Г.ФИЛИППОВСКИЙ

ПЕДАГОГИКА ТРИСЕКЦИИ УГЛА

ПЕДАГОГИКА ТРИСЕКЦИИ УГЛА

■ Древнегреческие математики не случайно уделяли большое внимание задачам на построение. Эти задачи, выполненные циркулем и линейкой, несут в себе не только элементы знаний важнейших геометрических фактов, но и конструкторского и творческого мышления, находчивости и изобретательности. Три знаменитые задачи древности, не поддававшиеся решению при помощи циркуля и линейки, всегда волновали лучшие математические умы. А среди них наибольший интерес вызывала задача о трисекции угла — легкостью своей постановки: *«Разделите произвольный угол на три равные части»*.

Только после того, как в первой половине XIX в. было строго показано, что трисекция угла (равно как и задачи об удвоении куба и квадратуре круга) выводит на уравнение третьей степени, не имеющее рациональных корней и неразрешимое при помощи циркуля и линейки, количество энтузиастов в этом вопросе резко поубавилось...

Казалось бы, тема исчерпана. Но школьная геометрия располагает задачами, которые чудесным образом украшают тему «трисекции угла». Тем более что среди авторов задач мы обнаруживаем такие замечательные имена, как Архимед, Никомед, Чева, Бернулли, Декарт!

А «следовать мыслям великих людей есть занятие достойнейшее». К тому же задачи, связанные с трисекцией угла, вызывают живой интерес у учащихся 7–8-х классов. Они эмоциональны, интересны, полезны, зачастую остроумны. И в самом лучшем смысле этого слова «провоцируют» учащихся на творчество! Стало быть, они педагогичны и могут быть украшением урока геометрии.

Задача 1. Сторону BC треугольника ABC разделили точками K и N на три равные части. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, или опровергните это утверждение.

Доказательство. Допустим, что это так (рис. 1). Тогда AK — биссектриса и медиана в треугольнике ABN. Значит, и высота. Аналогично, AN — биссектриса и медиана в треугольнике ACK. Следовательно, и высота. Но тогда из точки A проведено два перпендикуляра к стороне BC, что невозможно. То есть неверно, что $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

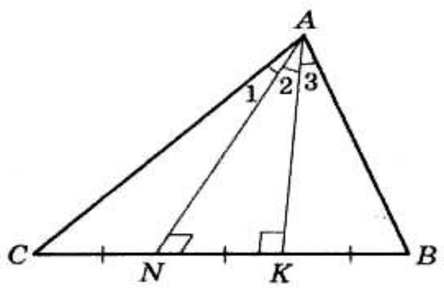

Рис. 1

Задача 2. Выполните трисекцию угла 54°.

Решение. Пусть $\angle BAC = 54°$. Восстановим из вершины A перпендикуляр AT к лучу AC (рис. 2). Тогда $\angle TAB = 90° - 54° = 36°$. Проведя биссектрису угла TAB, получим угол, равный 18° и составляющий третью часть угла 54°. Остается два раза отложить угол 18° внутри угла BAC.

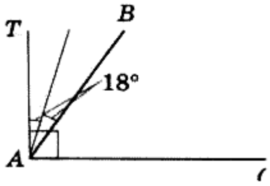

Рис. 2

Задача 3. Дан угол, равный 54°. Пользуясь только циркулем, осуществите трисекцию этого угла.

Решение. Пусть $\angle BAC = 54°$. С центром в точке A проводим окружность ω произвольного радиуса, пересекающую стороны AC и AB в точках T и Q соответственно (рис. 3). От точки T на окружности ω раствором циркуля, равным радиусу ω, делаем последовательно засечки: D, E, F. Причем точка F диаметрально противоположна T (*покажите!*). Далее раствором циркуля, равным TQ, делаем две засечки от точки Q — получаем точки L и M. Тогда градусная мера дуги FM равна $180° - 54° \cdot 3 = 18°$. Остается из точки T сделать две засечки раствором циркуля, равным FM. Полученные точки K и N и будут делить дугу TQ на три равные части.

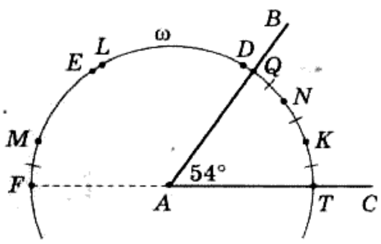

Рис. 3

Задача 4. Дан угол A, равный 108°. Проведя не более двух линий, постройте угол, составляющий третью часть угла A.

Решение. Окружность с центром в точке A произвольного радиуса пересекает стороны угла в точках B и C. Это первая линия (рис. 4). Вторая линия — прямая BC. Тогда

$$\angle 1 = \angle 2 = \frac{180° - 108°}{2} = 36°,$$

что составляет третью часть угла 108°.

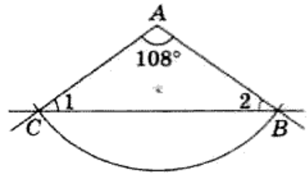

Рис. 4

Задача 5. *(Архимед)* Дан угол AOB. Проведена окружность ω (O), отрезки OA и OB равны и равны R. Докажите, что если бы удалось с помощью циркуля и линейки «вставить» отрезок A–K–N такой, что $KN = R$ (рис. 5), то трисекция угла AOB была бы выполнена.

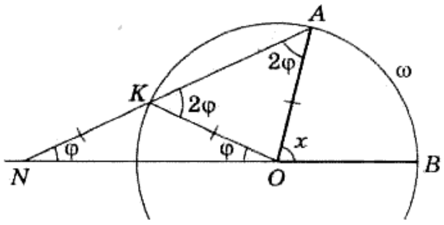

Рис. 5

Доказательство. Покажем, что угол ANO составляет третью часть данного угла AOB. Пусть $\angle ANO = \varphi$. Тогда $\angle KON = \varphi$ ($KN = KO = R$), $\angle OKA = 2\varphi$ (внешний для треугольника OKN). Значит, $\angle OAK = 2\varphi$ ($OA = OK = R$). И, наконец, $\angle AOB = x$ является внешним для треугольника AON. То есть $x = \varphi + 2\varphi = 3\varphi$.

Замечание. С «легкой» руки Архимеда такой прием, неосуществимый с помощью циркуля и линейки, стал называться «методом вставок».

Задача 6. *(Никомед)* Дан угол BAC, $BA = t$, $BT \perp AC$, $BQ \parallel AC$ (рис. 6) и пусть нам удалось «вставить» отрезок A–K–N такой, что $KN = 2t$. Докажите, что в таком случае трисекция угла BAC выполнена.

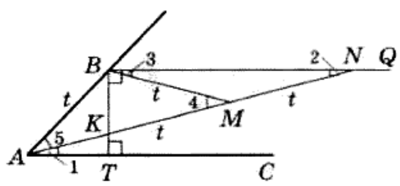

Рис. 6

Доказательство. Пусть $\angle 1 = \angle 2 = \alpha$ — внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AC и BQ. Проведем медиану BM к гипотенузе KN треугольника KBN. Тогда

$BM = KM = MN = t$ и $\angle 3 = \angle 2 = \alpha$.

$\angle 4 = \angle 2 + \angle 3 = 2\alpha$ (внешний для треугольника BMQ). Но $BM = AB = t$. Следовательно, $\angle 5 = \angle 4 = 2\alpha$. Таким образом, угол BAC разделен на два угла, равные α и 2α. Остается провести биссектрису угла 5, и трисекция угла BAC осуществлена.

Задача 7. Постройте равнобедренный треугольник ABC ($b = c$) по высоте h_b и биссектрисе l_b.

Решение. Пусть в треугольнике ABC ($AB = AC$) высота $BH = h_b$ и биссектриса $BL = l_b$ (рис. 7). Тогда

$$\angle 1 = \angle 2 = \alpha \text{ и } \angle 3 = 2\alpha,$$

так как $\angle ABC = \angle ACB$. Построив по катету и гипотенузе треугольник BHL, мы получим, что $\angle 4 = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$ как внешний угол для треугольника BLC. Для построения треугольника ABC нам необходимо построить угол 2α (или α). То есть разделить угол 4 на три равные части. Что равносильно выполнению задачи о трисекции угла, а такое построение невозможно.

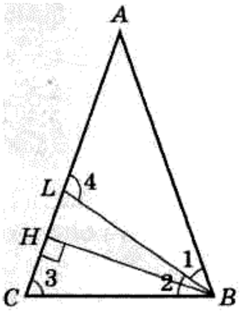

Рис. 7

Задача 8. Постройте прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) по отрезкам $AE = n$ и $AF = k$, делящим угол A на три равные части (рис. 8).

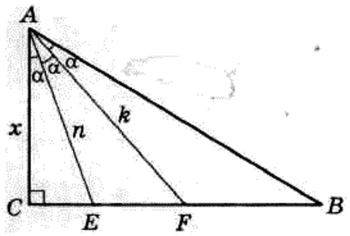

Рис. 8

Решение. Обозначим третью часть угла A через α. Пусть также $AC = x$. Поскольку $AE = n$ является биссектрисой в треугольнике ACF, то по формуле биссектрисы имеем:

$$n = \frac{2xk}{x+k} \cdot \cos\alpha,$$

где $\cos\alpha = \frac{x}{n}$, следовательно,

$$n = \frac{2x^2k}{(x+k)n}, \quad 2x^2k - n^2x - n^2k = 0.$$

Откуда

$$x = \frac{n^2 + n\sqrt{n^2 + 8k^2}}{4k}$$

(второй корень отрицателен). Построить отрезок x с помощью циркуля и линейки не представляет труда (*покажите!*). Затем строится треугольник ACE — по катету и гипотенузе. Дальнейшее очевидно!

Задача 9. (*Чева*) Докажите, что в предложенной на рисунке 9 конструкции $\angle BAC = \frac{1}{3} \angle BOC$.

Доказательство. Пусть $\angle EAF = \alpha$. Тогда $\angle 1 = \alpha$ ($EO \parallel AF$), $\angle 2 = \alpha$ ($EO = OB$) и $\angle 3 = \alpha$ ($AEOF$ — ромб). Аналогично, $\angle 4 = \angle 5 = \alpha$, $\angle 6 = 180° - 2\alpha$ (из треугольника BOE) и $\angle 7 = 180° - 2\alpha$ (из треугольника FOC). Тогда

$$\angle BOC = 360° - (\angle 6 + \angle 3 + \angle 7) =$$
$$= 360° - (180° - 2\alpha) - \alpha - (180° - 2\alpha) = 3\alpha.$$

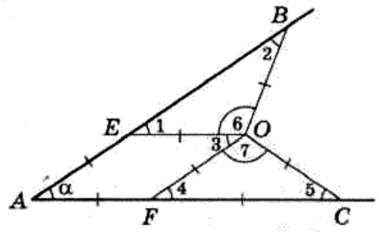

Рис. 9

Замечание. Джованни Чева сконструировал такой механизм, в котором шарниры A, E, O, F закреплены и не могут двигаться по рейкам. А шарниры B и C свободно передвигаются вдоль реек AB и AC. Величина угла BOC устанавливается в зависимости от решаемой задачи и угол BAC осуществляет трисекцию угла BOC.

Задача 10. (*Якоб Бернулли*) Пусть необходимо разделить угол AOB на три равные части. Построим окружность $\omega(O)$, $OA = OB = R$, AC — ее диаметр. OQ — биссектриса угла BOC (рис. 10).

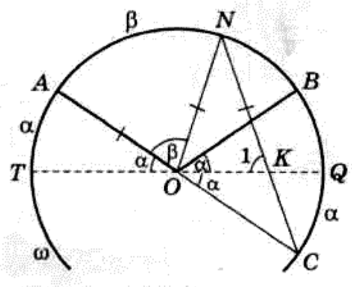

Рис. 10

Пусть нам удалось «вставить» отрезок C–K–N такой, что $KN = R$. Докажите, что

$$\angle NOB = \frac{1}{3} \angle AOB.$$

Доказательство. Проведем в окружности ω диаметр QT. Пусть

$$\angle BOQ = \angle QOC = \angle AOT = \alpha,\ \angle AON = \beta.$$

Поскольку это — центральные углы, то

$$\cup BQ = \cup QC = \cup AT = \alpha,\ \cup AN = \beta.$$

Пусть $\angle NKT = \angle 1$. Тогда

$$\angle 1 = \frac{\alpha+\beta+\alpha}{2} = \alpha + \frac{\beta}{2}$$

(как угол с вершиной внутри круга, равный полусумме соответствующих дуг). Но $KN = ON = R$. Значит, и $\angle NOK = \alpha + \frac{\beta}{2}$, а так как $\angle BOK = \alpha$, то $\angle NOB = \frac{\beta}{2}$. Учитывая то, что $\angle AON = \beta$, мы получим требуемое.

Задача 11. Дана окружность с фиксированной хордой AB. Постройте параллельную ей хорду CD, чтобы площадь трапеции $ABCD$ была наибольшей.

Решение. Покажем, что искомой будет трапеция $ABCD$, в которой $BC = CD = AD$ (рис. 11). Предположим, это будет иная трапеция — такая, в которой боковая сторона меньше второго основания. Например, трапеция $ABKN$ ($BK < NK$). Пусть NK пересекает AD и BC в точках L и M соответственно. $E = AD \cap CN$. Обозначим площади треугольников ANL, NLE и EDC через s_1, s_2 и s_3 соответственно.

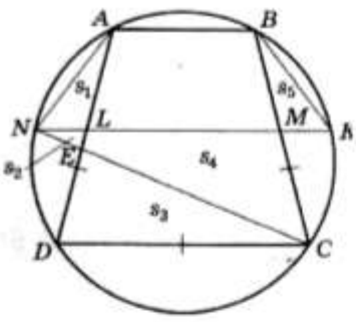

Рис. 11

Треугольники AEN и CED подобны по двум углам; так как $AN < AD = CD$, то

$$s_1 + s_2 < s_3. \qquad (1)$$

Пусть

$$S_{ELMC} = s_4 \text{ и } S_{BMK} = s_5.$$

Треугольники NMC и BMK подобны и $BK < CD$, а $CD < CN$, то есть $BK < CN$. Следовательно,

$$s_5 < s_2 + s_4. \qquad (2)$$

Сложим левые и правые части равенств (1) и (2):

$$s_1 + s_5 < s_3 + s_4.$$

Это означает, что $S_{ABKN} < S_{ABCD}$.

Аналогично показывается, что площадь трапеции $ABCD$ превышает площадь трапеции, у которой боковая сторона больше второго основания.

Итак, $S_{\max} = S_{ABCD}$, где $BC = CD = DA$.

Но для построения такой трапеции необходимо дугу AB, большую полуокружности, разделить точками C и D на три равные части, что равносильно задаче о трисекции угла. А значит, построить такую трапецию с помощью циркуля и линейки невозможно.

Задачи самостоятельного решения

12. Выполните трисекцию угла: а) 135°; б) 27°.

13. Трисекцию какого угла можно осуществить одной линейкой? (*Ответ*: 270°.)

14. Салфетка имеет форму четверти круга, $\angle AOB = 90°$. Выполните трисекцию угла AOB перегибанием, не пользуясь ни циркулем, ни линейкой.

15. В параллелограмме $ABCD$ точки K и N — соответственно середины сторон BC и CD (рис. 12). Возможна ли трисекция угла A отрезками AK и AN? Когда?

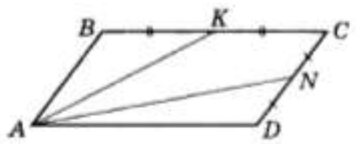

Рис. 12

16. Прокомментируйте работу механизма Декарта, позволяющего производить трисекцию угла. $TA = TB = TC = TD$ и $AE = CE = BF = DF$ (рис. 13). Шарниры T, A, B, C, D закреплены и не могут передвигаться по рейкам, а шарниры E и F свободно передвигаются вдоль реек TE и TF.

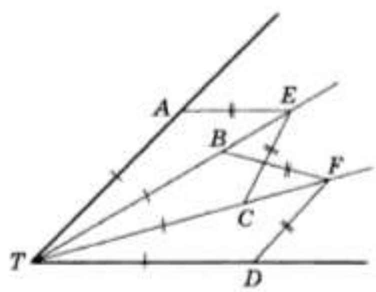

Рис. 13

17. (*Теорема Морлея*) Докажите, что трисектрисы углов A, B и C образуют равносторонний треугольник KNT (рис. 14).

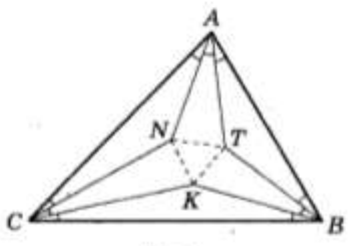

Рис. 14