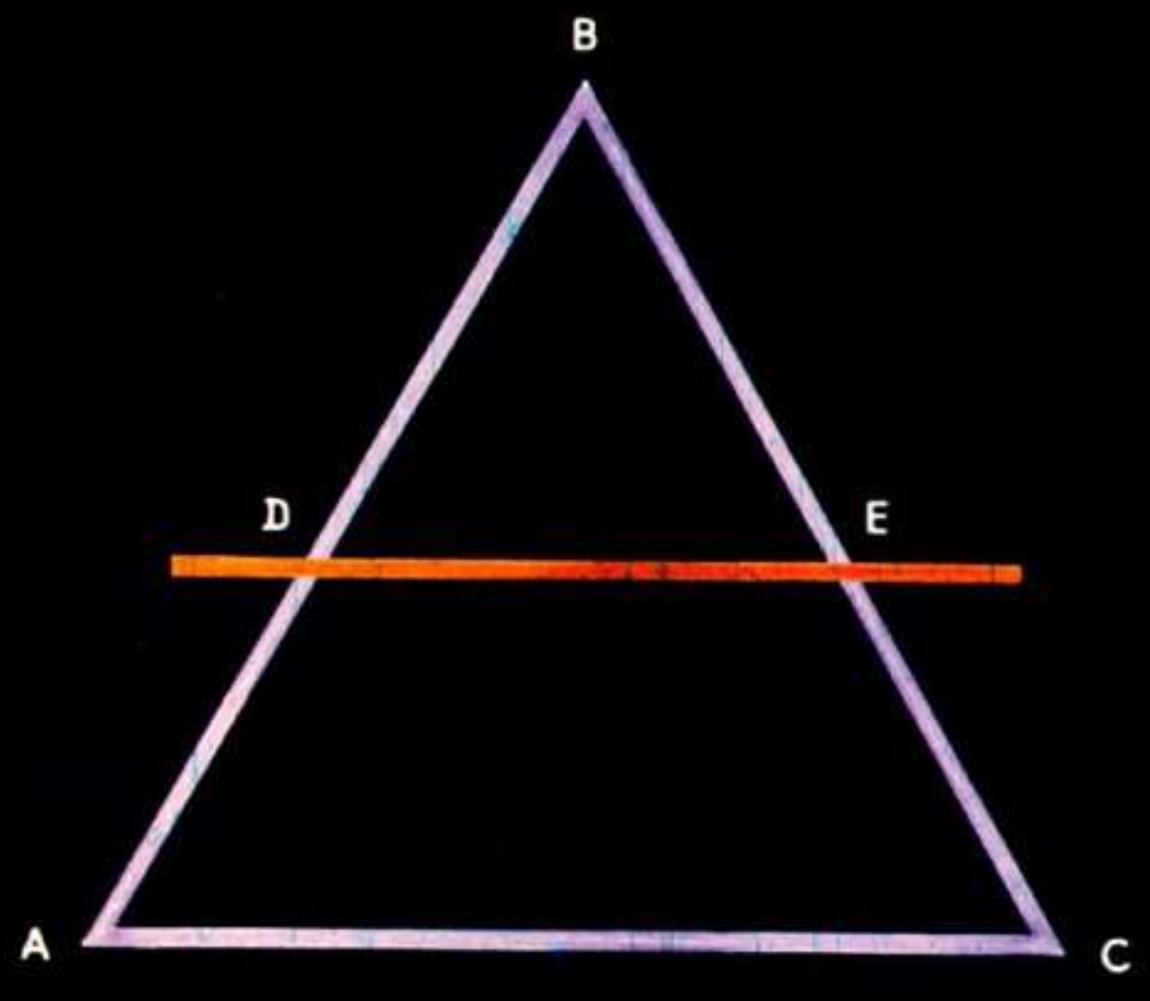


Решение: проведём диагональ AE ромба. Она является биссектрисой $\angle BAC$,—значит, $\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$. Пусть $BE=7x$, тогда $EC=5x$, отсюда $5x+7x=12$, $x=1$. Значит, $BE=7$ см, $EC=5$ см.

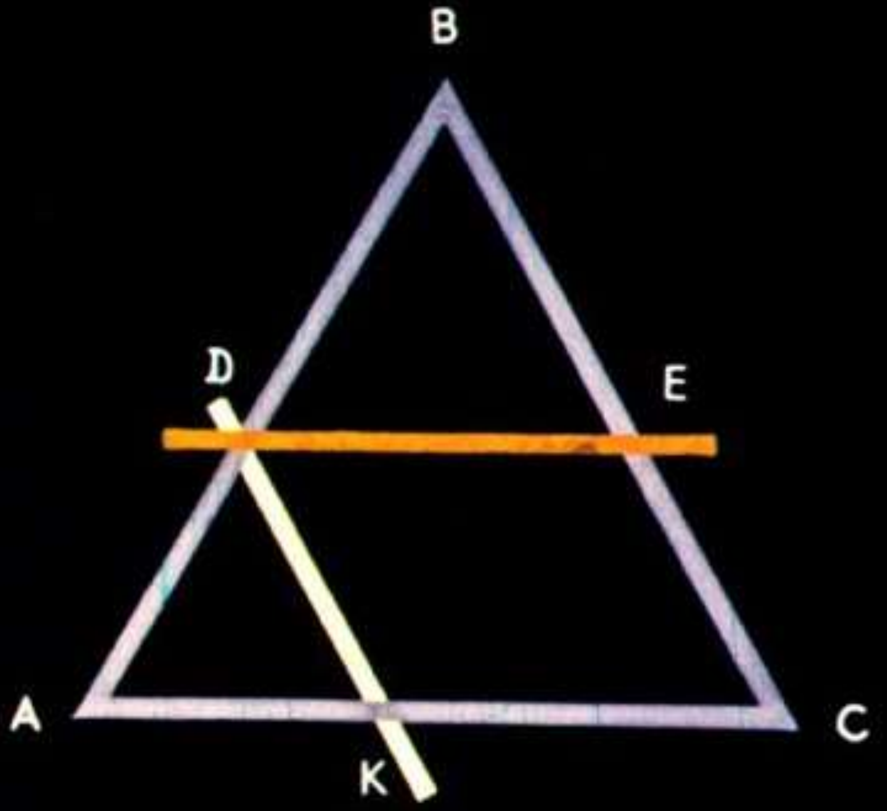


Задача. Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABC = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 15$ см, $DC = 20$ см. Найти AB и BC.

Решение: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$. Пусть $AB = 3x$, тогда $BC = 4x$, отсюда $(3x)^2 + (4x)^2 = 35^2$; $x = 7$. **Ответ:** $AB = 21$ см, $BC = 28$ см.

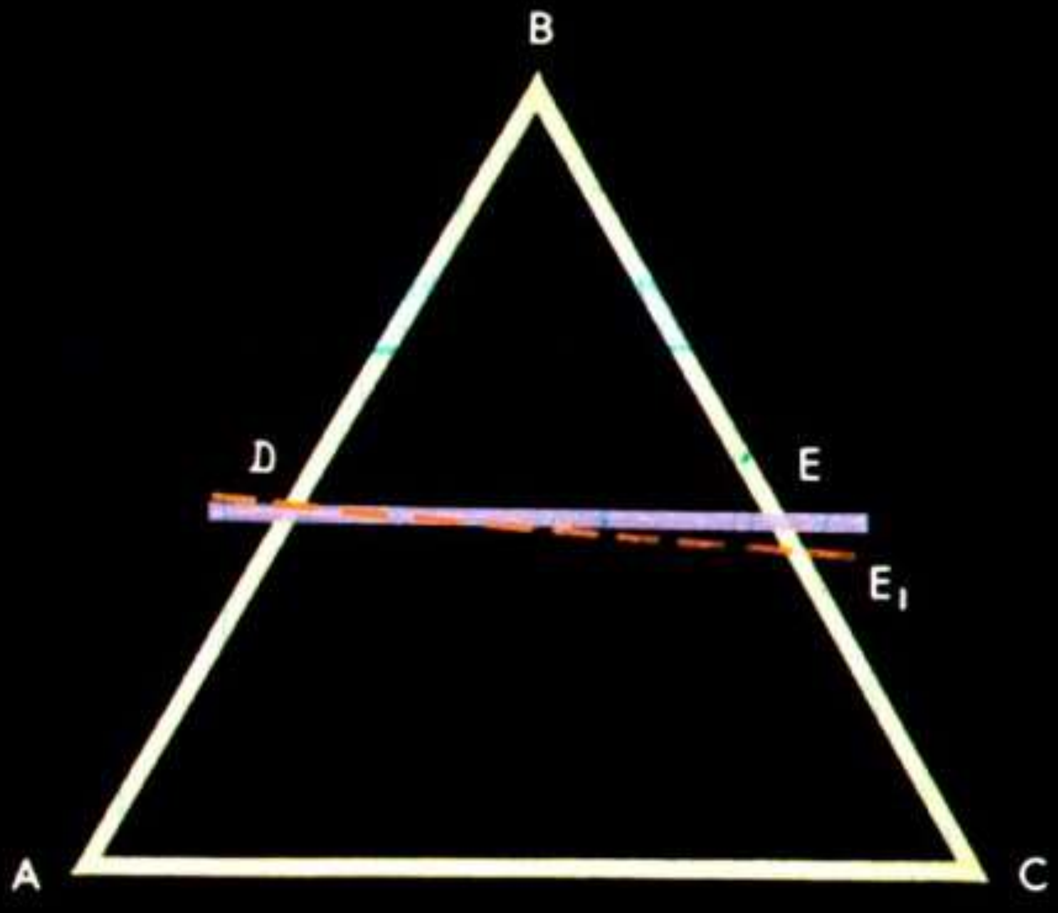


Теорема. Прямая DE, параллельная стороне треугольника ABC, отсекает от него треугольник DBE, стороны которого пропорциональны сторонам треугольника ABC.

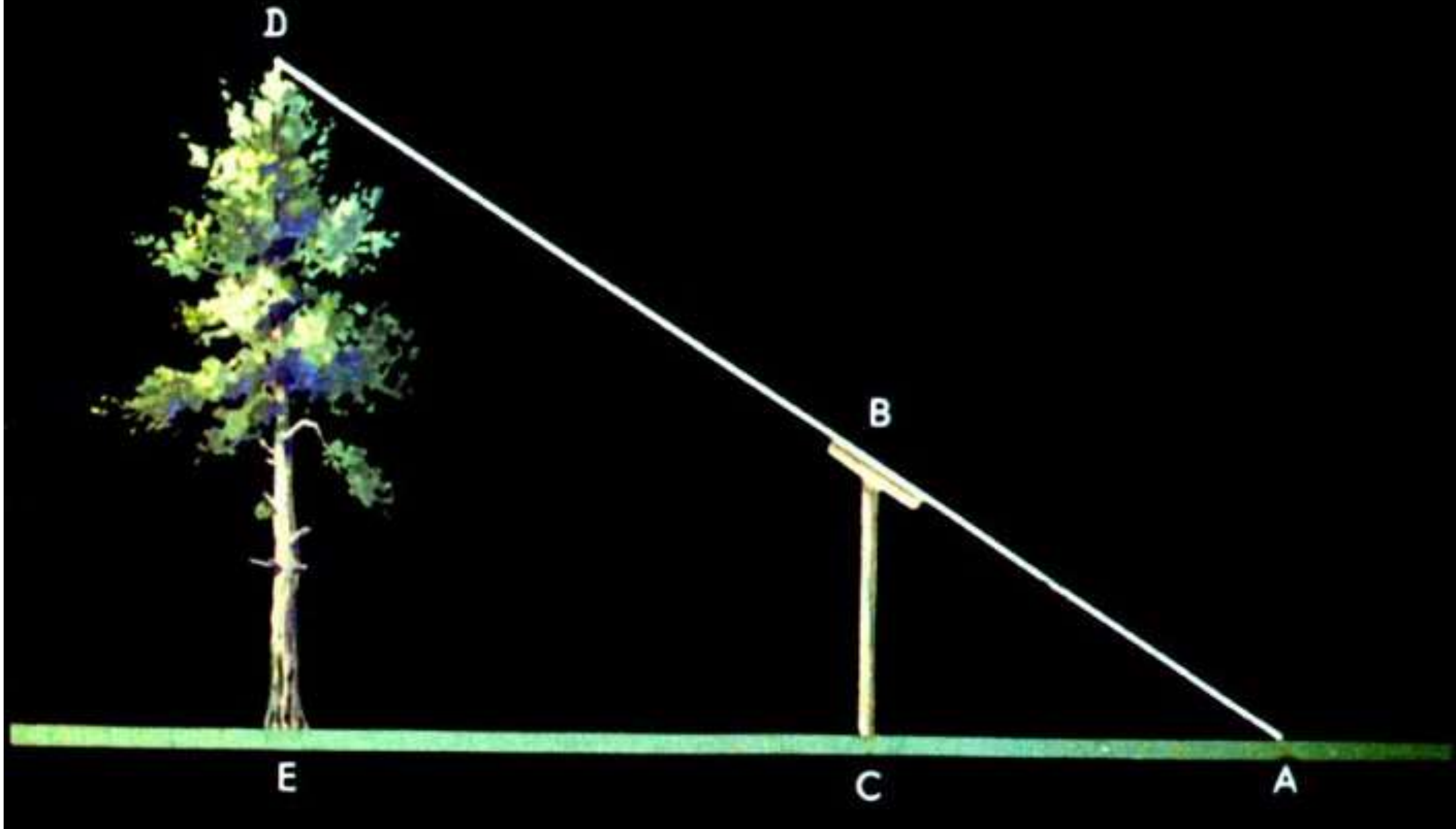


Доказательство. Проведём КД $\parallel$ ВС, тогда $\frac{AC}{KC}=\frac{AB}{DB}$, но $\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BE}$, а так как $KC = DE$, то $\frac{AC}{DE}=\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BE}$, что и требовалось доказать.

Объясните этапы доказательства.



Теорема. Если прямая DE при пересечении двух сторон треугольника ABC делит их так, что $AD:DB=CE:BE$, то эта прямая DE параллельна третьей стороне треугольника.
Докажите методом от противного.



Расскажите, пользуясь рисунком, как определяют высоту дерева.

КОНЕЦ

Диафильм по математике для 8 класса
сделан по заказу
Министерства просвещения РСФСР

Автор
А. Чесноков

Художник
Б. Колесниченко

Редактор
В. Чернина

Д-203-69
Студия «Диафильм», 1969 г.
Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7

Цветной 0-30