А.ГАЙШТУТ

МАТЕМАТИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

В ПОМОЩЬ ПОВТОРЯЮЩИМ МАТЕМАТИКУ ПО СПРАВОЧНИКАМ

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Часть1. Содержание

Преобразование выражений с тригонометрическими функциями

Пример 2.1. Упростить выражение

$$\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}.$$

Пример 2.3. Упростить выражение

$$\left(1-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\sin^2\alpha}\right).$$

Упростить выражения:

2.5. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2.$

2.6. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha.$

2.7. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$

2.8. $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}.$

2.9. $\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{1-2\cos^2\alpha}.$

2.10. $\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

Справочный отдел

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$
$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$	$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha$

Преобразование выражений с тригонометрическими функциями

2.11. $1 - \dfrac{\sin^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

2.12. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$.

2.13. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha$.

2.14. $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

2.15. $\dfrac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

2.16. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$.

2.17. $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

2.18. $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

2.19. $(\operatorname{ctg}\alpha + 1)^2 + (\operatorname{ctg}\alpha - 1)^2$.

2.20. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Доказательство тождеств

Пример 2.21. Доказать тождество

$$\frac{\operatorname{ctg}5\alpha - \operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{ctg}2\alpha - \operatorname{tg}5\alpha} = \frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}5\alpha}.$$

Доказать тождества:

2.24. $(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)\cos^2\alpha = 1.$

2.25. $(1-\cos^2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha) = \mathrm{tg}^2\,\alpha.$

2.26. $\dfrac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha = \cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$

2.27. $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$

2.28. $\dfrac{5\cos\alpha - 4}{3-5\sin\alpha} = \dfrac{3+5\sin\alpha}{4+5\cos\alpha}.$

2.29. $\dfrac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha - \cos^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\,\alpha - \sin^2\alpha} = \mathrm{ctg}^6\,\alpha.$

2.30. $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{1-\sin\alpha\cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha.$

2.31. $\dfrac{\sin\alpha}{1+\mathrm{ctg}\,\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}.$

2.32. $\dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha.$

2.33. $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}\,\alpha + 1}.$

2.34. $\dfrac{\cos\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \sec\alpha} = \sin\alpha.$

2.35. $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha} = \sin^2\alpha.$

2.36. $\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha + 1}{\mathrm{tg}\,\alpha + 1} = \mathrm{ctg}\,\alpha.$

2.37. $\dfrac{\mathrm{tg}\,2\alpha + \mathrm{ctg}\,3\beta}{\mathrm{ctg}\,2\alpha + \mathrm{tg}\,3\beta} = \dfrac{\mathrm{tg}\,2\alpha}{\mathrm{tg}\,3\beta}.$

2.38. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha - 1} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\mathrm{cosec}^2\,\alpha - 1} = 1.$

2.39. $\dfrac{2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha + 3}{2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha + 3} = \mathrm{ctg}^2\,\alpha.$

Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

Пример 2.54. $\operatorname{ctg}\alpha = 4$, $180 < \alpha < 270$. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$.

2.56. Зная, что $\sin\alpha = m$, найти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$,

2.57. Зная, что $\sec\alpha = p$, найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$,

2.58. По данному значению одной из тригонометрических функций и интервалу, в котором находится α, найдите значения остальных функций:

а) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $90 < \alpha < 180$;

б) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $1{,}5\pi < \alpha < 2\pi$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{35}{12}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

г) $\operatorname{tg}\alpha = -3$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

2.59. $\frac{a}{b\cos^2\alpha - c\sin^2\alpha}$ выразить через $\operatorname{ctg}\alpha$.

2.60. Вычислить $\frac{a\sin\alpha + b\cos\alpha}{c\sin\alpha - d\cos\alpha}$,

если: *а*) $\operatorname{tg}\alpha = 2$; *б*) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$.

2.61. $3\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha$ выразить через:

а) $\sin\alpha$; *б*) $\cos\alpha$.

2.62. $\frac{a\operatorname{ctg}\alpha + b\operatorname{tg}\alpha}{c\operatorname{ctg}\alpha - d\operatorname{tg}\alpha}$ выразить через:

а) $\operatorname{tg}\alpha$; *б*) $\operatorname{ctg}\alpha$.

2.66. Известно, что $\sin\alpha + \cos\alpha = p$. Найти:

а) $\sin\alpha\cos\alpha$;

б) $\sin\alpha - \cos\alpha$;

в) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$;

г) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

2.67. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = p$. Найти:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$;

в) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$;

г) $\operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha$.

Исключить α из системы уравнений:

2.68. $\begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = m, \\ \sin\alpha - \cos\alpha = n. \end{cases}$

2.69. $\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m, \\ \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = n. \end{cases}$

2.70. $\begin{cases} \sin^3\alpha + \cos^3\alpha = n, \\ \sin\alpha + \cos\alpha = m. \end{cases}$

2.71. $\begin{cases} \sin^4\alpha - \cos^4\alpha = n, \\ \sin\alpha + \cos\alpha = m. \end{cases}$

2.72. $\begin{cases} \sin^4\alpha + \cos^4\alpha = p, \\ \sin\alpha + \cos\alpha = m. \end{cases}$

2.73. $\begin{cases} \sin^6\alpha + \cos^6\alpha = l, \\ \sin\alpha + \cos\alpha = m. \end{cases}$

2.74. $\begin{cases} \operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha = n, \\ \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m. \end{cases}$

2.75. $\begin{cases} \operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha = n, \\ \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m. \end{cases}$

2.76. $\begin{cases} \operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha = x, \\ \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = y. \end{cases}$

2.77. $\begin{cases} 5\operatorname{cosec}\alpha = x, \\ 4\operatorname{ctg}\alpha = y. \end{cases}$

2.78. $\begin{cases} \operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha = x, \\ \sec\alpha - \cos\alpha = y. \end{cases}$

Вычислить:

1. $\dfrac{3\sin\alpha + 7\cos\alpha}{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

2. $\dfrac{5\sin\alpha + 3\cos\alpha}{4\sin\alpha - \cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -3$

3. $\dfrac{2}{3\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -1$.

4. $\dfrac{5}{1 - 7\sin^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Справочный отдел

Функция $y = f(x)$ называется четной, если вместе с каждым значением переменной x из области определения f значение $-x$ также входит в область определения этой функции и при этом выполняется равенство. $f(x) = f(-x)$.

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если вместе с каждым значением переменной x из области определения f значение $-x$ также входит в область определения этой функции и при этом выполняется равенство: $f(-x) = -f(x)$.

Из шести тригонометрических функций косинус и секанс — четные, остальные нечетные, то есть

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha,\ \sec(-\alpha) = \sec\alpha,$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

Формулы приведения

Пример 2.90 Тригонометрическую функцию $\cos 432°$ привести к наименьшему положительному аргументу.

Решение. $\cos 432° = \cos(360° + 72°) = \cos 72° =$

$$= \cos(90° - 18°) = \sin 18°.$$

Пример 2.91. Вычислить

$$\mathrm{tg}\,40°\ \mathrm{tg}\,41°\ \mathrm{tg}\,39° \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}\,50°.$$

Решение. $\mathrm{tg}\,40°\ \mathrm{tg}\,50° =$

$$= \mathrm{tg}\,40°\ \mathrm{tg}(90° - 40°) = \mathrm{tg}\,40°\ \mathrm{ctg}\,40° = 1.$$

Справочный отдел

Формулами приведения *называются формулы, выражающие тригонометрические функции от аргументов* $-\alpha$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ *через функции от аргумента* α, *где* α — *произвольное (допустимое) значение аргумента.*

При пользовании формулами приведения можно применять правило:

Если угол приводимой тригонометрической функции имеет вид $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, то название приводимой функции не меняется; если аргумент приводимой функции имеет вид $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то название приводимой функции меняется: синус переходит в косинус и наоборот; тангенс переходит в котангенс и наоборот

Знак в правой части формулы приведения зависит от того, какой знак имеет приводимая функция в данной четверти.

Данную тригонометрическую функцию привести к наименьшему положительному аргументу $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$.

2.93. $\sin 547^\circ$.

2.94. $\operatorname{ctg} 1924^\circ$.

2.95. $\operatorname{tg}(-1354^\circ)$.

2.96. $\sin(-934^\circ)$.

2.97. $\operatorname{ctg}(-3984^\circ)$.

2.98. $\cos(-1412^\circ)$.

2.99. $\operatorname{tg} 815^\circ$.

2.100. $\sin(\alpha - 3\pi)$.

2.101. $\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right)$.

2.102. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)$.

2.103. $\sin\left(\frac{5\pi}{3} - \alpha\right)$.

2.104. $\cos\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right)$.

Упростить выражения:

2.105. $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) +$
$+ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$.

2.106. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) +$
$+ \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$.

ФОРМУЛЫ СУММЫ АРГУМЕНТОВ

Справочный отдел

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \mp \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$$

Вычислить:

2.119. $\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \sin 18^\circ$.

2.120. $\sin 65^\circ \cos 55^\circ + \cos 65^\circ \sin 55^\circ$.

2.121. $\dfrac{\cos 10^\circ \cos 20^\circ - \sin 20^\circ \sin 10^\circ}{\sin 11^\circ \cos 19^\circ + \cos 11^\circ \sin 19^\circ}$.

2.122. $\dfrac{\operatorname{ctg} 80^\circ + \operatorname{ctg} 40^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ}$.

2.123. $\dfrac{\operatorname{ctg} 40^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ - 1}{\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ}$.

Упростить выражения:

2.124. $\dfrac{\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{15} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{15}}{\sin \frac{7\pi}{30} \cos \frac{4\pi}{15} + \cos \frac{7\pi}{30} \sin \frac{4\pi}{15}}$.

2.125. $\dfrac{\cos 18^\circ \cos 28^\circ + \cos 108^\circ \sin 208^\circ}{\sin 34^\circ \sin 146^\circ + \sin 236^\circ \sin 304^\circ}$.

2.126. $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta) + \sin \beta \cos \alpha}$.

2.127. $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta}$.

2.128. $\dfrac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}$.

2.129. $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

2.130. $\sin 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha - \cos 2\alpha$.

2.131. $\sin 2\alpha \operatorname{tg}\alpha + \cos 2\alpha$.

2.132. $\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ - \sin 100^\circ$.

2.133. $\cos 10^\circ - 2\cos 50^\circ - \cos 70^\circ$.

Доказать тождества:

2.134. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

2.135. $\cos^2\alpha - \cos(60^\circ+\alpha)\cos(60^\circ-\alpha) = \dfrac{3}{4}$.

2.136. $\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha + \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) = \dfrac{1}{2}\cos^2\alpha$.

2.137. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha = \operatorname{cosec}2\alpha$.

2.138. $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha = \sec 2\alpha$.

2.139. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

2.140. $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(45^\circ+\alpha)}{2\sin(45^\circ+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

2.141. $\dfrac{\sin\alpha+2\sin(60^\circ-\alpha)}{2\cos(30^\circ-\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$.

2.142. $\dfrac{1-\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Функции удвоенного и половинного аргумента

Пример 2.146. Доказать тождество

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} + 2.$$

Решение. Перепишем равенство в виде

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = 2.$$

Докажем его справедливость:

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 3\alpha\cos\alpha - \cos 3\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2,$$

что и требовалось доказать.

Упростить выражения:

2.147. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin 2\alpha$.

2.148. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$.

2.149. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$.

2.150. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\,\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$.

2.151. $2\sin 40^\circ \sin 50^\circ$.

2.152. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

2.153. $(\operatorname{tg}2\alpha + \sec 2\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

2.154. $\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}\alpha} - \dfrac{1}{1-\operatorname{ctg}\alpha}$.

2.155. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-1}$.

Справочный отдел

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$
$$\operatorname{ctg}2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$
$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$
$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

Вычислить без помощи таблиц:

2.156. $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$.

2.157. $\cos^2 15^\circ - \cos^2 75^\circ$.

2.158. $\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$.

2.159. $1 - 2 \sin^2 75^\circ$.

2.160. $2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$.

Доказать тождество:

2.161. $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

2.162. $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

2.163. $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

2.164. $\frac{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

2.165. $4 \sin^4 \alpha + \sin^2 2\alpha = 4 \sin^2 \alpha$.

2.166. $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4$.

2.167. $\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 2 \operatorname{tg} 20^\circ$.

2.168. $\operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha = \cos 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha$.

2.169. $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$.

2.170. $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha$.

2.171. $8 \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = 1$.

2.172. $16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1$.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

Представить в виде суммы следующие произведения:

2.179. $\cos 25^\circ \cos 10^\circ$.

2.180. $\sin 10^\circ \sin 8^\circ \sin 6^\circ$.

Представить в виде произведения:

2.181. $\sqrt{3} + \operatorname{tg} \alpha$.

2.182. $\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha - 1$.

2.183. $\sin \alpha - \cos \alpha$.

2.184. $1 + 2 \cos \alpha$.

2.185. $1 - 2 \sin \alpha$.

2.186. $\sqrt{3} + 2 \cos \alpha$.

2.187. $\dfrac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$.

2.188. $1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$.

2.189. $\dfrac{\cos 35^\circ - \sin 25^\circ}{\cos 35^\circ + \sin 25^\circ}$.

2.190. $\operatorname{tg} 48^\circ + \operatorname{ctg} 68^\circ$.

2.191. $\sin \alpha + \sin \beta + \sin (\alpha + \beta)$.

2.192. $1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$.

2.193. $\sin \alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 4\alpha$.

2.194. $1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$.

Справочный отдел

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta),$$
$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta),$$
$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta),$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$
$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta},$$
$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Пример 2.203. Вывести рекуррентную формулу

$$\cos (n + 1) \alpha = 2 \cos \alpha \cos n\alpha - \cos (n - 1) \alpha$$

и, используя ее, найти косинусы кратных углов $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$.

Решение. $\cos (n + 1) \alpha = \cos (n\alpha + \alpha) =$

$$= \cos n\alpha \cos \alpha - \sin n\alpha \sin \alpha =$$

$$= (\cos n\alpha \cos \alpha + \cos n\alpha \cos \alpha) -$$

$$- (\cos n\alpha \cos \alpha + \sin n\alpha \sin \alpha) =$$

$$= 2 \cos \alpha \cos n\alpha - \cos (n - 1) \alpha.$$

Итак, $\cos (n + 1) \alpha = 2 \cos \alpha \cos n\alpha - \cos (n - 1) \alpha$.

При $n = 1$ имеем $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

При $n = 2$ имеем $\cos 3\alpha = 2 \cos \alpha \cos 2\alpha - \cos \alpha =$

$$= 2 \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) - \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

При $n = 3$ имеем $\cos 4\alpha = 2 \cos \alpha \cos 3\alpha - \cos 2\alpha =$

$$= 2 \cos \alpha (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) - (2 \cos^2 \alpha - 1) =$$

$$= 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1.$$

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1.$$

Пример 2.204. Вывести рекуррентную формулу

$$\sin (n + 1) \alpha = 2 \sin \alpha \cos n\alpha + \sin (n - 1) \alpha$$

и, используя ее, найти синусы кратных углов $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$.

Решение. $\sin (n + 1) \alpha = \sin (n\alpha + \alpha) =$

$$= \sin n\alpha \cos \alpha + \cos n\alpha \sin \alpha =$$

$$= (\sin n\alpha \cos \alpha - \cos n\alpha \sin \alpha) +$$

$$+ (\cos n\alpha \sin \alpha + \cos n\alpha \sin \alpha) =$$

$$= \sin (n\alpha - \alpha) + 2 \cos n\alpha \sin \alpha.$$

Итак, $\sin (n + 1) \alpha = 2 \sin \alpha \cos n\alpha + \sin (n - 1) \alpha$.

При $n = 1$ имеем $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

При $n = 2$ имеем $\sin 3\alpha = 2 \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha =$

$$= 2\sin\alpha\,(1 - 2\sin^2\alpha) + \sin\alpha =$$

$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Пример 2.205. Доказать тождество

$$\frac{8\cos^4\alpha - 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 3\cos\alpha + 1}{8\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1} = -\operatorname{tg}\frac{7\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Решение. $\dfrac{8\cos^4\alpha - 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 3\cos\alpha + 1}{8\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1} =$

$$= \frac{(8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1) - (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)}{(8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1) + (4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{\cos 4\alpha - \cos 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{-\sin\dfrac{7\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{7\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{7\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.6. Вычислить без помощи таблиц $\sin 18^\circ$ и $\cos 18^\circ$.

Решение. $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$, $\sin(2\cdot 18^\circ) = \cos(3\cdot 18^\circ)$, откуда $2\sin 18^\circ\cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$,

$$2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3,$$

$$2\sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3,$$

$$4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0.$$

Учитывая, что $\sin 18^\circ > 0$, имеем:

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16 - 6 + 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

О т в е т: $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$, $\cos 18^\circ = \dfrac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$.

Пример 2.207. Доказать формулы:

а) $4 \sin \alpha \sin (60^\circ - \alpha) \sin (60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha$;

б) $4 \cos \alpha \cos (60^\circ - \alpha) \cos (60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha$;

в) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha) \operatorname{tg} (60^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha$;

г) $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} (60^\circ - \alpha) \operatorname{ctg} (60^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} 3\alpha$.

Решение. *а*) $4 \sin \alpha \sin (60^\circ - \alpha) \sin (60^\circ + \alpha) =$

$$= 2 \sin \alpha (\cos 2\alpha - \cos 120^\circ) = 2 \sin \alpha \left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha = \sin (\alpha + 2\alpha) + \sin (\alpha - 2\alpha) +$$

$$+ \sin \alpha = \sin 3\alpha - \sin \alpha + \sin \alpha = \sin 3\alpha,$$

что и требовалось доказать.

$$в)\ \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{4 \sin \alpha \sin (60^\circ - \alpha) \sin (60^\circ + \alpha)}{4 \cos \alpha \cos (60^\circ - \alpha) \cos (60^\circ + \alpha)} =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha) \operatorname{tg} (60^\circ + \alpha),$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.208. Вычислить без помощи таблиц

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ.$$

Решение. $\sqrt{3} \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ =$

$$= \sqrt{3} \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} (60^\circ - 10^\circ) \operatorname{tg} (60^\circ + 10^\circ) =$$

$$= \sqrt{3} \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 2.209. Проверить равенство

$$\sin 84^\circ \sin 24^\circ \sin 48^\circ \sin 12^\circ = \frac{1}{16}.$$

Решение. $\sin 84^\circ \sin 24^\circ \sin 48^\circ \sin 12^\circ =$

$$= \frac{4 \sin 24^\circ \sin (60^\circ - 24^\circ) \sin (60^\circ + 24^\circ)}{4 \sin 36^\circ} \times$$

$$\times \frac{4 \sin 12^\circ \sin (60^\circ - 12^\circ) \sin (60^\circ + 12^\circ)}{4 \sin 72^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 72^\circ}{4 \sin 36^\circ} \cdot \frac{\sin 36^\circ}{4 \sin 72^\circ} = \frac{1}{16},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.210. Доказать формулы:

а) $\sin^3 \alpha = \dfrac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$;

б) $\cos^3 \alpha = \dfrac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$.

Решение. Используя функции утроенных аргументов
$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$,
получаем искомые формулы.

Упражнения

Доказать тождество:

2.211. $8 \cos^4 \alpha - 4 \cos^3 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 1 = -2 \sin \dfrac{7\alpha}{2} \sin \dfrac{\alpha}{2}$.

2.212. $8 \cos^4 \alpha + 4 \cos^3 \alpha + 8 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1 = 2 \cos \dfrac{7\alpha}{2} \cos \dfrac{\alpha}{2}$.

2.213. Докажите, что $\sin 10°$ является корнем уравнения $8x^3 - 6x + 1 = 0$.

2.214. Доказать справедливость равенства

$$\cos^2 (\alpha + \beta) + \cos^2 (\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta = 1.$$

Проверить равенство:

2.215. $\operatorname{ctg} 10° \operatorname{ctg} 50° \operatorname{ctg} 70° = \operatorname{ctg} 30°$.

2.216. $\sin^2 70° \sin^2 50° \sin^2 10° = \dfrac{1}{64}$.

2.217. $\sin 10° \sin 30° \sin 50° \sin 70° = \dfrac{1}{16}$.

2.218. $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \dfrac{3}{16}$.

2.219. $\dfrac{0{,}25 - \cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80°}{\cos 10° \cos 30° \cos 50° \cos 70°} = 1$.

2.220. $\cos 70° + 8 \cos 20° \cos 40° \cos 80° = 2 \cos^2 35°$.

2.221. $\cos 50° + 8 \cos 200° \cos 220° \cos 80° = 2 \sin^2 65°$.

2.222. $\operatorname{tg} 6° \operatorname{tg} 42° \operatorname{tg} 66° \operatorname{tg} 78° = 1$.

2.223. Доказать тождество:

$\operatorname{ctg}(30^\circ - \alpha)\operatorname{ctg}(150^\circ - \alpha)\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha$.

Вычислить:

2.224. $\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ \cos 45^\circ$.

2.225. $\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ$.

Представить в виде произведения:

2.226. $\sin^3 20^\circ + \cos^3 10^\circ$.

2.227. $4\sin^3\alpha\cos 3\alpha + 4\cos^3\alpha\sin 3\alpha$.

Преобразовать в произведение:

2.237. $1 - 4\sin^2\alpha$.

2.238. $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$.

2.239. $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta)$.

2.240. $\sin 4\alpha - 2\cos^2 2\alpha + 1$.

2.241. $\sin^2(\alpha + 90^\circ) - 3\cos^2(\alpha - 90^\circ)$.

2.242. $\sin^2\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$.

2.243. $3 - 4\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

2.244. $1 - 3\operatorname{tg}^2\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$.

2.245. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + 2$.

2.246. $\sec^4\alpha - \operatorname{cosec}^4\alpha$.

2.247. $\dfrac{\operatorname{tg}^4 \alpha - \operatorname{tg}^6 \alpha}{\operatorname{ctg}^4 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

2.248. $\operatorname{tg}^2 \left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{ctg}^2 \left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

2.249. $1 + \cos (2\alpha + 270^\circ) + \sin (2\alpha + 450^\circ)$.

2.250. $1 - \cos (2\alpha - 270^\circ) + \sin (2\alpha + 270^\circ)$.

2.251. $1 - \cos (2\alpha - \pi) - \cos (4\alpha + \pi) + \cos (6\alpha - 2\pi)$.

2.252. $\dfrac{\sin \alpha - 2 \cos 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos \alpha - 2 \sin 3\alpha - \cos 5\alpha}$.

2.253. $\dfrac{\sin 4\alpha + \sin 5\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha}$.

2.254. $\dfrac{\cos 7\alpha - \cos 8\alpha - \cos 9\alpha + \cos 10\alpha}{\sin 7\alpha - \sin 8\alpha - \sin 9\alpha + \sin 10\alpha}$.

2.255. $\dfrac{\sin 13\alpha + \sin 14\alpha + \sin 15\alpha + \sin 16\alpha}{\cos 13\alpha + \cos 14\alpha + \cos 15\alpha + \cos 16\alpha}$.

2.256. $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha$.

2.257. $1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha$.

2.258. $-\cos 5\alpha \cos 4\alpha - \cos 4\alpha \cos 3\alpha + 2 \cos^2 2\alpha \cos \alpha$.

2.259. $\sin 10\alpha \sin 8\alpha + \sin 8\alpha \sin 6\alpha - \sin 4\alpha \sin 2\alpha$.

2.260. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin 4\alpha + 1 - 2 \cos^2 2\alpha$.

2.261. $3 - 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha - 8 \cos^4 2\alpha$.

2.262. $\operatorname{tg}^3 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha + 3$.

2.263. $\operatorname{tg}^4 \alpha - 4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3$.

2.264. $6 \sin^2 2\alpha - 1 - \cos 4\alpha$.

2.265. $2 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 4\alpha - 3$.

2.266. $\dfrac{\sin (2\alpha - \beta)}{\cos 4\alpha} + \dfrac{\sin \beta}{\cos 2\alpha}$.

2.267. $3 + 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha$.

2.268. $\sqrt{1 + \sin \dfrac{\alpha}{2}} - \sqrt{1 - \sin \dfrac{\alpha}{2}}$, если $0 < \alpha \leq 180^\circ$.

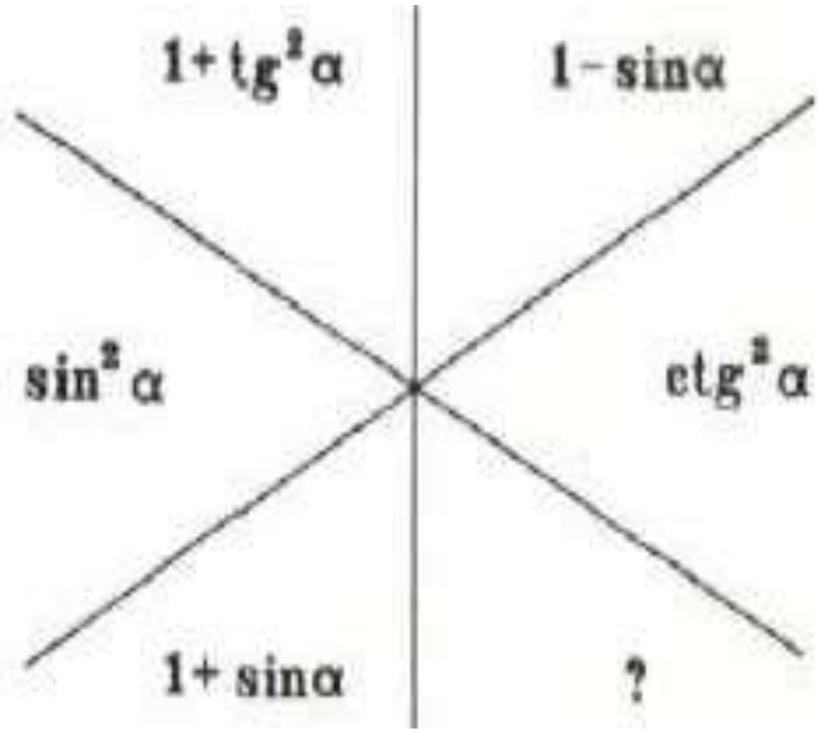
2.269. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos (\alpha - \beta)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛЮБИТЕЛЕЙ ПОДУМАТЬ

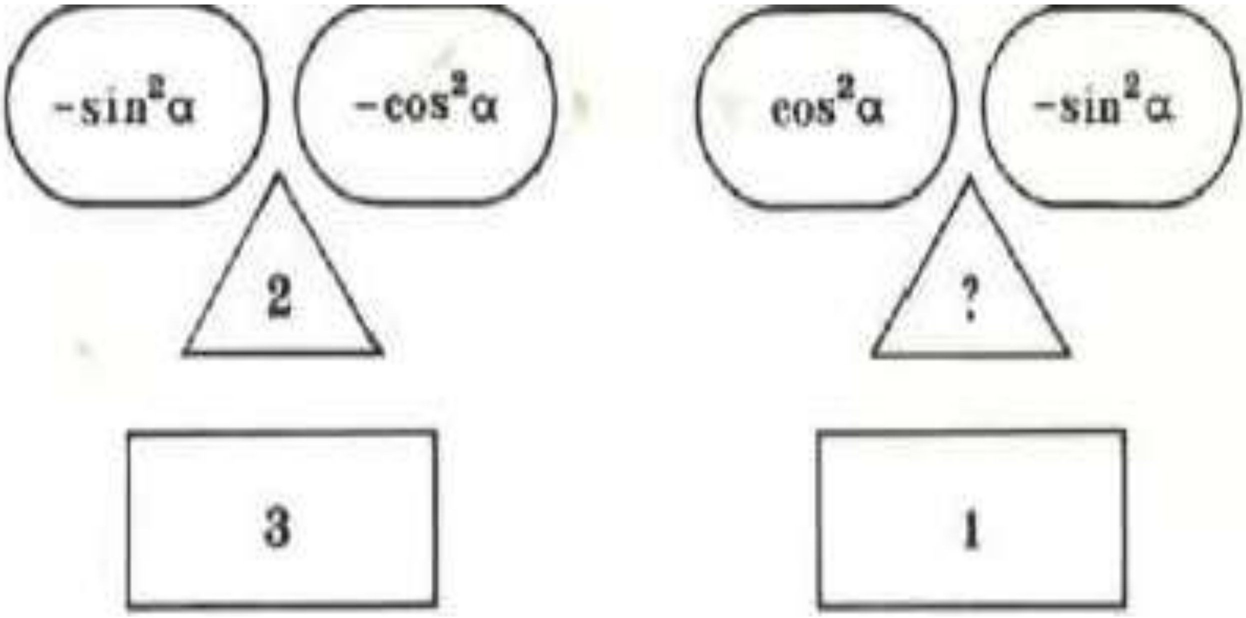
1. Найти неизвестное выражение

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	1
7	24	25
$\dfrac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}}$	$?$

2. Найти неизвестное выражение



3. Найти неизвестное выражение



4. Найти неизвестное выражение

$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	1
$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	2
$1+\dfrac{a}{\sqrt{a^2+\text{в}^2}}$	$\dfrac{1}{a+\sqrt{a^2+\text{в}^2}}$	?

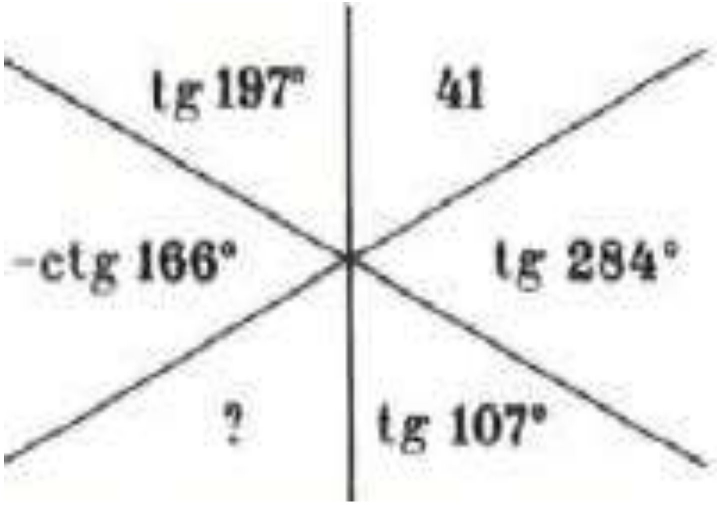
5. Найти неизвестное выражение

$1+\mathrm{tg}^2\alpha$	$1+\mathrm{ctg}^2\alpha$	$\mathrm{tg}^2\alpha$
$1+\dfrac{1}{m}$	$1-\dfrac{1}{m}$	$\dfrac{m+1}{m-1}$
$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$	?

6. Найти неизвестное выражение

$\sin\alpha$	$\dfrac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$\sec\alpha$	?

7. Найти неизвестное выражение



8. Найти неизвестное выражение

$\operatorname{tg} 365°$	$\operatorname{ctg} 185°$
$\operatorname{tg} 200°$	$\operatorname{ctg} 380°$
$1\frac{2}{3}$	?

9. Найти неизвестное выражение

$\sin 193$	$\cos 283$	0
$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$	$1-\sqrt{3}$	2
$5-3\cos^2\alpha$	$2-3\sin^2\alpha$	?

10. Найти неизвестное выражение

$\operatorname{tg} 212^\circ$	$\operatorname{tg} 598^\circ$	1
$7-\sin^2\alpha$	$\dfrac{3}{6+\cos^2\alpha}$	3
$\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$	?

11. Найти неизвестное выражение

$\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\cos\alpha$	$\dfrac{1}{2}$	$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})\sin\alpha$
$\sqrt{18}+2\sqrt{3}$	?	$\sqrt{50}+\sqrt{12}$

12. Найти неизвестное выражение

$2\sqrt{12}$	$7\sqrt{3}$	$\sqrt{27}$
$\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos\alpha$	?	$\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\sin\alpha$

13. Найти неизвестное выражение

$3{,}2\cdot 10^{7}$	$4\cdot 10^{-5}$	$1{,}28\cdot 10^{3}$
$\frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}$	$\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$	?

14. Найти неизвестное выражение

$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$1+\sin 2\alpha$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{12}$	27
$\sqrt{4+\sqrt{7}}$	$\sqrt{4-\sqrt{7}}$	?