Григорий Филипповский

Авторская школьная геометрия

Часть 3

Европа XIII–XVII столетий

Филипповский Григорий: Авторская школьная геометрия. Часть 3. — К., 2013.

Третья часть книги «Авторская школьная геометрия» знакомит читателя с задачами крупнейших математиков Европы XIII–XVII столетий. В ней ведётся рассказ о том, как создавались те или иные задачи, чем было вызвано их появление, развитию каких идей или методов они способствовали.

Книга приглашает читателя проследить ход мыслей замечательных математиков. Почувствовать связь предложенных задач с задачами современными. Глубже понять красоту и изящество геометрии.

Она предназначена для любознательных школьников, преподавателей математики, руководителей кружков и спецкурсов.

Оглавление

От автора

В третьей части «Авторской школьной геометрии» представлены задачи, авторами которых являются европейские математики – от Леонардо Фибоначчи до Пьера Вариньона. Задачи таких крупных математиков, какими являются Тарталья, Кардано, Кеплер, Коперник, Ферма, Виет, Дезарг, Паскаль, Декарт и другие – интересны, важны, полезны сами по себе. Они, кроме того, позволяют проследить, какими путями развивалась геометрия в Европе XIII–XVII веков. Как усилия одного математика, поддержанные коллегами, приводили к новым идеям, методам, а порой – и целым направлениям в науке. От этих задач тянутся прочные нити к задачам сегодняшним, современным.

Верю, что третья часть книги доставит радость всем любящим или собирающимся полюбить геометрию! Расширит их кругозор и эрудицию. Позволит понять связь геометрии давней с задачами современными. А кого-то, возможно, пригласит к самостоятельным поискам, исследованиям.

Мои слова искренней Благодарности:
Глушичу Алексею – за вёрстку книги и ряд полезных советов по тексту.
Наврозашвили Лейле – за оформление обложки.
Билецкому Юрию – за разработки, без которых глава 16 была бы немыслима.
Администрации и коллегам Русановского лицея – за всяческое содействие появлению книги на свет.

Глава 1

Леонардо Фибоначчи и гомотетия

В 1170 году в итальянском городе Пизе в семье писаря Боначчо (что означает «доброжелательный») родился сын Леонардо. Ему предназначено было стать выдающимся математиком Леонардо Пизанским или Леонардо Фибоначчи (сын Боначчо).

В юношеские годы Фибоначчи учился арифметике и алгебре в Алжире. Потом начались торговые путешествия в Египет, Сирию, Византию, Сицилию, где он существенно расширил свои математические познания. А в 1202 году написал «Книгу абака», в которой систематизировал все лучшее в греческой и арабской математике, а также добавил свои задачи, приемы, методы.

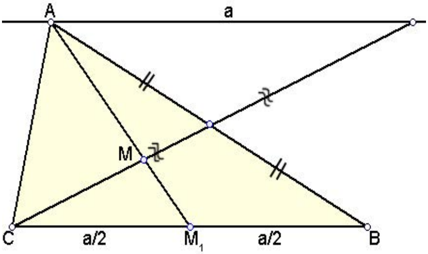
В «Книге абака», которая состоит из 459(!) страниц, Фибоначчи показал приемы умножения, действия с дробями, ввел дробную черту: $\frac{a}{b}$

Он решил ряд задач на определение пробы сплавов. Решил задачи на правило «товарищества» (о том, как разделить сумму пропорционально вкладам участников). Он убедительно показал, что индийская система исчисления намного более удобна римской: 4321 – у индусов, MMMMCCCXXI – у римлян. В алгебраической части книги Фибоначчи решает линейные и квадратные уравнения, задачи с радикалами. Он также является автором знаменитой *задачи о кроликах,* когда от каждой пары через месяц появляется новая пара. В итоге получаем ряд, в котором каждый элемент, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21… Этот ряд называется *рядом Фибоначчи*. Много важных, полезных свойств имеет *ряд Фибоначчи*, широким является его применение! Несомненно, этот ряд заслуживает отдельного разговора.

Фибоначчи также является участником и победителем первого публичного математического турнира, во время которого он блестяще решил все задания, предложенные противником.

В 1220 году была завершена вторая книга – «Практика геометрии». В ней Фибоначчи приводит доказательства важных теорем, часто при этом предлагая свои, оригинальные доказательства.

Рис.1



Вот, например, его авторское доказательство теоремы о медианах *(рис. 1)*:

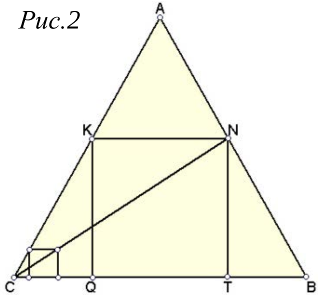
$$\frac{AM}{MM_1} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = \frac{2}{1}$$

Здесь очень важно отметить, что Леонардо стремится не только и не столько решить отдельно взятую задачу, а создать метод решения целого ряда задач, объединенных общей идеей.

Много задач из книг Фибоначчи вошли впоследствии во все европейские учебники. Не случайно говорят, что вплоть до XVIII века Европа изучала математику по трудам Фибоначчи. Мы же подробнее остановимся на следующей задаче из «Практики геометрии».

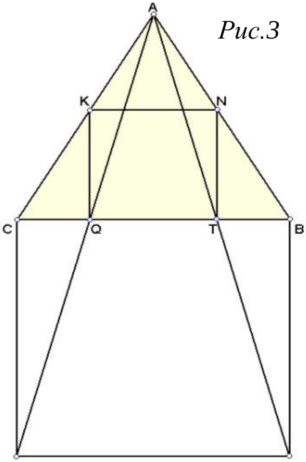
Задача Леонардо Фибоначчи. *В равносторонний треугольник впишите квадрат таким образом, чтобы одна из сторон лежала на основании треугольника.*

Рис.2



Решение. Сначала впишем в треугольник маленький квадрат *(рис. 2)*. Потом с помощью гомотетии «расширим» его до искомого квадрата $KNTQ$.

Рис.3



Замечание 1. Задача имеет аналогичное решение не только для равностороннего, но и для произвольного треугольника.

Замечание 2. Гомотетия позволяет решить задачу Фибоначчи и несколько по-другому, построив сначала квадрат на стороне BC во внешнюю сторону *(рис. 3)*.

Такой метод (метод гомотетии) оказался достаточно эффективным при решении целого ряда задач. Подборку таких задач, которые непринужденно, красиво решаются с помощью гомотетии, предлагаем Вашему вниманию.

Напомним лишь, что ***гомотетия*** – слово греческого происхождения, означает «одинаково размещенные». Гомотетия задается своим центром и коэффициен-

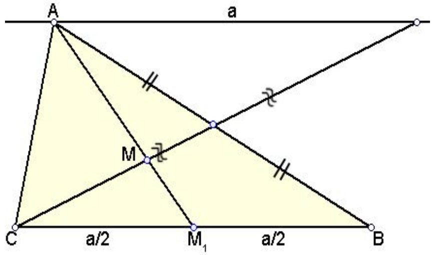


Рис.1

Вот, например, его авторское доказательство теоремы о медианах *(рис. 1):*

$$\frac{AM}{MM_1}=\frac{a}{\frac{a}{2}}=\frac{2}{1}$$

Здесь очень важно отметить, что Леонардо стремится не только и не столько решить отдельно взятую задачу, а создать метод решения целого ряда задач, объединенных общей идеей.

Много задач из книг Фибоначчи вошли впоследствии во все европейские учебники. Не случайно говорят, что вплоть до XVIII века Европа изучала математику по трудам Фибоначчи. Мы же подробнее остановимся на следующей задаче из «Практики геометрии».

Задача Леонардо Фибоначчи. *В равносторонний треугольник впишите квадрат таким образом, чтобы одна из сторон лежала на основании треугольника.*

Решение. Сначала впишем в треугольник маленький квадрат *(рис. 2).* Потом с помощью гомотетии «расширим» его до искомого квадрата $KNTQ$.

Рис.2

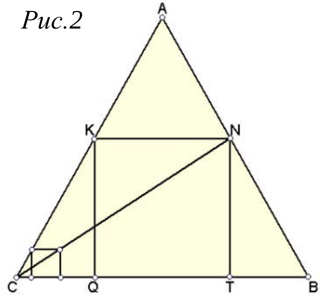
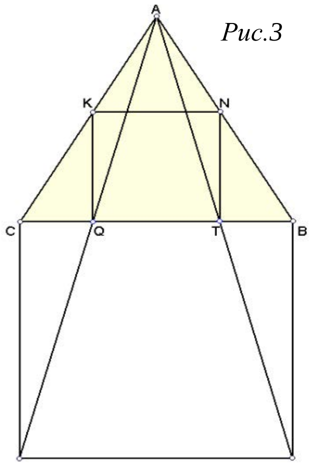


Рис.3



Замечание 1. Задача имеет аналогичное решение не только для равностороннего, но и для произвольного треугольника.

Замечание 2. Гомотетия позволяет решить задачу Фибоначчи и несколько по-другому, построив сначала квадрат на стороне BC во внешнюю сторону *(рис. 3).*

Такой метод (метод гомотетии) оказался достаточно эффективным при решении целого ряда задач. Подборку таких задач, которые непринужденно, красиво решаются с помощью гомотетии, предлагаем Вашему вниманию.

Напомним лишь, что ***гомотетия*** – слово греческого происхождения, означает «одинаково размещенные». Гомотетия задается своим центром и коэффициентом гомотетии. Главным в гомотетии является тот факт, что центр гомотетии и соответственно гомотетичные точки принадлежат одной прямой.

К тому же, гомотетия – это отдельный случай подобия.

Задача 1. *Внутри угла* BAC *«брошена» точка* K *(рис. 4). Найти на стороне* AB *такую точку* X*, что* $KX = XN$*, где* $XN \perp AC$*.*

Рис.4

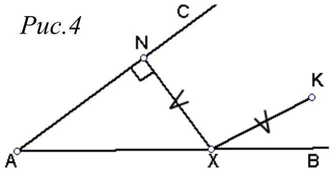
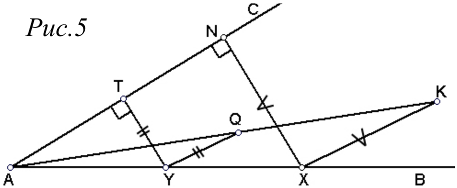


Рис.5



<u>Решение</u>. Соединим A и K *(рис. 5)*. Из произвольной точки $T \in AC$ восстанавливаем к AC перпендикуляр, который пересечет AB в точке Y. Засечка из Y раствором TY в пересечении с AK дает точку Q.

$QY = YT$, а фигуры QYT и KXN являются гомотетичными.

Задача 2. K *– точка на стороне* BC *треугольника* ABC*. Построить* $EF \parallel BC$ *(*$E \in AC$ *и* $F \in AB$*), чтобы отрезок* EF *был виден из точки* K *под прямым углом.*

<u>Решение</u>. Проведем отрезок $TN \parallel BC$, где $T \in AC$ и $N \in AB$ *(рис. 6)*. На TN как на диаметре построим полуокружность ω, которая пересекает отрезок AK в точке Q. Поскольку $\angle TQN = 90^\circ$ (вписанный опирается на диаметр), то остается построить ΔKEF, гомотетичный ΔQTN, в котором $\angle EKF = 90^\circ$ и $EF \parallel BC$.

Рис.6

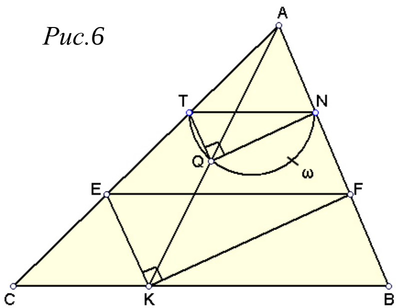
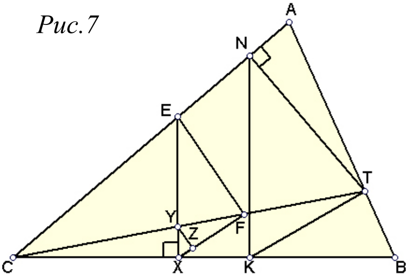


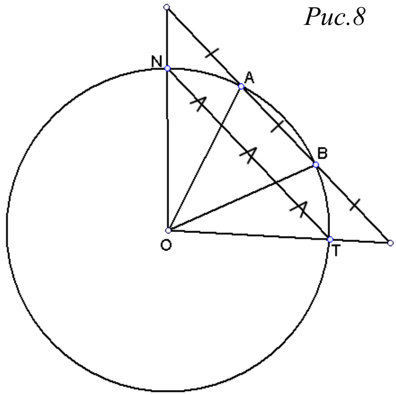
Рис.7



Задача 3. *В данный* ΔABC *впишите* ΔKNT*, стороны которого перпендикулярны к сторонам* ΔABC*.*

Решение. Строим маленький ΔXYZ, в котором $XY \perp BC$; $YZ \perp AC$ и $XZ \perp AB$ *(рис. 7).* Потом, применив гомотетию с центром X, увеличиваем этот треугольник до ΔXEF. Гомотетия с центром в вершине C превращает ΔXEF в искомый ΔKNT.

Рис.8

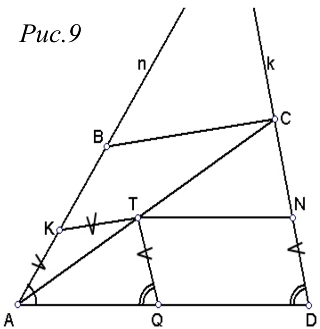


Задача 4. *В окружности проведены радиусы* OA *и* OB*. Построить хорду* NT*, которая делится этими радиусами на три равные части.*

Решение. Смотрите *рис. 8!* (дополнительные комментарии к этой задаче кажутся излишними).

Задача 5. *Построить 4-угольник* ABCD *по его углам* A *и* D *и стороне* AD*, если известно, что* AB = BC = CD*.*

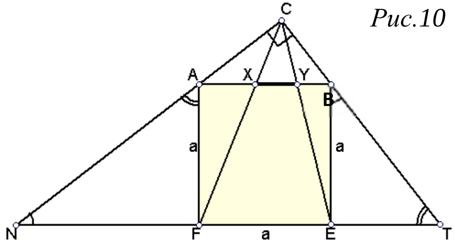
Рис.9



Решение. Строим отрезок AD. Потом под углами, которые равны углам A и D, проводим соответствующие лучи n и k из точек A и D *(рис. 9).* На них откладываем произвольно $AK = DN$. Из точки N проводим параллельную прямую к AD. А из точки K делаем на ней засечку раствором циркуля, который равен AK, – получаем точку T. Проводим $TQ \parallel ND$. Поскольку 4-угольники $AKTQ$ и $ABCD$ гомотетичны, то дальнейшее построение является очевидным!..

Задача 6. *На стороне* AB *квадрата* ABEF *построен во внешнюю сторону прямоугольный* ΔABC *(рис. 10).* CE *и* CF *пересекают* AB *в точках* X *и* Y. *Докажите, что* $\mathrm{XY} = \sqrt{\mathrm{BY} \cdot \mathrm{AX}}$.

Рис.10



Решение. Пусть лучи CA и CB пересекают прямую EF в точках N и T соответственно. Очевидно, треугольники ACB и NCT гомотетичны с центром гомотетии в точке C и коэффициентом $k = \dfrac{CA}{CN} = \dfrac{AX}{NF} = \dfrac{XY}{EF} = \dfrac{BY}{ET}$ (1)

Тогда $BY \cdot AX = k^2 \cdot NF \cdot ET$ (2)

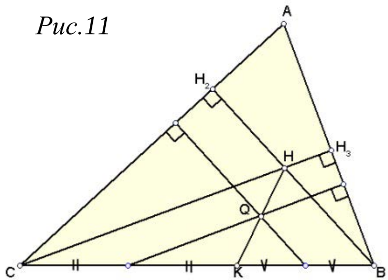
Из подобия ΔANF и ΔTBE имеем: $\dfrac{NF}{BE} = \dfrac{AF}{ET}$, где $AF = BE = a$ – сторона квадрата. Или $NF \cdot ET = a^2$.

Подставим в (2) и получим: $\boxed{BY \cdot AX = k^2 \cdot a^2}$ (3)

Но из (1) $\dfrac{XY}{EF} = \dfrac{XY}{a} = k$, откуда $\boxed{XY^2 = k^2 a^2}$ (4)

Сравнив (3) и (4), получим необходимое: $XY = \sqrt{BY \cdot AX}$.

Рис.11



Задача 7. *На стороне* BC *треугольника* ABC *взята точка* K. *Из середины* BK *проведен перпендикуляр к* AC, *а из середины* CK *– перпендикуляр к* AB. *Эти перпендикуляры пересекаются в точке* Q *(рис. 11). При каком положении точки* K *длина отрезка* QK *будет наименьшей? (Всеукраинские олимпиады, 10 класс).*

Решение. При гомотетии с центром в точке K и коэффициентом $k = 2$, проведенные перпендикуляры перейдут в высоты BH_2 и CH_3 треугольника ABC. А точка Q – в ортоцентр H. При этом $QK = \dfrac{1}{2} HK$. Очевидно, длина отрезка HK будет наименьшей, когда точка K совпадет с основанием высоты, проведенной из вершины A.

Несколько задач, которые успешно решаются с помощью гомотетии, предлагаем для самостоятельного решения.

Задача 8. Докажите, что треугольники с соответственно параллельными сторонами являются гомотетичными.

Задача 9. Впишите в данный треугольник прямоугольник с заданным отношением сторон.

Задача 10. Найдите на стороне BC треугольника ABC точку K – такую, что $EF \parallel BC$, где $KE \perp AC$ и $KF \perp AB$ *(рис. 12).*

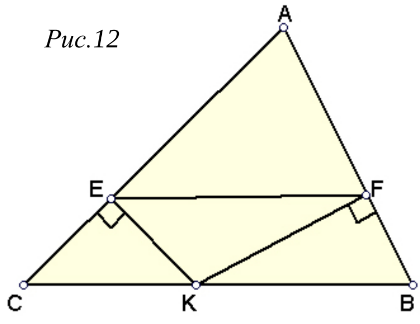
Задача 11. В данный ΔABC впишите треугольник, стороны которого параллельны сторонам другого данного ΔKNT.

Задача 12. В прямоугольный ΔABC впишите равносторонний треугольник со стороной, параллельной гипотенузе AB.

Задача 13. На сторонах AC и AB треугольника ABC найдите соответственно точки E и F – такие, что $CE = EF = FB$.

Задача 14. Постройте ΔABC по следующим элементам: $a+b$; $a+c$; A.

Рис.12



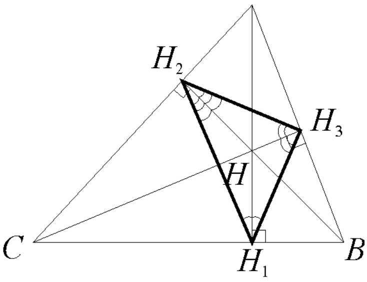
Глава 2

Региомонтан. Единственность ортоцентра. Защита факта

Из замечательных точек треугольника ортоцентр *H* оказался наиболее «крепким орешком». Судя по всему, ни греческим математикам, ни много позже арабским так и не удалось доказать теорему о том, что в произвольном треугольнике три высоты пересекаются в одной точке. Да и после них ещё долгое время сохранялся открытым вопрос о единственности точки пересечения высот в треугольнике. Скорее всего, немецкий математик и астроном Региомонтан (1436–1476), его настоящие имя и фамилия Иоганн Мюллер, был первым, кто доказал этот факт. Он учился в Лейпциге и Вене. В Италии пристально изучал и переводил труды древнегреческих учёных. Работал профессором в Венском университете, руководил обсерваторией в Нюрнберге. В своём трактате «Пять книг о треугольниках всех видов» Региомонтан впервые в Европе выделил тригонометрию в отдельную науку. Он также составил наиболее точные для своего времени таблицы тангенсов и синусов. Его труд, опубликованный уже после смерти, в 1533 году, оказал большое влияние на дальнейшее развитие тригонометрии.

Региомонтан доказывал факт единственности ортоцентра с помощью так называемого «удвоенного» треугольника. Этим доказательством пользовались и последующие поколения математиков. Именно его помещают практически во всех учебниках. Суть доказательства состоит вот в чём: через вершины данного треугольника *ABC* проводятся прямые параллельно противоположным сторонам – до их взаимного пересечения. Затем показывается, что высоты треугольника *ABC* – для нового, «удвоенного» треугольника – являются серединными перпендикулярами. Поскольку ещё древнегреческие математики показали, что серединные перпендикуляры к сторонам любого треугольника пересекаются в одной точке, то, тем самым, был доказан факт единственности ортоцентра в произвольном треугольнике *ABC*.

*Рис.*1



Сегодня существует множество доказательств этой теоремы. Ну вот, например, хотя бы такое *(рис. 1)*.

Высоты AH_1; BH_2; CH_3 треугольника ABC являются биссектрисами ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$ (докажите!) Поскольку точка пересечения биссектрис единственна (центр вписанной в треугольник окружности), то AH_1; BH_2 и CH_3 пересекаются в одной точке. Однако эти же отрезки являются высотами треугольника ABC. Значит, три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Впрочем, цель нашей статьи несколько иная. А именно: показать применение факта единственности ортоцентра треугольника при решении различных геометрических задач.

Поэтому предлагаемая ниже подборка ставит целью «защитить» доказанную выше теорему. Подчеркнуть её полезность, важность, необходимость.

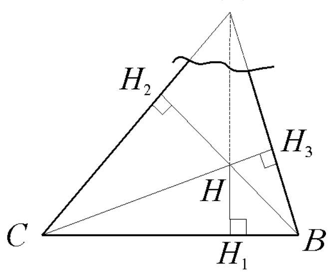
Задача 1. *Существует ли треугольник, у которого ортоцентр совпадает с вершиной?*

Решение. Катеты прямоугольного треугольника являются также и его высотами. Поскольку они пересекаются в вершине прямого угла, то и третья высота также пройдет через эту вершину. Поэтому вершина прямого угла в прямоугольном треугольнике является его ортоцентром.

Задача 2. *Вершина острого угла A треугольника ABC находится вне чертежа. Проведите прямую, содержащую высоту* h_a .

Решение. Проведём высоты BH_2 и CH_3 *(рис. 2)*. Пусть H – точка их пересечения. Из точки H опускаем перпендикуляр HH_1 на BC. Очевидно, что прямая HH_1 является искомой.

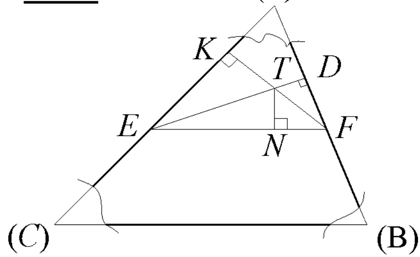
*Рис.*2



Задача 3. *Вершины остроугольного треугольника ABC недоступны. Найдите его ортоцентр.*

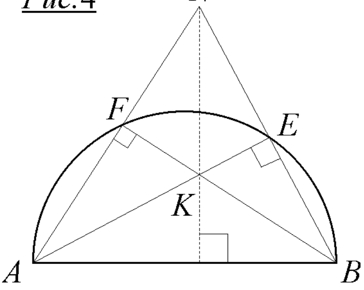
Решение. Проведём, где это возможно, $EF \parallel BC$ *(рис. 3)*. Из точек E и F опустим перпендикуляры ED и FK на «огрызочки» сторон AB и AC. Пусть они пересекутся в точке T. Опустим из T перпендикуляр TN на EF. Очевидно, что прямая TN содержит высоту h_a треугольника ABC. Построив аналогичным образом прямую, содержащую h_b, в пересечении h_a и h_b получим ортоцентр H треугольника ABC.

Рис.3



Задача 4 (Якоба Штейнера). *На отрезке AB как на диаметре построен полукруг с неизвестным центром. Внутри полукруга дана точка K. Одной линейкой опустите из точки K перпендикуляр на AB.*

Рис.4



Решение. Проведем лучи AK и BK до пересечения с полукругом в точках E и F *(рис. 4)*. Соединим E с B и F с A. $\angle AFB = \angle AEB = 90°$ (вписанные, опираются на диаметр). Продлим AF и BE до пересечения в точке N. Тогда AE и BF – высоты в треугольнике ANB, а точка K – его ортоцентр. Прямая NK содержит третью высоту треугольника ANB и будет перпендикулярна AB.

Задача 5. *ABCD – параллелограмм. Из вершины C проведен перпендикуляр CC_1 на диагональ BD (рис. 5). Через вершину B проведена прямая $t \perp AB$, а из вершины D – прямая $n \perp AD$. Докажите, что прямые t и n пересекаются на CC_1.*

Решение. Поскольку $CD \parallel AB$, то $t \perp CD$. Аналогично $n \perp BC$. Значит, прямые t и n содержат высоты треугольника BCD. Однако, и CC_1 – высота в этом треугольнике. Следовательно, t, n, и CC_1 пересекаются в одной точке – ортоцентре треугольника BCD.

Рис.5

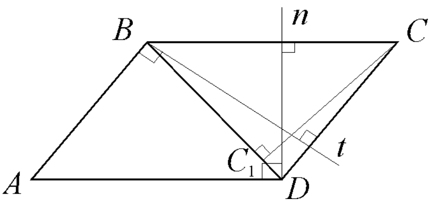
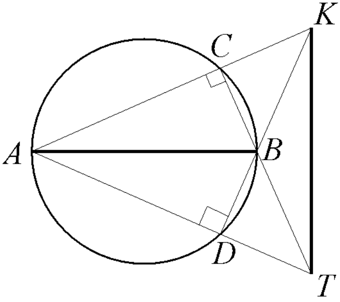


Рис.6



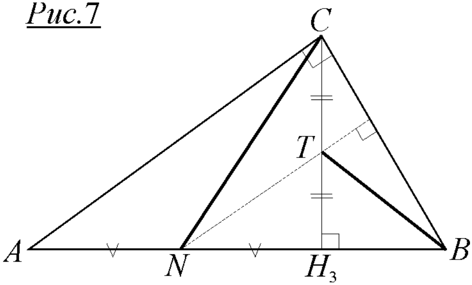
***Задача 6**. Точки C и D лежат на окружности по разные стороны диаметра AB (рис. 6). K – точка пересечения прямых AC и DB. T – точка пересечения прямых CB и AD. Найдите угол между прямыми AB и KT.*

Решение. Углы ACB и ADB – прямые (вписанные, опираются на диаметр). Тогда TC и KD являются высотами в треугольнике AKT. А точка их пересечения B – его ортоцентр. Следовательно, прямая AB содержит третью высоту треугольника AKT, то есть $AB \perp KT$.

***Задача 7.** Треугольник ABC – прямоугольный ($\angle C = 90°$). Точка T – середина высоты CH_3, точка N – середина отрезка AH_3 (рис. 7). Под каким углом пересекаются прямые BT и CN?*

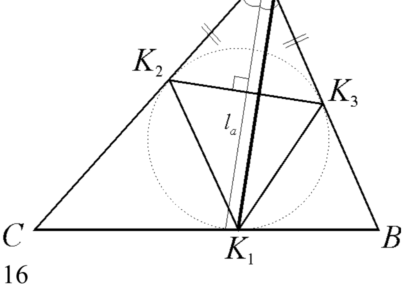
Решение. Соединим N и T. Тогда NT – средняя линия в треугольнике ACH_3, то есть $NT \parallel AC$. Значит, прямая NT перпендикулярна BC. При этом $CH_3 \perp BN$ (по условию). Следовательно, точка T – ортоцентр в треугольнике BCN. Тогда прямая BT содержит третью высоту этого треугольника, или $BT \perp CN$.

Рис.7



***Задача 8.** Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, AC и AB в точках K_1; K_2; K_3 соответственно. Через K_1; K_2; K_3 проведены прямые, соответственно параллельные биссектрисам l_a, l_b, l_c треугольника ABC. Докажите, что проведенные прямые пересекаются в одной точке.*

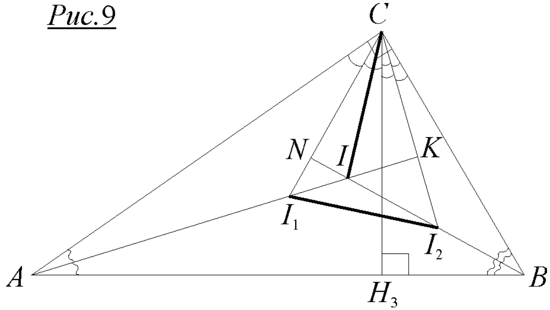
Рис.8



Доказательство. Очевидно, что $l_a \perp K_2K_3$ (*рис. 8*). Тогда прямая t_1, проведенная параллельно l_a, будет содержать высоту треугольника $K_1K_2K_3$. Следовательно, t_1, t_2 и t_3 пересекутся в одной точке – ортоцентре треугольника $K_1K_2K_3$.

Задача 9. *Точка I – центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). CH_3 – высота, опущенная на гипотенузу AB. I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных соответственно в треугольники ACH_3 и BCH_3. Докажите, что $CI \perp I_1I_2$ (рис. 9).*

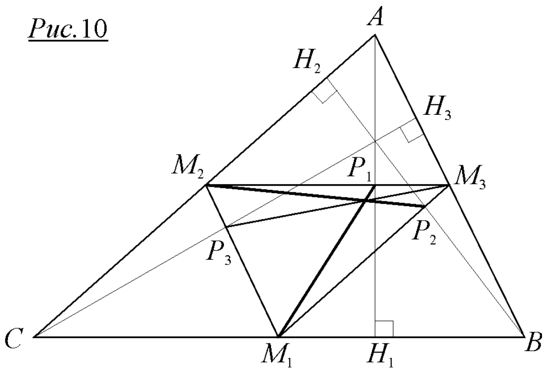
Рис.9



Доказательство. Угол I_1CI_2 равен $45°$ (составляет половину прямого угла ACB). $\angle AI_1C = 90° + \frac{1}{2}\angle AH_3C = 90° + 45° = 135°$. Поскольку точки I_1 и I лежат на биссектрисе угла CAB, то $\angle CI_1I = 180° - 135° = 45°$. Тогда в треугольнике CI_1K ($K = AI_1 \cap CI_2$) $\angle CKI_1 = 180° - 45° - 45° = 90°$, то есть I_1K – высота в треугольнике I_1CI_2.
Аналогично можно показать, что $I_2N \perp CI_1$, или I_2N – высота в треугольнике I_1CI_2. Следовательно, точка I – ортоцентр этого треугольника, а прямая CI содержит третью высоту, то есть $CI \perp I_1I_2$.

Задача 10. *Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами его соответствующих высот, пересекаются в одной точке.*

Рис.10



Доказательство. Пусть M_1; M_2; M_3 – середины сторон BC, AC и AB, а P_1; P_2; P_3 – середины высот AH_1; BH_2; CH_3 соответственно *(рис. 10)*. Очевидно, что точки P_1; P_2; P_3 принадлежат средним линиям треугольника ABC. Докажем, что P_1M_1; P_2M_2 и P_3M_3 пересекаются в одной точке. Для этого, согласно теореме Чевы, необходимо доказать, что:

$$\frac{M_2P_1}{P_1M_3} \cdot \frac{M_3P_2}{P_2M_1} \cdot \frac{M_1P_3}{P_3M_2} = 1$$

Но $\dfrac{M_2P_1}{P_1M_3}=\dfrac{CH_1}{H_1B}$ (ΔAM_2P_1 подобен ΔACH_1, а ΔAM_3P_1 подобен ΔABH_1). Аналогично покажем, что $\dfrac{M_3P_2}{P_2M_1}=\dfrac{AH_2}{H_2C}$ и $\dfrac{M_1P_3}{P_3M_2}=\dfrac{BH_3}{H_3A}$.

Поскольку высоты AH_1; BH_2; CH_3 треугольника ABC пересекаются в одной точке, то по теореме Чевы верно равенство: $\dfrac{CH_1}{H_1B}\cdot\dfrac{BH_3}{H_3A}\cdot\dfrac{AH_2}{H_2C}=1$.

Значит, и $\dfrac{M_2P_1}{P_1M_3}\cdot\dfrac{M_3P_2}{P_2M_1}\cdot\dfrac{M_1P_3}{P_3M_2}=1$, то есть прямые P_1M_1; P_2M_2 и P_3M_3 пересекаются в одной точке.

Глава 3

Лука Пачоли, Леонардо да Винчи и геометрия

Попробуем соединить в одном разговоре выдающегося математика *Луку Пачоли (1445–1514)* и гениального художника *Леонардо да Винчи (1452–1519).* Позволим себе это сделать потому, что они были: а) современниками; б) друзьями. Тем более, что Леонардо выполнил 59 рисунков многогранников к трактату маэстро Пачоли «О Божественной пропорции». В свою очередь, Лука Пачоли точно подсчитал количество металла для статуи всадника, которая была заказана Леонардо.

Лука Пачоли родился в городке Борго, который принадлежал Флорентийской республике. Подростком он учился в мастерской знаменитого художника Пьеро делла Франческа, чьи идеи и взгляды достаточно сильно повлияли на талантливого юношу. Переехав в Венецию, Лука Пачоли посещал там лекции по математике и даже работал домашним учителем. Приняв монашеский постриг (он стал францисканцем), стал заниматься теологией и математикой. Потом преподавал математику в университетах Перуджи, Рима, Неаполя, Венеции, Флоренции, Болоньи. В те времена математики достаточно часто «кочевали» из одного города в другой, читая лекции для студентов и всех желающих. Главный труд Пачоли – «Сумма знаний по арифметике, геометрии, пропорциям и отношениям». Он увидел свет в 1494 году в Венеции. Пачоли преднамеренно написал ее на итальянском языке (обычно писали научной латынью) – с тем, чтобы простые, даже бедные итальянцы имели возможность познакомиться с книгой. «Сумма» Пачоли является своеобразной энциклопедией математических знаний того времени. Здесь и примеры на все арифметические действия, включая операции с квадратным корнем, и сложные проценты. Даже есть задачи для справедливого раздела денег двумя игроками. А задачи из «двойной» бухгалтерии именно в труде Пачоли встречаются впервые. То есть, он считается «отцом» бухгалтерского учета.

В геометрической части своего трактата Лука Пачоли в основном подражает Леонардо Фибоначчи. Но и здесь он имеет свои идеи и находки.

Задача 1 (Л. Пачоли). *Радиус вписанного в треугольник ABC круга равен 4 см. Точка K касания этого круга со стороной BC делит ее на отрезки 6 см и 8 см. Найдите длины сторон AB и AC.*

Решение. Пусть $BK = BT = 6\ см$; $CK = CN = 8\ см$; $AT = AN = x\ см$ *(рис. 1)*. Найдем полупериметр треугольника ABC: $p = 8 + 6 + x = 14 + x$. По формуле

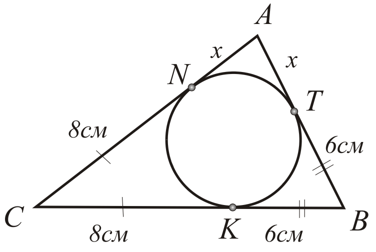


рис.1

Герона $S = \sqrt{(14+x)\cdot x\cdot 6\cdot 8}$. Но $p = \dfrac{S}{r}$.

Следовательно, $14 + x = \sqrt{\dfrac{(14+x)\cdot x\cdot 48}{16}}$,

$(14+x)^2 = (14+x)\cdot x\cdot 3$, или $14 + x = 3x$,

откуда $x = 7$. $AB = 7 + 6 = 13\ см$;

$AC = 7 + 8 = 15\ см$.

Задача 2 (Л. Пачоли). *Вписать в треугольник две равных окружности таким образом, чтобы каждая из них касалася двух сторон угла. Кроме того, они должны касаться друг друга.*

Решение. Выбрав на биссектрисе угла C произвольную точку Q, впишем в угол ACB окружность ω_1 *(рис. 2)*. Построим такую же окружность ω_2 с центром T, которая касается ω_1 и стороны BC. Луч CT пересекает биссектрису угла ABC в точке N. Эта точка и будет центром второй искомой окружности, вписанной в угол ABC. Действительно, если провести касательную EF к окружности ω_2 параллельно AB и убедиться в том, что $\angle 1 = \angle 2$, то все остальное сделает *гомотетия* (треугольники CEF и CAB гомотетичны с центром C и $k = \dfrac{CF}{CB}$; также гомотетичны ΔCTF и ΔCNB с тем же центром и тем же коэффициентом гомотетии). Теперь построение первой из двух искомых окружностей не вызывает никаких трудностей.

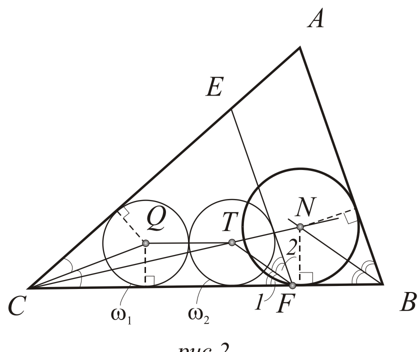


рис.2

Задача 3 (Л. Пачоли). *Вписать в данную окружность*
а) три равных окружности;
б) четыре равных окружности;
которые бы касались данной окружности и в то же время последовательно касались друг друга.

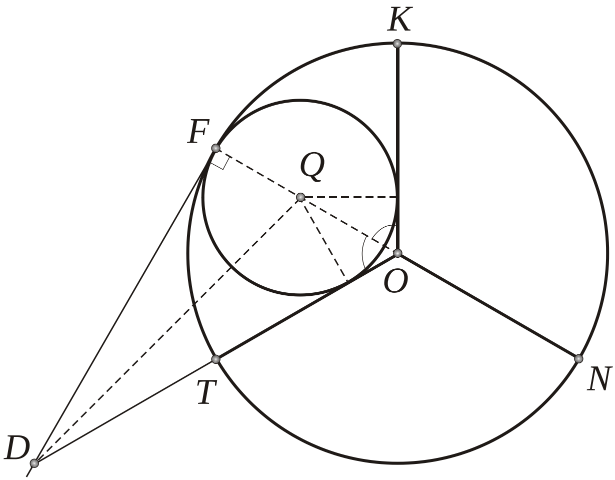


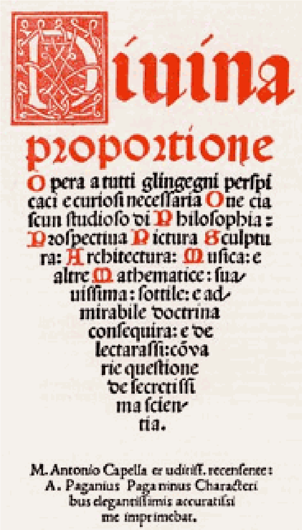
рис.3

Решение.

а) Разделим окружность на три равные части (можно, например, разделить на шесть равных частей раствором циркуля, который равен радиусу, потом соединить точки деления через одну). Получим точки K, N, T *(рис. 3)*. Пусть прямая NO пересекает окружность в точке F. Пусть также касательная к окружности в точке F и прямая OT пересекутся в точке D. Тогда биссектриса угла ODF пересечет отрезок OF в точке Q – центре одной из искомых окружностей. Ее радиус равен QF (покажите это). Дальнейшее очевидно.

б) Сначала проводим два перпендикулярных диаметра. Дальнейшее построение полностью аналогично пункту *а)*.

В 1496 году Пачоли начинает преподавать математику в Миланском университете. В Милане же он знакомится с Леонардо да Винчи. Они становятся друзьями на долгие годы. Судя по всему, именно Леонардо вдохновлял Луку


Diuina
proportione
Opera a tutti glingegni perspi
caci e curiosi necessaria Oue cia
scun studioso di Philosophia:
Prospectiua Pictura Sculptu
ra: Architectura: Musica: e
altre Mathematice: sua
uissima: sottile: e ad
mirabile doctrina
consequira: e de
lectarassi: cõva
rie questione
de secretissi
ma scien
tia.

M. Antonio Capella er uditiss. recensente:
A. Paganius Paganinus Characteri
bus elegantissimis accuratissi
me imprimebat.

Пачоли на написание трактата о «золотом сечении», который у Пачоли получил название «О Божественной пропорции». Эта пропорция известна со времен Евклида и называется у него «деление отрезка в крайнем и среднем отношении». То есть мы делим отрезок таким способом, что большая его часть относится к меньшей так, как сам отрезок относится к большей части. Согласно рис. 4 имеем: $\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x}$, где $BC = x$ (большая часть), $AC = a - x$ (меньшая часть), $AB = a$ (целый отрезок). Из этой пропорции $x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$ (отрицательный корень отбрасываем). Вот она, длина большего отрезка «золотого сечения»!

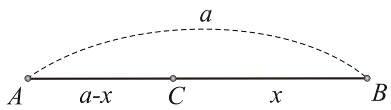
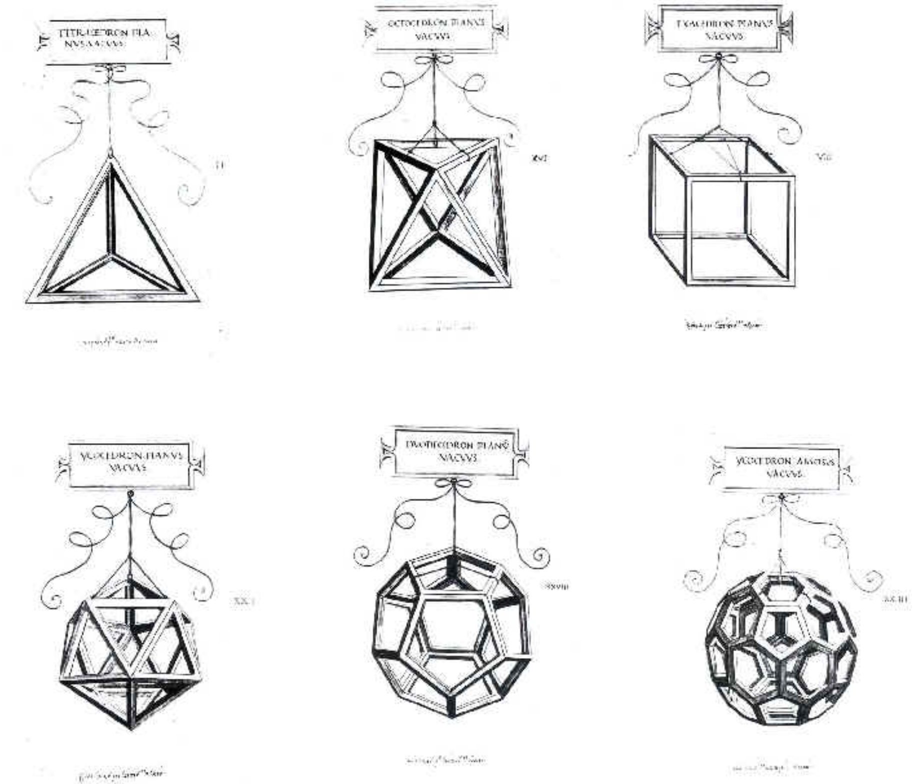


рис.4

Пачоли с увлечением пишет о такой пропорции, о ее значении в архитектуре, в музыке, в природе, в размерах тела человека. Интересно выглядит полное название его трактата, достаточно длинное, как и было принято на то время: «*Божественная пропорция. Сочинение, необходимое для каждого проницательного и любознательного ума, где каждый, кто изучает философию, перспективу, живопись, скульптуру, архитектуру, музыку и другие математические предметы, найдет самую приятную, тонкую и волшебную доктрину и получит наслаждение от разных вопросов самой загадочной из наук» (1509 год).*

Кроме «золотого сечения» он рассказывает в трактате о пяти правильных телах (правильный тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр), а также о полуправильных, так называемых Архимедовых, телах. Рисунки этих тел, как мы уже говорили, сделал Леонардо.



Леонардо да Винчи с огромным уважением относился к Пачоли. Вот, например, одна из его дневниковых записей: «Научись умножению корней у *маэстро* Луки!»

Вообще же, что касается Ленардо да Винчи, то мы смеем говорить о нем лишь в связи с его математическими устремлениями, тем более, что они были достаточно существенными. Леонардо считал, что нет достоверности в науке, которая тесно не связана с математикой. Поражает такая его дневниковая запись: «Пусть никто, не будучи математиком, не отважится читать мои труды».

Много внимания Леонардо да Винчи уделял теории перспективы. Он был уверен, что размеры предмета зависят не от расстояния от него, а от угла, под которым этот предмет виден.

Через всю жизнь он пронес любовь к механике, которую называл «райскими кущами» для математических наук.

Очевидцы утверждают, что последние годы жизни Леонардо полностью посвятил себя ее величеству Геометрии. Когда однажды сделали попытку заказать ему картину, ответ был такой: «Мастер сейчас очень увлекается геометрией и даже не берет кисть в руки».

Каким же он был, круг геометрических интересов Леонардо да Винчи?

Леонардо, восприняв идеи математика Абу-л-Вафы (X столетие), очень интересовался задачами на построение, которые выполняются с помощью линейки и циркуля постоянного раствора (так называемого «заржавленного» циркуля).

Задача Леонардо да Винчи*. Построить угол 15^o с помощью линейки и циркуля постоянного раствора, равного R.*

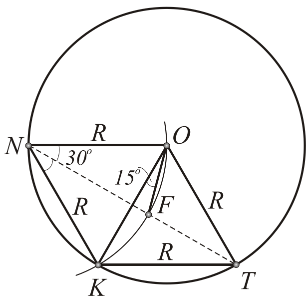


рис.5

Решение. Строим окружность радиуса R с центром O *(рис. 5)*. Из произвольной точки K этой окружности делаем на ней две засечки радиуса R – точки N и T. Очевидно, треугольники NOK и KOT являются равносторонними. NT совпадает с биссектрисой угла ONK, поэтому $\angle TNK = 30°$. Из точки N как из центра строим окружность радиуса R, которая пересекает NT в точке F и также пройдет через O и K ($NK = NO = R$).Тогда $\angle FOK = 15°$, поскольку он является вписанным, а $\angle KNF = 30°$ – центральным.

Предлагаем решить эту задачу еще несколькими способами.

Леонардо да Винчи увлекался так называемыми «луночками Гиппократа». Дело в том, что задача Гиппократа Хиосского (IV столетие до н.э.) давала надежду решить одну из наиболее интересных задач древней Греции – *задачу о квадратуре круга* («Построить квадрат, равновеликий данному кругу»).

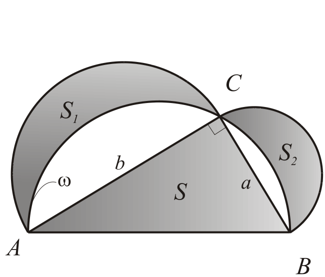


рис.6

Задача Гиппократа Хиосского. *Около прямоугольного треугольника ABC ($C=90^\circ$) описана полуокружность ω. На катетах AC и BC как на диаметрах во внешнюю сторону также построены полуокружности (рис. 6). Доказать, что суммарная площадь «луночек» S_1 и S_2 равна площади S треугольника ABC.*

<u>Доказательство</u>. Пусть $BC=a$; $AC=b$. Тогда площадь ΔABC равна: $S=\frac{1}{2}ab$. Площадь полукруга ω равна: $S_\omega=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{\pi\left(a^2+b^2\right)}{8}$.

А $S_1+S_2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}\right)-(S_\omega-S)=\frac{\pi(a^2+b^2)}{8}-\frac{\pi(a^2+b^2)}{8}+S$. То есть $S_1+S_2=S=\frac{1}{2}ab$.

Следовательно, «луночки» S_1 и S_2 «квадрируемы», то есть могут быть вычислены через площадь прямоугольного треугольника.

Леонардо сделал много рисунков «луночек», изобрел несколько своих «луночек», но ни он, ни один из математиков задачу о квадратуре круга не решили (позже было доказано, что построить квадрат, равновеликий данному кругу, с помощью циркуля и линейки невозможно). Однако Леонардо да Винчи сделал достаточно остроумную попытку решить задачу о квадратуре круга таким способом.

Квадратура круга по Леонардо да Винчи

Поскольку любой прямоугольник можно превратить в равновеликий ему квадрат (построить отрезок $x=\sqrt{ab}$ – тривиальная операция с помощью циркуля и линейки), то …

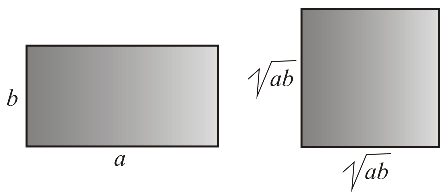


рис.7

Возьмем цилиндр с радиусом основания R и высотой $H=\frac{R}{2}$.

Прокатим его боковой поверхностью ровно один оборот на гладком песке.

Получим след (отпечаток) прямоугольника с площадью $S=2\pi R\cdot\frac{R}{2}=\pi R^2$.

Остается лишь превратить этот прямоугольник в равновеликий квадрат.

Безусловно, к этому способу можно предъявить немало претензий, но рассуждения Леонардо являются чрезвычайно интересными и остроумными!..

Теорема Леонардо о центре масс тетраэдра

Скорее всего, открытие центроида (центра масс) тетраэдра связано опять-таки с Леонардо да Винчи. Медианой тетраэдра (треугольной пирамиды) называется отрезок, который соединяет вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани. Именно у Леонардо впервые находим запись о том, что медианы произвольного тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3:1$, считая от вершины. Хотя, к сожалению, Леонадо не приводит доказательства обнаруженного им факта…

Ну что же, надеемся, нам удалось убедить уважаемых читателей в том, что Лука Пачоли и Леонардо да Винчи внесли достойный вклад в популяризацию геометрии, ее развитие. Если же кто-то сомневается в этом, то вот еще несколько задач от *Пачоли* и *да Винчи*. Предлагаем решить их самостоятельно.

Задачи от Луки Пачоли

1) Найдите стороны треугольника с площадью 84, если они являются тремя последовательными целыми числами.

2) Зная площадь прямоугольника и разность его сторон найдите эти стороны.

3) По данным сторонам треугольника найдите диаметр круга, который касается двух сторон треугольника, причем центр круга находится на третьей стороне.

4) В данную окружность вписать:
а) 5 равных окружностей;
б) 6 равных окружностей;
которые бы касались данной окуржности и в то же время последовательно друг друга.

Задачи от Леонардо да Винчи

5) Если две равные окружности пересекаются в точках A и B, то прямая AB в любой части своей длины находится на одинаковых расстояниях от центров этих окружностей. Докажите!

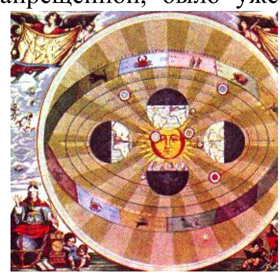
6) Возьмем шаблон треугольника ABC и проведем две прямые l и m. Будем прикладывать шаблон таким образом, чтобы вершина A каждый раз принадлежала прямой l, а вершина B – прямой m. Тогда всевозможные положения вершины C заполнят фигуру, которая называется эллипсом. Покажите!..

Глава 4

Теорема Коперника и траектория движения точек

О замечательном польском астрономе, механике, математике Николае Копернике (1473–1543) говорят, что он «остановил Солнце и сдвинул Землю». Действительно, после более чем 30 лет опытов и наблюдений в своей обсерватории («башне Коперника») ученый приходит к выводу: наша система мира является *гелиоцентрической*. В центре – Солнце, а Земля – одна из планет, вращающихся вокруг Солнца. В своем главном труде «Об обращении небесных сфер» Коперник говорит о том, что Земля, вращаясь вокруг Солнца, вращается также и вокруг своей оси. А ее спутник Луна – вращается вокруг самой Земли.

Во времена Коперника еще не было телескопов, приборы для наблюдения были теми же, что и у древних греков: гномоны, квадранты, армиллярные сферы. Поэтому и Коперник ошибался, полагая, будто планеты (их насчитывалось 6) движутся равномерно по окружностям вокруг Солнца. А возникающие несоответствия (из-за эллиптичности орбит планет на самом деле) пытался решить, как и Птолемей, с помощью дополнительных кругов – эпициклов и деферентов. Тем не менее, система Коперника содержала зерно научной истины. Она стала фундаментом для новой эпохи в развитии астрономии. И хотя вскоре книгу «Об обращении небесных сфер» инквизиция объявила запрещенной, было уже поздно: идеи Николая Коперника овладели многими пытливыми умами того времени. Астрономия стала развиваться быстро и решительно. Надо сказать, что любимой книгой Коперника с детства и на всю жизнь остались «Начала» Евклида. Быть может, в благодарность за это ученый подарил геометрии задачу, которая сегодня носит название *теоремы Коперника*. Эта задача на геометрическое место точек, с весьма неожиданным ответом. Вот она…



Теорема Коперника. *Окружность радиуса* $r = \frac{R}{2}$ *катится без скольжения по внутренней части окружности радиуса R (рис.1). Какую траекторию опишет произвольная точка T меньшей окружности?*

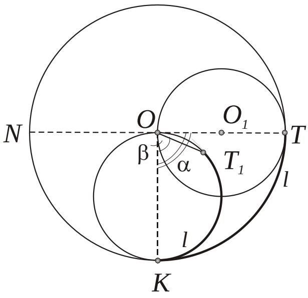


рис.1

Решение. Пусть точка T перейдет в некоторую точку T_1. Очевидно, $\cup TK = \cup T_1K = l$ (окружность катится без скольжения). Пусть также центральный $\angle TOK = \alpha$. Поскольку вся окружность составляет $360°$, а длина окружности вычисляется по формуле $2\pi R$, то $\alpha = \frac{360°}{2\pi R} \cdot l = \frac{180°}{\pi R} \cdot l$. $\angle T_1OK = \beta$ является вписанным для меньшей окружности. Поэтому $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{2\pi r} \cdot l$. Но $r = \frac{R}{2}$.

Значит, $\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{2\pi \cdot \frac{R}{2}} \cdot l = \frac{180°}{\pi R} \cdot l$. То есть, $\beta = \alpha$. Следовательно, точка T_1 лежит на диаметре *TN* большей окружности.

Таким образом, *если по неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса, по произвольная точка T меньшей окружности движется по диаметру большей окружности.*

Неожиданный ответ, не правда ли? Не окружность, не какая-либо кривая, а диаметр большей окружности!..

Похоже, что так же, как *гелиоцентрическая система* Николая Коперника позвала людей науки к переосмыслению устройства мироздания, так и *теорема Коперника* «пригласила» математиков к составлению новых задач на траектории движения точек.

Но прежде, чем предложить подборку задач, идейно близких *теореме Коперника*, дадим слово самому Копернику:

«Из числа многочисленных и разнообразных искусств и наук, пробуждающих интерес и являющихся живительной силой для человеческого разума, по моему мнению, с величайшим жаром следует себя посвятить тем, которые исследуют круг предметов, наиболее прекрасных и наиболее достойных познания…

Несомненно, первейшей из таких наук есть та, которую одни называют астрономией, другие – астрологией, а многие в прошлом – вершиной математики».

Задача 1. *По сторонам прямого угла перемещается шест постоянной длины (рис.2). Какую траекторию опишет паучок Т, находящийся посередине шеста?*

<u>Ответ</u>. Поскольку медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то паучок опишет четверть окружности с центром О радиуса, равного половине длины шеста.

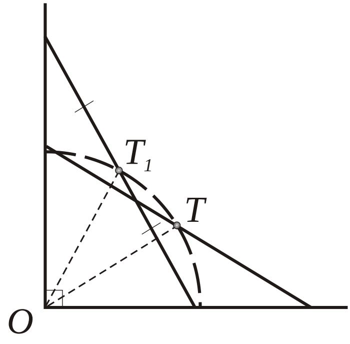


рис.2

Задача 2. *Какую линию описывает вершина С прямоугольного треугольника АВС ($C = 90°$), когда вершины его острых углов движутся по сторонам прямого угла?*

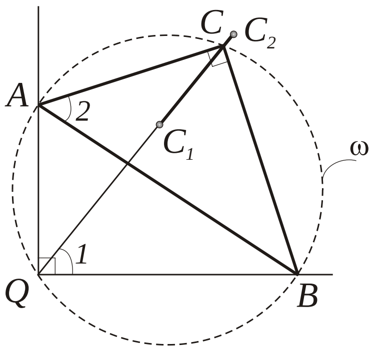


рис.3

<u>Решение</u>. Пусть вершины A и B движутся по сторонам прямого угла Q *(рис.3)*. Около четырехугольника $AQBC$ можно описать окружность ω (два противоположных угла равны по $90°$). Тогда $\angle 1 = \angle 2$ (вписанные, опираются на одну дугу в окружности ω). Следовательно, точка C перемещается по лучу QC (поскольку $\angle 2$ постоянен). При этом $QC_{\min} = QC_1 = AC$ (где AC – меньший катет), а $QC_{\max} = QC_2 = AB$ (AB – гипотенуза).

<u>Ответ</u>. Вершина С движется по отрезку C_1C_2, равному разности гипотенузы и меньшего катета (C_1C_2 лежит на луче, проведенном из точки Q под углом, равным $\angle CAB$).

Задача 3. *Отрезок AB движется параллельно себе – так, что точка A лежит на окружности ω (рис.4). Какую траекторию опишет точка B?*

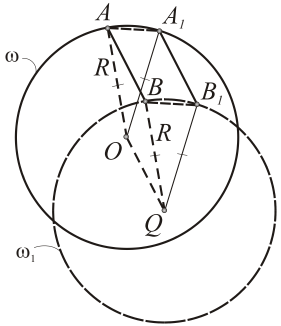


рис.4

Решение. Пусть A перейдет в $A_1 \in \omega$, а B – в B_1. Очевидно, AA_1B_1B – параллелограмм. Соединим A с точкой O – центром окружности ω – и построим параллелограмм $ABQO$. Поскольку $OQ = A_1B_1$ и $OQ \parallel A_1B_1$, то OA_1B_1Q – тоже параллелограмм и $OA_1 = QB_1 = OA = R$ (R – радиус окружности ω). Таким образом, $QB = QB_1 = R$.

Ответ. Траектория точки B – окружность ω_1 с центром в точке Q того же радиуса, что и ω.

Задача 4. *На плоскости фиксированы точки B и C. Точка A движется по плоскости так, что $AC - AB = a$, где a – длина данного отрезка. Какую траекторию описывают центры вписанных окружностей всевозможных треугольников ABC?*

Решение. Пусть окружность, вписанная в некоторый ΔABC (где $AC - AB = a$), касается его сторон BC (фиксирована), AC и AB в точках D, E, F соответственно *(рис.5)*. Заметим, что

$$CD - BD = CE - BF = (CE + EA) - (BF + FA) =$$
$$= AC - AB = a.$$

Итак, $CD - BD = a$. Таким образом, положение точки D фиксировано. То есть, инцентры (точки пересечения биссектрис) всевозможных ΔABC лежат на перпендикуляре, проведенном к BC через точку D. Пусть I – одна из таких точек. Поскольку $\angle BIC = 90^\circ + \dfrac{A}{2}$ – тупой (известный факт геометрии треугольника), то искомая траектория – не весь перпендикуляр, а только те его точки Q, для которых $\angle BQC > 90^\circ$.

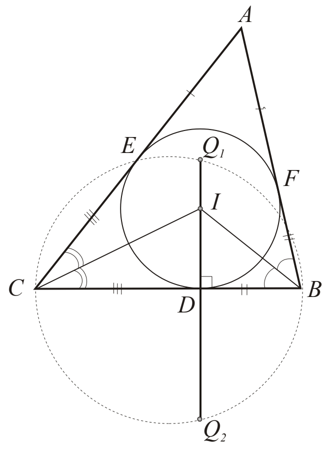


рис.5

Ответ. Отрезок $Q_1Q_2 \perp BC$ ($\angle BQ_1C = \angle BQ_2C = 90^\circ$), притом исключая сами точки Q_1; D; Q_2.

Задача 5. *Окружность радиуса, равного высоте h_a равнобедренного треугольника ABC ($b = c$), катится по основанию этого треугольника. Будет ли меняться величина дуги, отсекаемой на окружности боковыми сторонами треугольника?*

Решение. Пусть окружность ω с центром O радиуса $AH_1 = h_a$ катится по основанию BC равнобедренного ΔABC *(рис.6)*. Пусть также KN – диаметр ω, параллельный BC. Нетрудно показать, что $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = B$, и, кроме того, $QF \perp KN$ *(покажите!)* Тогда $\angle 5 = 90° - B$ (где B – фиксированный угол). Значит, вписанный $\angle EQF = 90° - B$ является постоянным, а он равен половине $\cup EF$.

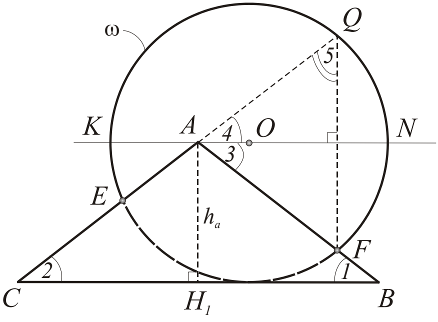


рис.6

Ответ. Величина $\cup EF$ меняться не будет!

Задача 6. *Внутри квадрата ABCD взята точка K. Для каждой точки N взятой на стороне квадрата, строится равносторонний ΔKNT. Какую траекторию опишет точка T, если точка N будет двигаться по сторонам квадрата ABCD? (рис.7)*

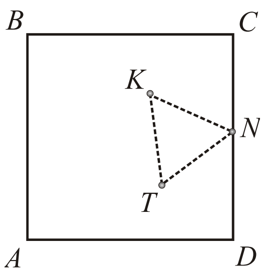


рис.7

Решение. Если взять произвольную точку N на любой из сторон квадрата и повернуть отрезок KN на $60°$ относительно точки K, то получим точку T, принадлежащую искомой траектории.

Ответ. Искомая траектория – данный квадрат ABCD, повернутый на $60°$ относительно точки K против часовой стрелки или по часовой стрелке (в зависимости от движения точки N).

Задача 7. *На плоскости даны точки B и C. Точка A перемещается так, что длина медианы CM остается неизменной, равной m. Какова траектория точки A?*

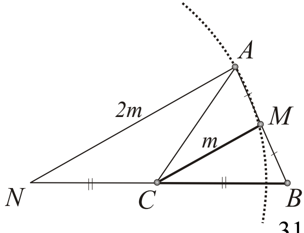


рис.8

Решение. Удвоим отрезок BC (он фиксирован) за точку C – получим $CN = BC$ *(рис.8)*. Очевидно, $CM = m$ – средняя линия в ΔABN. Значит, $NA = 2m$. При этом точка N также фиксирована.

Ответ. Все точки A находятся на окружности радиуса 2m с центром в точке N.

Задача 8. *Две окружности радиусов r и R катятся по прямой l. Какую траекторию описывают точки пересечения их внутренних касательных?*

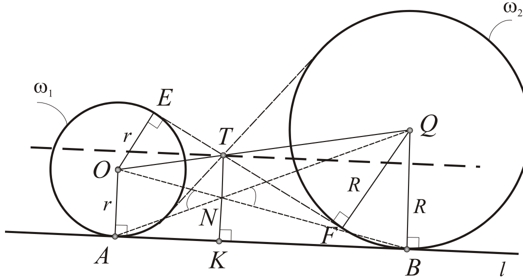


рис.9

Решение. Пусть окружности ω_1 и ω_2 радиусов r и R с центрами O и Q соответственно катятся по прямой l *(рис.9)*. Пусть также T – одна из точек пересечения их внутренних касательных, а N – точка пересечения диагоналей в трапеции $OABQ$ ($OA \perp l$ и $QB \perp l$). Очевидно, $\Delta OET \sim \Delta QFT$ и $\frac{OT}{TQ} = \frac{r}{R}$ *(1)*.

Поскольку $\Delta ONA \sim \Delta BNQ$, то $\frac{ON}{NB} = \frac{r}{R}$ *(2)*. Из равенств *(1)* и *(2)* следует, что $\frac{OT}{TQ} = \frac{ON}{NB}$, тогда $TN \parallel QB$. Продолжим TN до пересечения с l в точке K. Значит, TK и есть тот отрезок, который характеризует траекторию точки T. Вместе с тем TK – отрезок, параллельный основаниям трапеции $OABQ$ и проходящий через точку пересечения ее диагоналей. Хорошо известно, как его вычислять: $TK = \frac{2Rr}{R+r}$ *(покажите!)*

Ответ. Траектория точек T – прямая, параллельная l и находящаяся от l на расстоянии, равном $\frac{2Rr}{R+r}$.

Перед тем, как предложить несколько задач для самостоятельного решения, отметим следующее: если по окружности радиуса R будет внутри катиться окружность радиуса $\frac{R}{4}$ (а не $\frac{R}{2}$, как в *теореме Коперника*), то траектория произвольной точки T меньшей окружности будет довольно красивой и непростой. Эта кривая называется *астроидой (рис.10)*.

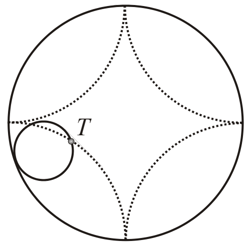


рис.10

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 9. BC – фиксированный диаметр окружности ω. Точка A «бегает» по окружности ω. Какую линию описывают инцентры всевозможных треугольников ABC?

<u>*Ответ*</u>*. Две дуги с концами в B и C. Каждая соответствует углу* 135°.

Задача 10. Хорда AB окружности ω закреплена, а хорда CD движется по ω, не меняя своей длины. Какова траектория точек пересечения прямых AC и BD?

<u>*Ответ*</u>*. Окружность, которую хорда AB делит на определенные дуги.*

Задача 11. В условиях *задачи 3* определите, какую траекторию опишет середина AB.

<u>*Ответ*</u>*. Окружность.*

Задача 12. Дана окружность ω, точка A на ней и точка B вне окружности. На отрезке AB построен правильный треугольник ABT. Точка A движется по окружности. Какую траекторию опишет точка K?

<u>*Ответ*</u>*. Точка K опишет две окружности, получающиеся при повороте данной окружности ω около точки B на угол* 60° *(по часовой и против часовой стрелки).*

Задача 13. B и C – фиксированные точки данной окружности ω. Точка A движется по этой окружности. Из середины K отрезка BA проводится перпендикуляр к CA. Пусть T – основание этого перпендикуляра. Какую линию опишет точка T?

<u>*Ответ*</u>*. Пусть Q – точка пересечения KT и BN, где CN – диаметр ω. Тогда искомая линия – окружность* ω_1, *построенная на CQ как на диаметре.*

Глава 5

Выигранный поединок Никколо Тартальи!

Крупнейший математик эпохи Возрождения Никколо Тарталья (1499–1557) прославился блестящей победой на математическом диспуте в 1535 году. В тот день за 2 часа он решил 30 уравнений вида $x^3 + mx^2 = n$ и $x^3 + ax = b$ (до этого считалось, что такие уравнения невозможно решить общей формулой).

«Я приложил все свое рвение, усердие и уменье, чтобы найти правило для решения кубических уравнений, и, благодаря благосклонной судьбе, мне удалось это сделать за 8 дней до поединка».

Все же, думается, главная победа Тартальи состояла в ином. В том, что заикающийся мальчишка (Tartaglia – заика), который не мог учиться в школе из-за отсутствия денег, который рос без отца, погибшего при обороне родного города Брешиа, самостоятельно изучил математику, итальянский, латынь, греческий. В том, что самоучка Тарталья вырвался из цепких лап нищеты и безграмотности. Когда на заборах, камнях и даже могильных плитах кладбища Никколо царапал формулы, сосредоточенно вычисляя что-то, прохожие посмеивались и даже крутили пальцем у виска – совсем, мол, спятил парень. Насмешки улетучились, когда «этот парень» сначала стал учителем арифметики, затем преподавателем математики в университетах Вероны и Венеции. Инженеры венецианского арсенала высоко ценили Тарталью как специалиста в вопросах баллистики (он показал, что наибольшая дальность полета снаряда достигается при угле $45°$ наклона ствола орудия).

Так что Тарталья выиграл свой главный поединок, сотворив себя сам. Пусть по сей день ведутся жесточайшие споры: кто автор *формулы Кардано*? Сам ли Кардано? Или Тарталья, поведавший ее Кардано в зашифрованном виде? А может быть, профессор Болонского университета Сципион дель Ферро? (есть серьезные основания так полагать!..) Не беда, что свой последний математический диспут заикающийся немолодой Тарталья проиграл юному красноречивому ученику Кардано. Так или иначе, именно Тарталья вместе с Кардано и тем самым его учеником Феррари проложили главную тропу на пути, по которому в дальнейшем стала развиваться алгебра!..

Заслуги Н. Тарталья в геометрии скромнее. Но и они весомы: он перевел на итальянский сочинения Евклида и Архимеда – с тем, чтобы все желающие, включая таких же бедняков, каким он был сам, могли прочесть труды блестящих древнегреческих геометров.

Геометрические предпочтения самого Тартальи близки по духу идеям арабского математика Абу-ль-Вафы (940–998), который большое внимание уделял построениям с помощью *линейки и циркуля постоянного раствора*.

В предложенной серии задач, выполняемых *линейкой и циркулем постоянного раствора*, первая принадлежит самому Тарталье. Остальные, несомненно находились в круге его интересов.

Задача 1. *(Тарталья) На отрезке BC постройте равносторонний треугольник ABC.*

Решение. Строим равносторонние треугольники BTN и CKQ со стороной, равной данному раствору циркуля *(рис.1)*. прямые BT и CK пересекутся в искомой вершине A.

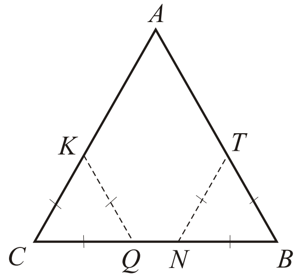


рис.1

Задача 2. *Через точку K вне прямой l проведите к ней:*

а) параллельную прямую;

б) перпендикулярную прямую.

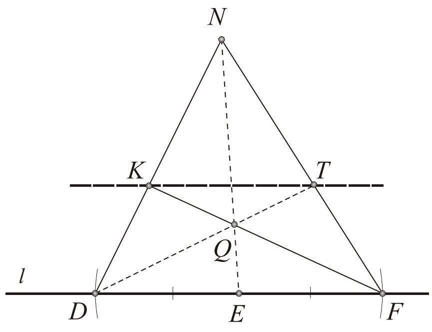


рис.2

Решение. а) От любой точки D прямой l откладываем на l отрезки $DE = EF$ данным раствором циркуля *(рис.2)*. Отрезок DK продлеваем за K до точки N (произвольно). Соединяем N с E и F, а также K с F.

$Q = KF \cap NE$; $T = DQ \cap NF$. Прямая KT – искомая *(покажите!)*

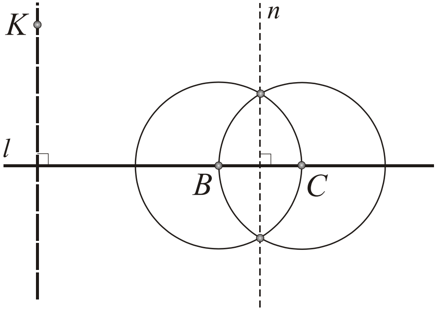


рис.3

б) Данным раствором циркуля строим две окружности с центрами в точках B и C на прямой l, где отрезок BC равен данному раствору циркуля *(рис.3)*. Очевидно, прямая n, проходящая через точки пересечения этих двух окружностей, перпендикулярна прямой l *(покажите!)* Остается через K провести прямую параллельно n (*пункт а*).

Задача 3. *Разделите данный отрезок BC в отношении* $5:3$.

<u>Решение</u>. Как в *задаче Тарталья,* строим в точках B и C лучи под углом $60°$ к BC – как показано на *рис.4*. На луче, проведенном из B, откладываем 5 отрезков фиксированным раствором циркуля. На луче из C – 3 таких отрезка. Полученные таким образом точки N и T соединим отрезком. Точка Q пересечения NT и BC разделит отрезок BC в отношении $5:3$, что следует из подобия треугольников BNQ и CTQ.

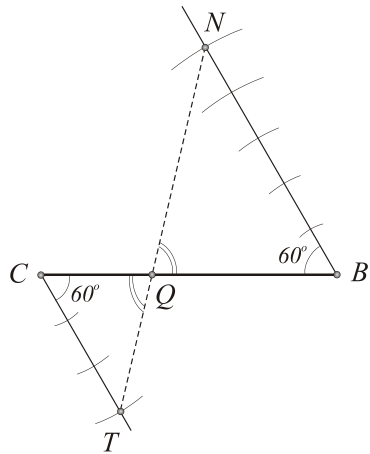


рис.4

Задача 4. *На прямой l отложить отрезок KN, равный данному отрезку EF.*

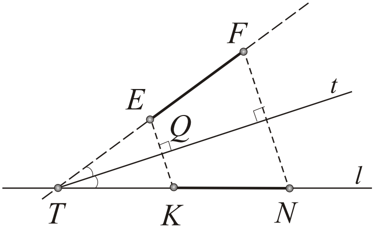


рис.5

<u>Решение</u>. Пусть T – точка пересечения прямых FE и l *(рис.5)*. Построим t – биссектрису угла T. Это делается так же, как и обычным циркулем. Проведем $EQ \perp t$ *(задача 2, б)* и продолжим до пересечения с l в точке K. Очевидно, $EQ = QK$ (TQ – биссектриса и высота в ΔTEK). Остается через F провести прямую параллельно EK *(задача 2, а),* которая пересекает l в искомой точке N ($KN = EF$, поскольку $KEFN$ – равнобокая трапеция).

Задача 5. *Дан угол NCQ и отрезок EF. Постройте отрезок AB с концами на сторонах данного угла, равный и параллельный EF (рис.6).*

Решение. Через C проводим прямую t параллельно EF *(задача 2, а)* и на ней откладываем $CT = EF$ *(задача 4)*. Через T проводим прямую параллельно CQ, которая пересекает CN в точке A. Остается через A провести прямую параллельно t. Она пересекает CQ в искомой точке B ($TABC$ – параллелограмм).

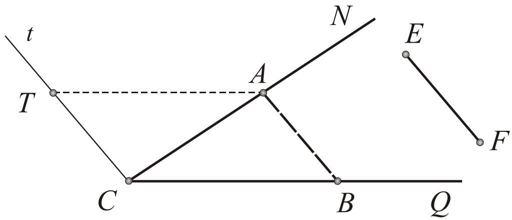


рис.6

Задача 6. *Впишите в данную окружность правильный треугольник.*

Решение. Если центр O окружности не указан, то несложно его найти *(смотрите рис.7)*. Строим окружность, концентрическую данной, фиксированным раствором циркуля. Далее, проведем радиус OA (произвольно) и, как в *задаче Тарталья*, дважды отложим угол $60°$ – равносторонние треугольники ODE и OEF *(рис.8)*. Луч OF пересекает данную окружность в точке B, а луч EO – в точке C. Покажите, что ΔABC – равносторонний.

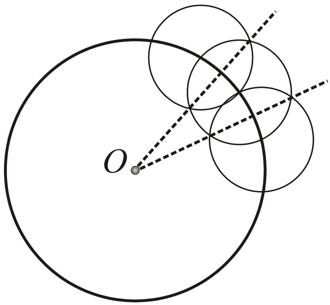


рис.7

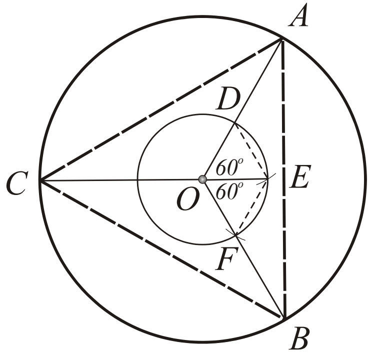


рис.8

Задача 7. *Дан квадрат ABCD. Впишите в него квадрат KNTQ, зная положение точки K на стороне AB (рис.9).*

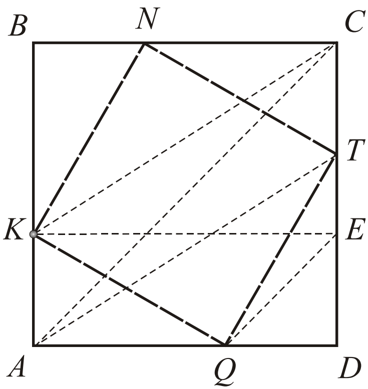


рис.9

Решение. Для того, чтобы выполнить требуемое, необходимо отложить на BC отрезок $BN = AK$, на стороне CD – отрезок $CT = AK$ и на DA – отрезок $DQ = AK$. Это можно выполнить, например, таким образом: соединяем K и C, затем проводим через A прямую параллельно KC, которая пересекает CD в искомой точке T. Далее, через точку K проведем $KE \parallel AD$. Прямая, проведенная через E параллельно диагонали AC, дает еще одну искомую точку Q. Дальнейшее очевидно.

Задача 8. *Дан треугольник ABC. На сторонах AC и AB постройте соответственно точки T и Q такие, что* $CT = TQ = QB$.

Решение. Откладываем фиксированным раствором циркуля отрезки CE и BD соответственно на сторонах CA и BA *(рис.10)*. Через D проводим прямую n параллельно BC *(задача 2,а)*. Из точки E фиксированным раствором циркуля делаем засечку на прямой n – получаем точку F. Через F проводим прямую параллельно AB до пересечения с BC в точке K. Очевидно, $CE = EF = FK$.

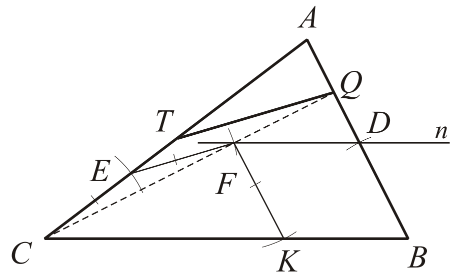


рис.10

Тогда луч CF пересекает AB в искомой точке Q. Проведя через Q прямую параллельно EF, получим на AC точку T. Четырехугольники $CEFK$ и $CTQB$ гомотетичны, с центром гомотетии в точке C, поэтому $CT = TQ = QB$.

Задача 9. *Пусть фиксированный раствор циркуля равен a. Постройте последовательно отрезки* $\frac{a}{2}; \frac{a}{3}; \frac{a}{4} \ldots \frac{a}{n}$.

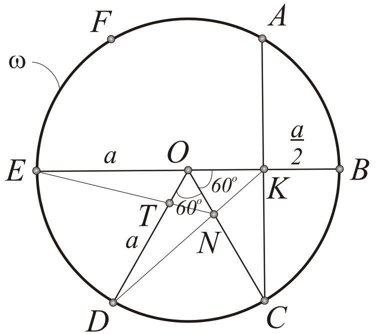


рис.11

Решение. Строим окружность ω фиксированным раствором циркуля, равным a. Делим ее от произвольной точки A на 6 равных частей, делая на ней засечки $B; C; D; E; F$ тем же раствором *(рис.11)*. Очевидно, AC делит OB пополам ($OABC$ – ромб) и $OK = KB = \frac{a}{2}$. Пусть $N = KD \cap OC$. Найдем ON по известной формуле биссектрисы $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$. Для ΔKOD: $ON = \frac{2a \cdot \frac{a}{2}}{a + \frac{a}{2}} \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{3}$. Пусть теперь $T = EN \cap OD$. По той же формуле $OT = \frac{2a \cdot \frac{a}{3}}{a + \frac{a}{3}} \cos 60^\circ$ или $OT = \frac{a}{4}$.

Аналогично получим отрезки $\frac{a}{5}$; $\frac{a}{6}$ ... $\frac{a}{n}$.

Перед тем, как предложить несколько задач для самостоятельного решения, отметим следующее. Несомненно, некий септик скажет: «Ну, чем вы занимаетесь, ребята? Согласно *теореме Штейнера* «все построения, разрешимые циркулем и линейкой, разрешимы и одной линейкой, если в плоскасти задан круг с его центром. Поскольку циркуль постоянного раствора дает круг с его центром, то что за Америку вы открываете? И зачем все это надо?»

Не станем его убеждать в полезности таких упражнений для детей, в том, что это просто красиво и доставляет удовольствие. Ответим просто, весомо и убедительно: затем!!! А еще не забудем, что главный герой нашего разговора – замечательный математик *Никколо Тарталья*.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 10. Разделить отрезок BC на n равных частей.

Задача 11. На прямой l дана точка Q. Восстановите из Q перпендикуляр к l.

Задача 12. Впишите в данный круг:

- квадрат;
- правильный восьмиугольник.

Задача 13. Через данную точку A проведите прямую, находящуюся на равных расстояниях от двух данных точек B и C.

Задача 14. В данный прямоугольник впишите ромб – так, чтобы прямоугольник и ромб имели общую диагональ.

Задача 15. Дан $\angle NCQ$ и точка T внутри него. Постройте на стороне CQ точку X, равноудаленную от CN и точки T.

Глава 6

Внешние и внутренние касательные Джироламо Кардано

Блестящий математик, врач, философ, астролог, естествоиспытатель, изобретатель – вот, что мы могли бы сказать о Джироламо Кардано (1501–1576). Формулу для нахождения x из уравнения $x^3 + px + q = 0$ называют *формулой Кардано*. Вот она:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ .$$

Кардано первым стал рассматривать всерьез отрицательные числа и даже комплексные числа, хотя и считал их «чисто софистическими». Профессор математики и медицины сначала в Миланском университете, затем в университетах Павии и Болоньи, Кардано в 1545 году пишет свой главный труд: «Великое искусство или о правилах алгебры». В этой книге впервые были предложены методы решения уравнений третьей и четвертой степеней. Способ решения уравнений четвертой степени предложил Феррари – ученик Кардано. А вот с уравнениями третьей степени возникли осложнения. Тарталья обвинил Кардано в том, что тот «вероломно похитил» идею решения таких уравнений, опубликовав решения без его, Тартальи, на то разрешения. Отношения между двумя математиками стали неприязненными.

Тарталья вызвал Кардано на математический поединок, который состоялся только через несколько лет. И противником Тартальи в поединке был все тот же любимый ученик Кардано – Луиджи Феррари (1522–1565).

Судя по всему, Кардано действительно взял за основу метод Тартальи (или же Сципиона дель Ферро, поскольку тот сделал все то же, что и Тарталья, только чуть раньше). Но Кардано существенно расширил, обобщил этот метод. Распространил его на другие типы неполных кубических уравнений. А затем – и на полное кубическое уравнение. Его огромная заслуга состоит в том, что он почувствовал путь, по которому станет развиваться алгебра и сделал первый шаг на этом пути.

Интересно, что сам Кардано значительным математиком себя не считал. Призвание свое видел в медицине. Был отличным диагностом, вылечивал многих больных.

А еще увлекался астрологией, составлял гороскопы. Играл в шахматы, азартные игры. Написал «Книгу об игре в кости», в которой изложил начала теории веоятностей. Предложил поставить в карете короля подвеску из двух валов, качение которых не позволяло бы ей опрокинуться. Вот откуда в технике так широко известны и применимы *карданов вал, карданова подвеска*.

«Кардано был великим человеком при всех его недостатках; без них он был бы совершенством» (Г.В. Лейбниц).

Кардано хорошо знал труды древнегреческих и арабских математиков. Как Хорезми решал квадратное уравнение геометрическими методами, так и Кардано решал кубическое уравнение на языке геометрии: брал определенный куб и разрезал его по плоскостям, параллельным граням куба.

Геометрии Кардано «подарил» только одну задачу: он первым полностью решил задачу о проведении касательных к двум кругам. *Задача Кардано* хороша еще и тем, что «позвала» многих математиков к составлению задач, связанных с проведением внутренних касательных к двум кругам. В результате их творческой работы сложилась любопытная серия задач. Предлагаем ее вниманию читателей, начиная, конечно же, с *задачи Кардано*.

Задача Кардано. *К двум данным окружностям провести: а) внешнюю касательную; б) внутреннюю касательную.*

Решение.

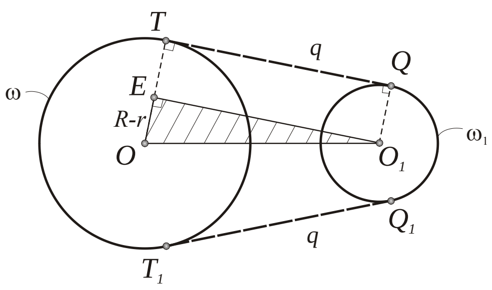


рис.1

а) Пусть даны окружности ω и ω_1 радиусов R и r соответственно *(рис.1)* с центрами в точках O и O_1. Анализ показывает: если $TQ = q$ – общая внешняя касательная этих окружностей, то нетрудно построить ΔOEO_1, где $O_1E = QT$ и $O_1E \parallel QT$. Действительно, на OO_1 как на диаметре строим окружность. Затем из точки O раствором циркуля, равным $R - r$, делаем засечку на окружности – получаем точку E. Луч OE пересекает ω в точке T. Луч из O_1, параллельный OE, пересекает ω_1 в точке Q. Заметим, что вторая внешняя касательная $T_1Q_1 = q$ строится точно так же.

б) Пусть $KN = n$ – одна из внутренних касательных к окружностям ω и ω_1 радиусов R и r с центрами O и O_1 *(рис.2)*. Анализ показывает, что в этом случае несложно построить ΔOFO_1, где $O_1F = NK$ и $O_1F \parallel NK$. Построение аналогично пункту *а)* с той лишь разницей, что $OF = R + r$. Так же строится и вторая внутренняя касательная $K_1N_1 = n$.

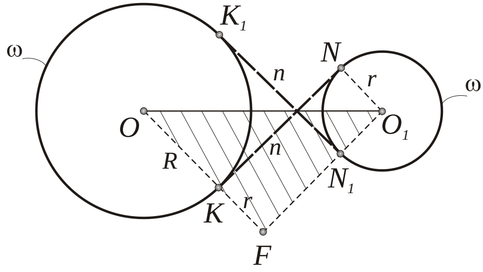


рис.2

Задача 1. *Даны две окружности ω и ω₁ (рис.3). Постройте прямую, которая касалась бы ω₁ и высекала на ω хорду данной длины a.*

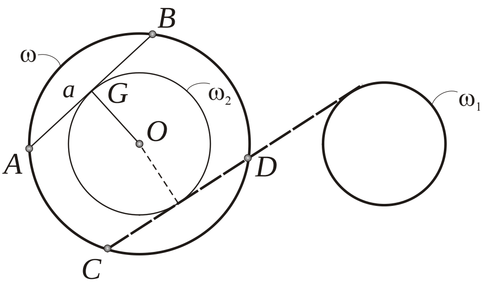


рис.3

<u>Решение</u>. На окружности ω строим хорду $AB = a$. Соединяем центр O окружности ω с точкой G – серединой AB. Радиусом OG строим окружность ω_2, концентрическую с ω. Остается провести *внутреннюю касательную Кардано* к окружностям ω_1 и ω_2. Очевидно, что на окружности ω она будет высекать хорду $CD = a$ *(покажите!)*

Задача 2. *Дана прямая l и окружности ω и ω₁ по одну сторону от нее (рис.4). Найдите на l такую точку, что касательные из нее к ω и ω₁ будут наклонены под одинаковыми углами к l.*

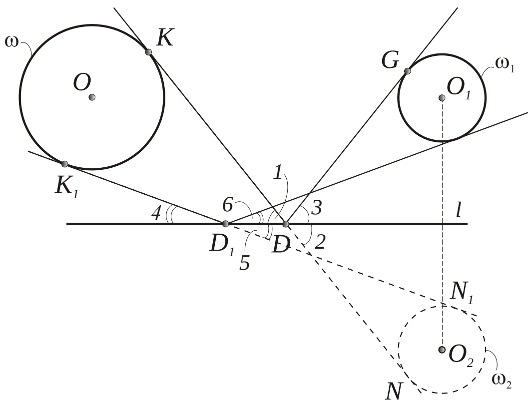


рис.4

<u>Решение</u>. Строим окружность ω_2, симметричную ω_1 относительно l. Тогда *внутренние касательные Кардано* к окружностям ω и ω_2 дадут искомые две точки. Покажем

это. Пусть KN – внутренняя касательная к ω и ω_2 – пересекает l в точке D. Пусть также DG – касательная к ω_1. Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ (вертикальные), а $\angle 2 = \angle 3$ (из соображений симметрии), то $\angle 1 = \angle 3$ и D – точка, которую необходимо было построить.

Аналогично касательная K_1N_1 в пересечении с l даст точку D_1. При этом $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$ и D_1 – также является искомой точкой.

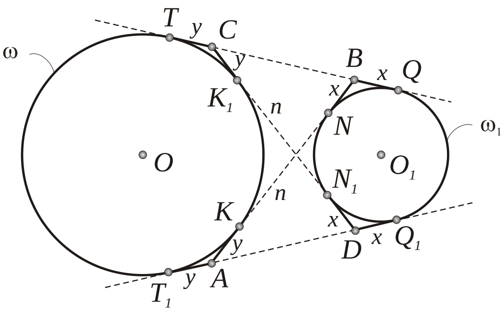


рис.5

Задача 3. *Даны две окружности ω и ω_1. $TQ = T_1Q_1 = q$ – внешние касательные к этим окружностям. $KN = K_1N_1 = n$ – внутренние касательные к этим окружностям. AB и CD – отрезки, заключенные между внешними касательными и содержащие внутренние касательные (рис.5). Кроме того, $BN = BQ = DN_1 = DQ_1 = x$; $CT = CK_1 = AT_1 = AK = y$. Докажите справедливость следующих равенств: а) $x = y$; б) $BC = AD = n$; в) $AB = CD = q$.*

Решение.

а) Поскольку $BK = BT$ (касательные из B к ω), то $x + n = BC + y$, откуда $BC = x + n - y$ *(1)* $CQ = CN_1$ (касательные из C к ω_1). Поэтому $CB + x = y + n$ $\Rightarrow CB = y + n - x$ *(2)*.

Сравнив *(1)* и *(2)*, получаем: $x = y$.

б) Так как, например, из *(1)* $BC = x + n - y$ и $x = y$, то $BC = n$. Аналогично, $AD = n$.

$BC = AD = n$

в) $TQ = BC + x + y = n + 2x$

Но и $AB = n + x + y = n + 2x$

Следовательно, $AB = TQ = q = CD$.

Задача 4. *AE и AF – касательные к окружности ω. Провести между ними еще одну касательную BC данной длины a.*

Решение. Анализ показывает, что если касательная $BC = a$ проведена (G – точка касания BC с ω), и в ΔABC вписана окружность ω_1, которая касается BC в точке D *(рис.6)*, то DG – *внутренняя касательная Кардано* к ω и ω_1. Продолжив ее до пересечения с AE и AF получим соответственно точки B и C. Таким образом, задача сводится к построению окружности ω_1. Пусть L и M – точки касания ω_1 соответственно с AC и AB.

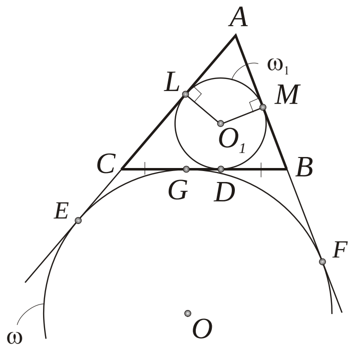


рис.6

Известно, что $AL = AM = p - a$, где p – полупериметр треугольника ABC и $BC = a$. Поскольку $AE = AF = p$ *(покажите)*, то точки L и M мы можем построить. Значит, можем найти точку O_1 – центр ω_1 – и построить саму окружность ω_1 (ее радиус $O_1L = O_1M$). Остается построить внутреннюю касательную к ω и ω_1. Затем продолжить ее до пересечения с AE и AF.

Задача 5. *Найти точки касания со сторонами треугольника ABC его вневписанных окружностей, не определяя их центров и радиусов.*

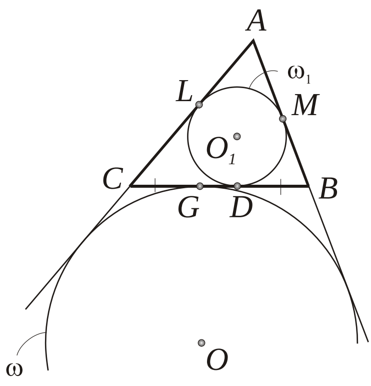


рис.7

Решение. Пусть ω – одна из трех вневписанных окружностей ΔABC, касающаяся BC и продолжений двух других сторон *(рис.7)*. Чтобы построить точку G касания ω со стороной BC, впишем в ΔABC окружность ω_1 (ее центр O_1 – точка пересечения внутренних биссектрис ΔABC). Пусть также ω_1 касается BC в точке D. Тогда $CG = BD$ согласно *задаче 3,а* ($x = y$).

Аналогично точке G находятся две другие точки касания вневписанных окружностей со сторонами AB и AC.

Задача 6. *На каком расстоянии друг от друга необходимо поместить окружности ω и ω_1 радиусов R и r, чтобы их внутренние касательные были перпендикулярны?*

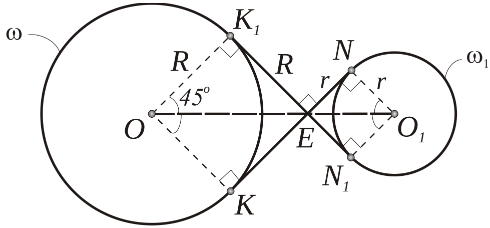


рис.8

Решение. Пусть касательные KN и K_1N_1 пересекаются в точке E под углом $90°$ *(рис.8)*. Их центры O и O_1 лежат на одной прямой с E (из соображений симметрии). Очевидно, $\angle KOE = \angle K_1OE = 45°$. Тогда $OK_1 = K_1E = R$ и $OE = R\sqrt{2}$.

Аналогично, $O_1E = r\sqrt{2}$. Значит, окружности надо поместить на расстоянии $OO_1 = (R+r)\sqrt{2}$.

Задача 7. *К окружностям ω и ω_1 радиусов R и r соответственно проведены внешняя касательная TQ и внутренняя касательная KN (рис.9). Найдите разность* $TQ^2 - KN^2$.

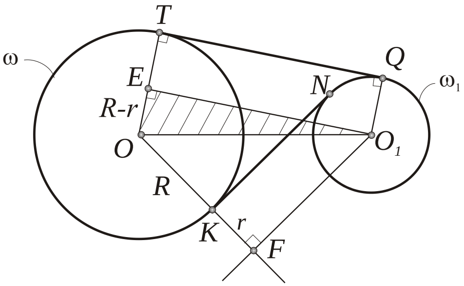


рис.9

Решение.

Из прямоугольного ΔOEO_1:

$$O_1E^2 = TQ^2 = OO_1^2 - (r-R)^2$$

Из прямоугольного ΔOFO_1: $O_1F^2 = KN^2 = OO_1^2 - (R+r)^2$.

Тогда $TQ^2 - KN^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$.

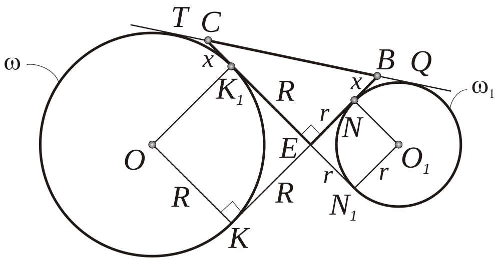


рис.10

Задача 8. *Окружности ω и ω_1 радиусов R и r расположены так, что их внутренние касательные KN и K_1N_1 пересекаются в точке E под углом $90°$ (рис.10). Лучи KN и K_1N_1 пересекают внешнюю касательную TQ соответственно в точках B и C. Найдите площадь* ΔBEC.

Решение. Нетрудно заметить, что, поскольку $KN \perp K_1N_1$, то $KN = K_1N_1 = R + r$. Значит, и $BC = KN = R + r$ *(задача 3,б)*. Кроме того, $BN = CK_1 = x$ *(задача 3,а)*. По теореме Пифагора для ΔBEC имеем: $(R+x)^2 + (r+x)^2 = (R+r)^2$, или $2Rx + 2rx + 2x^2 = 2Rr$. То есть, $Rx + rx + x^2 = Rr$.

$S_{BEC} = \frac{1}{2}CE \cdot BE = \frac{1}{2}(R+x)(r+x) = \frac{1}{2}(Rr + Rx + rx + x^2)$ $S_{BEC} = Rr$.

Несколько задач на внутренние и внешние касательные Кардано предложим решить самостоятельно.

Задача 9. К окружностям ω и ω_1 радиусов R и r проведены внешние касательные TQ и T_1Q_1, которые при продолжении пересекаются под прямым углом. Найдите TQ.

Задача 10. Окружности ω и ω_1 имеют внешнее касание. TQ и T_1Q_1 общие внешние касательные к этим окружностям. Докажите, что в четырехугольник TQT_1Q_1 можно вписать окружность.

Задача 11. Окружности ω и ω_1 радиусов R и r соответственно с центрами O и O_1 имеют внешнее касание в точке E *(рис.11)*. EF – внутренняя касательная окружностей. Докажите, что: *а)* $TQ = 2\sqrt{Rr}$;

б) $\angle TEQ = 90°$; *в)* $\angle OFO_1 = 90°$.

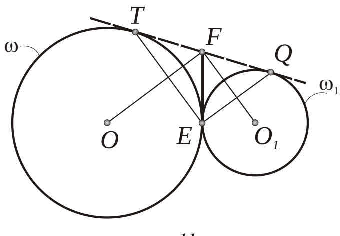


рис.11

Задача 12. Дана прямая l и точка E на ней, а также прямая q. Постройте окружности ω и ω_1 с центрами на l, которые внешне касаются в точке E, а прямая q является их общей внешней касательной.

Задача 13. Докажите, что 6 точек на *рис.5* $O - C - B - O_1 - D - A$ принадлежат одной окружности.

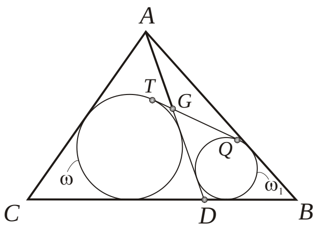


рис.12

Задача 14. AD – произвольная чевиана в треугольнике ABC. В треугольники ADC и ADB вписаны окружности ω и ω_1 соответственно *(рис.12)*. Их общая внешняя касательная TQ пересекает AD в точке G. Докажите, что длина отрезка AG не зависит от положения точки D на стороне BC.

Глава 7

Астрономия и геометрия Тихо де Браге и Иоганна Кеплера

Самым авторитетным астрономом Европы конца XVI века был датчанин *Тихо де Браге (1546–1601)*. Действительно, лучшие инструменты для наблюдений за звездами были созданы в его обсерватории на острове Хвен неподалеку от Швеции. Звездный каталог Тихо де Браге по качеству наблюдений превосходил все предыдущие. Его исследования вспышки Новой звезды в созвездии Кассиопея (1572 г.) поколебали теорию Аристотеля, который утверждал неизменность мира «неподвижных звезд». Браге опроверг Аристотеля и в «кометном» вопросе. Дело в том, что «хвостатые» звезды, по наблюдениям Браге, пересекали пространства различных планет, двигаясь по некоторой овальной орбите. Следовательно, нет преград в небесах и не существует никаких хрустальных сфер, как считал Аристотель.

Тихо де Браге ниспровергал и Птолемея, доказывая, что все планеты (кроме Земли) движутся вокруг Солнца. Но он сражался и с теорией Коперника, полагая очевидным фактом вращение Солнца вокруг Земли. Непревзойденный наблюдатель, он пригласил к себе в помощники молодого Кеплера. А умирая, оставил ему бесценные материалы наблюдений движения Марса вокруг Солнца. Самоотверженная обработка этих материалов позволила Кеплеру через 8 лет открыть важнейшие законы движения планет – *законы Кеплера*. Тихо де Браге попросил выбить на своем могильном камне такую надпись: «Я жил недаром!» Как с этим не согласиться, учитывая, что Браге сделал максимум того, что может невооруженный глаз при наблюдениях неба (телескопы появятся позже)!..

Что касается геометрии, то звездные исследования подтолкнули ученого к созданию формулы, которая сегодня носит его имя.

Формула Тихо де Браге

(формула для нахождения угла треугольника, если известно отношение двух сторон и угол между ними):

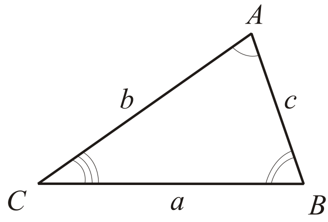


рис.1

$$\operatorname{ctg} C = \frac{\frac{b}{c} - \cos A}{\sin A} = \frac{\frac{a}{c} - \cos B}{\sin B}$$

Доказательство.

$$\frac{b}{c} = \frac{2R\sin B}{2R\sin C} = \frac{\sin(A+C)}{\sin C} = \frac{\sin A\cos C + \cos A\sin C}{\sin C};$$

$$\frac{b}{c} = \sin A \cdot \operatorname{ctg} C + \cos A, \text{ откуда } \operatorname{ctg} C = \frac{\frac{b}{c} - \cos A}{\sin A}.$$

Формула Тихо де Браге, интересная сама по себе, помогает решить целый ряд задач. Покажем это.

Задача 1. *Точки E и F делят сторону BC равностороннего треугольника ABC на три равные части (рис.2). Найдите величины углов $BAE = \alpha$ и $BAF = \beta$.*

Решение.

По *формуле Тихо де Браге* для ΔBAE имеем:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\frac{3n}{n} - \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}; \ \alpha = \operatorname{arcctg} \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

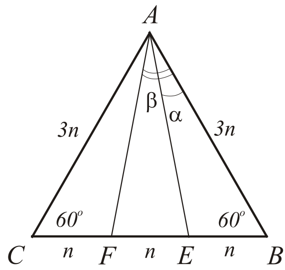


рис.2

Вновь *по формуле Тихо де Браге* для ΔBAF:

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{\frac{3n}{2n} - \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}; \ \beta = \operatorname{arcctg} \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Задача 2. *В прямоугольном треугольнике ABC* ($A=90°$) *катет* $AC=b$, *а биссектриса прямого угла* $AL=l$ *(рис.3). Найдите острые углы треугольника ABC.*

Решение.

По *формуле Тихо де Браге* для ΔACL получаем:

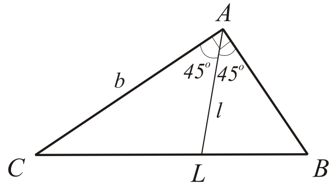


рис.3

$$\operatorname{ctg} C=\frac{\frac{b}{l}-\cos 45°}{\sin 45°}=\frac{\frac{b}{l}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{b\sqrt{2}}{l}-1 .$$

Тогда $C=\operatorname{arcctg}\left(\frac{b\sqrt{2}}{l}-1\right)$; $B=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg}\left(\frac{b\sqrt{2}}{l}-1\right)$.

Задача 3. *Определите углы ромба, если его сторона видна из середины противоположной стороны под углом α.*

Решение. Пусть $ABCD$ – данный ромб со стороной a; K – середина BC и $\angle AKD=\alpha$ *(рис.4)*. По *формуле Тихо де Браге* для ΔABK :

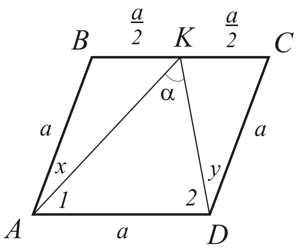


рис.4

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\frac{a}{\frac{a}{2}}-\cos B}{\sin B}=\frac{2-\cos B}{\sin B}.$$

По *формуле Тихо де Браге* для ΔDCK :

$$\operatorname{ctg} y=\frac{\frac{a}{\frac{a}{2}}-\cos C}{\sin C}, \text{ где } C=180°-B .$$

Тогда $\operatorname{ctg} y=\frac{2+\cos B}{\sin B}$. Поскольку $x+y+\angle 1+\angle 2=180°$ и, с другой стороны, $\alpha+\angle 1+\angle 2=180°$ (ΔAKD), то $x+y=\alpha$.

Следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg} y-1}{\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y}=\frac{3}{4\sin B}$,

откуда $\sin B=\frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

Задача 4. *Пусть φ – острый угол между медианой AM и стороной BC в треугольнике ABC (рис.5). Докажите, что* $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{2}\left|\operatorname{ctg}C - \operatorname{ctg}B\right|$.

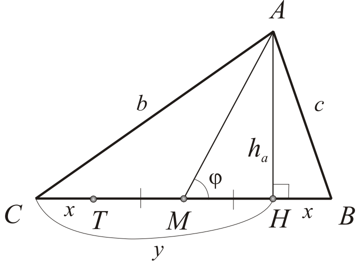


рис.5

Доказательство.

Пусть в ΔABC углы B и C – острые и $C < B$. Тогда $\operatorname{ctg}C > \operatorname{ctg}B$.

По *формуле Тихо де Браге*

$$\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}C - \operatorname{ctg}B) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{b}{c} - \cos A}{\sin A} - \frac{\frac{c}{b} - \cos A}{\sin A}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{b}{c} - \frac{c}{b}}{\sin A}\right) = \frac{b^2 - c^2}{2bc\sin A} = \frac{b^2 - c^2}{4S}.$$

Из ΔAHM $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{MH}{AH}$, где $AH = h_a$ – высота в ΔABC. Найдем MH. Пусть $BH = x$ и $CH = y$. Отложим $CT = x$. Тогда $TM = MH$ (M – середина BC). По теореме Пифагора для треугольников ABH и ACH имеем: $c^2 - x^2 = b^2 - y^2$; $b^2 - c^2 = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$.

Но $y + x = a$, в то же время $y - x = TH = 2MH$.

Имеем: $b^2 - c^2 = 2MH \cdot a$, или $MH = \frac{b^2 - c^2}{2a}$.

Значит, $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{MH}{AH} = \frac{b^2 - c^2}{2ah_a} = \frac{b^2 - c^2}{4S}$, то есть $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}C - \operatorname{ctg}B)$.

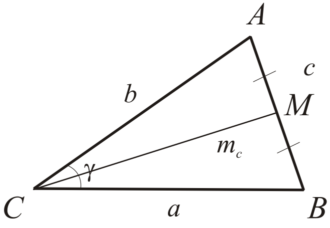


рис.6

Задача 5. *В треугольнике ABC известными величинами являются: сторона* $AB = c$; *медиана* $CM = m_c$ *и* $\angle ACB = \gamma$ *(рис.6). Найдите площадь треугольника ABC.*

Решение. По *формуле Тихо де Браге*

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{\frac{b}{c} - \cos A}{\sin A} = \frac{b - c\cos A}{c\sin A} = \frac{b^2 - bc\cos A}{bc\sin A} = \frac{2b^2 - 2bc\cos A}{2bc\sin A}.$$

Поскольку $2bc\sin A = 4S$ (S – площадь ΔABC) и $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$ (*теорема косинусов* для этого же треугольника), получим:

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{2b^2 - b^2 - c^2 + a^2}{4S} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2 - c^2}{8S}.$$

Учитывая формулу медианы $4m_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$, получим: $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{4m_c^2 - c^2}{8S}$,

откуда $S = \frac{4m_c^2 - c^2}{8} \cdot \operatorname{tg}\gamma$.

Итак, *Иоганн Кеплер (1571–1630)*, немецкий математик и астроном, оставшись один, берется за неимоверно сложный труд – обработать результаты многолетних наблюдений движения Марса вокруг Солнца. Восемь лет, живя впроголодь и не получая ни гроша за эту работу, он анализирует результаты наблюдений *Тихо де Браге*.

Работает так напряженно, что, по его словам, *«едва не сошел с ума, размышляя и соображая»*. Беспримерное упорство Кеплера во имя науки в конце концов было вознаграждено: Вселенная открыла ученому свои тайны и законы.

1й закон Кеплера. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

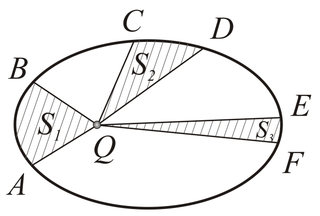


рис.7

2й закон Кеплера. Планеты движутся по своим орбитам с переменной скоростью. При этом площади, описываемые радиусом-вектором от центра Солнца до планеты за равные промежутки времени, равны.

Согласно *рис.7* $S_1 = S_2 = S_3$, где дуги *AB, CD* и *EF* пройдены планетой в равные промежутки времени (*Q* – Солнце).

3й закон Кеплера. Квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

Для получения третьего закона Кеплеру понадобилось еще 10 лет напряженной работы после нахождения первых двух законов. И это – во время эпидемий оспы, унесших жизни жены и сына, постоянных гонений (Кеплер-протестант жил среди католиков), бедности и нищеты, самоотверженного спасания мамы от пыток и костра (ее обвиняли в колдовстве). Как тут не восхититься мужеством, научным подвигом Иоганна Кеплера! В книге «Гармония мира», в которой был сформулирован 3^{й} закон Кеплера, автор писал: *«Моя книга может сотни лет ждать своего читателя, ведь даже самому Богу пришлось шесть тысяч лет дожидаться того, кто постиг его работу!..»*

Что же касается геометрии, то после того, как Кеплер использовал геометрию в формулировке законов движения планет *(рис.7)*, интерес к ней очень и очень возрос.

Кроме того, Иоганн Кеплер написал книгу с веселым названием «Новая стереометрия винных бочек». Дело в том, что в австрийском городке, где он жил, однажды случился небывалый урожай винограда. Все кругом было заставлено винными бочками. Кеплер заинтересовался, каким образом быстро и точно вычислить емкость бочек разной формы. В результате он нашел объемы 92^{х} тел вращения. При этом Кеплер использовал идеи, приведшие впоследствии к открытию математического анализа Лейбницем и Ньютоном. А пока что сложился отличный набор экстремальных задач, три из которых мы предложим вниманию читателя. Напомним, что автором этих задач является замечательный астроном и математик *Иоганн Кеплер*.

Разве что мы позволим себе применить современные математические методы при их решении (например, использовать производную, «неравенство Коши для трех»). Действительно, во времена Кеплера алгебраический аппарат не был столь развит, поэтому авторские решения покажутся нам длинными, громоздкими.

Задача 6. *В данную окружность впишите прямоугольник наибольшей площади.*

Решение. Как известно, площадь произвольного четырехугольника может быть вычислена по формуле: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$, где d_1 и d_2 – диагонали четырехугольника, φ – угол между ними. В нашем случае $d_1 = d_2 = 2R$ *(рис.8)*. Максимальное значение $\sin\varphi$ равно 1 при $\varphi = 90°$. Стало быть, диагонали прямоугольника должны быть перпендикулярны. *Это – квадрат*.

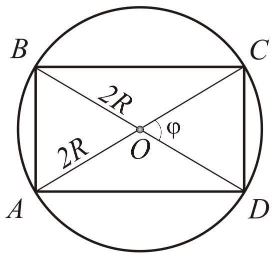


рис.8

Задача 7. *Из всех прямоугольных параллелепипедов, вписанных в одну и ту же сферу, куб имеет наибольший объем. Докажите!*

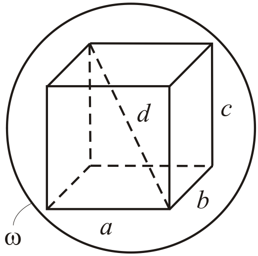


рис.9

Доказательство. Очевидно, диагональ d прямоугольного параллелепипеда совпадает с диаметром сферы и вычисляется по формуле: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ *(рис.9)*. Объем же его равен: $V = abc$. Согласно «неравенству Коши для трех» $abc \le \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$. В свою очередь, $\dfrac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ – неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным.

Тогда тем более $abc \le \left(\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^3 = \left(\dfrac{d}{\sqrt{3}}\right)^3$. Знак равенства имеет место, когда $a = b = c$. А наибольший объем $V_{\max} = \dfrac{d^3\sqrt{3}}{9}$, где $d = 2R$.

Задача 8. *Из всех цилиндров, вписанных в данный шар, наибольший объем имеет тот, высота h которого в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса основания этого цилиндра. Докажите!*

Доказательство. Объем цилиндра, как известно, вычисляется по формуле: $V = S_{осн} \cdot h = \pi r^2 h$, где $4r^2 = d^2 - h^2$ *(рис.10)* и $r^2 = \dfrac{1}{4}(d^2 - h^2)$. Тогда

$V = \dfrac{\pi}{4}(d^2 - h^2)h = \dfrac{\pi}{4}(d^2 h - h^3)$, где $d = 2R$.

$V'(h) = \dfrac{\pi}{4}(d^2 - 3h^2) = 0$, откуда $h = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ – точка максимума:

$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ \hline & \bullet & \\ \nearrow & \dfrac{d}{\sqrt{3}} & \searrow \end{array}$$

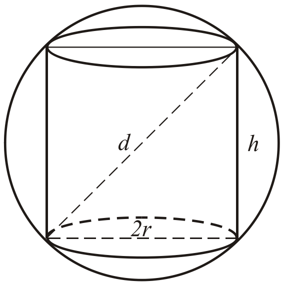


рис.10

Значит, в случае максимума $d^2 = 3h^2$ и $r^2 = \dfrac{1}{4}(d^2 - h^2) = \dfrac{1}{4}(3h^2 - h^2) = \dfrac{h^2}{2}$, или $h = r\sqrt{2}$.

Покажем, как Кеплер вычислял площадь круга. Это представляется важным, поскольку аналогичным образом Кеплер доказал ряд формул для площадей и объемов, известных со времен Древней Греции. Эти же идеи были использованы им в «Стереометрии винных бочек».

Разделим окружность на n равных частей и соединим точки деления с центром. Развернем окружность в отрезок $A_1T = 2\pi R$ *(рис.11)*.

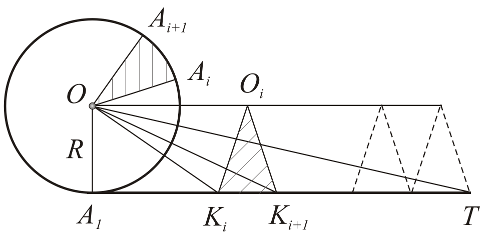


рис.11

Секторы вида A_iOA_{i+1} на отрезке A_1T образуют n равнобедренных треугольников. Тогда весь круг равновелик «частоколу», состоящему из равнобедренных треугольников вида $K_iO_iK_{i+1}$ (у них основание одно и то же, а высоты равные). Следовательно, площадь круга равна площади треугольника A_1OT.

При этом $S_{A_1OT} = \dfrac{1}{2} \cdot A_1T \cdot A_1O$, или $S_{A_1OT} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$.

Итак, площадь круга радиуса R вычисляется по формуле $S = \pi R^2$.

В заключение – несколько задач для самостоятельного решения, связанных с формулой Тихо де Браге или задачами Кеплера на экстремум.

Задача 9. Найдите углы треугольника, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию и отношение наибольшей стороны к наименьшей равно 2.
Ответ. $90°; 60°; 30°$

Задача 10. Докажите, что сумма котангенсов углов треугольника вычисляется по формуле: $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

Задача 11. Дан ΔABC. Окружность, описанная на BC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC в точках N è T соответственно. Причем, $BN : NA = 1:3$; $CT : TA = 1:2$. Найдите углы ΔABC.

<u>*Ответ*</u>. $A = 45°$; $B = \operatorname{arcctg}\left(\frac{4}{3} - \sqrt{2}\right)$; $C = \operatorname{arcctg}\frac{1}{2}$

Задача 12. Чтобы в данный конус вписать цилиндр наибольшего объема, радиус основания цилиндра должен составлять $\frac{2}{3}$ радиуса основания конуса. Докажите!

Задача 13. Найти наибольший возможный объем параллелепипеда, вписанного в правильный тетраэдр объема V.

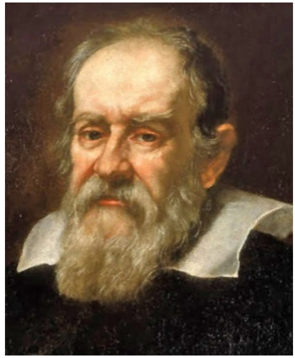
<u>*Ответ*</u>. $\frac{2V}{9}$

Задача 14. Боковое ребро правильной n-угольной пирамиды образует с плоскостью основания угол φ. При каком φ объем пирамиды будет максимальным?

<u>*Ответ*</u>. $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$

Глава 8

Галилео Галилей и его ученики



В 1610 году (400 лет назад!) *Галилео Галилей (1564–1642)* направил изготовленный собственноручно телескоп на небо. То, что увидел ученый, потрясло его. Оказывается, на Луне существуют горы! А Венера имеет фазы, стало быть, вращается вокруг Солнца (Коперник прав!) На самом Солнце есть пятна! (Хотя Аристотель утверждал, что небеса стерильно чисты). У Юпитера имеются спутники! (Значит Земля со своим спутником Луной не уникальна). И Млечный Путь – это вовсе не полоса, а миллионы звезд, удаленных на гигантские расстояния!..

В юности любимым занятием Галилея была геометрия. Он зачитывался трудами Архимеда и Евклида. Великого Архимеда считал своим Учителем. Главной книгой считал книгу Природы: «Книга Природы написана треугольниками, окружностями и другими геометрическими фигурами, без которых человек не сможет понять в ней ни единого слова».

…Неутомимо поднимался Галилей на Пизанскую башню, чтобы узнать у Природы законы падения тел. Со времен Аристотеля считалось, что тяжелые тела падают быстрее легких. Галилей опроверг это утверждение. Экспериментально он также показал, что один и тот же железный шарик быстрее движется по дуге, нежели по хорде *(рис.1)*.

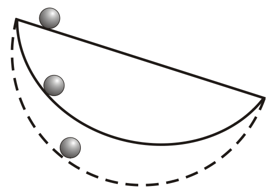


рис.1

Тогда Галилей стал искать «самую быструю кривую». И нашел ее, и дал ей название – *циклоида* («связанная с окружностью»). *Циклоиду* описывает произвольная точка T окружности, которая катится без скольжения по горизонтальной прямой l *(рис.2)*. Галилей первым установил, что площадь одной арки циклоиды в 3 раза больше площади образующего ее круга ω («теорема Галилея»). Впоследствии математики назвали циклоиду «Еленой Геометрической» (по аналогии с Еленой Прекрасной у Гомера) за ее удивительные свойства!..

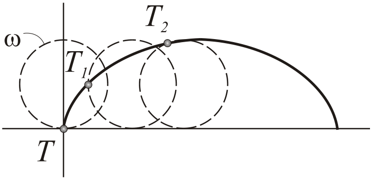


рис.2

Галилей изобрел и *пропорциональный циркуль* для уменьшения и увеличения чертежей, который стал широко использоваться в картографии и военном деле.

Главный труд Галилея – это книга в 500 страниц, названная им «Диалог о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой». В этой книге убедительно и страстно доказывается, что открытия Коперника – не гипотеза, но истина. Как тут было не разъяриться инквизиции, утверждавшей: «Земля была и будет неподвижной вовеки веков!»? Галилея заставляют отречься от того, что он написал. Затем держат его под домашним арестом. Но он не сдается: пишет книгу о математических моделях исследования Природы. Так что права легенда о том, что после насильного отречения от своих взглядов Галилей негромко, но твердо сказал о Земле: "Eppur si muove!" («А все-таки она вертится!») И хотя Галилею было запрещено разговаривать с кем-либо о движении Земли, никто не смог запретить ему: открыть законы инерции, закон падения тел, закон колебания маятника и многое-многое другое. Никто не смог ему запретить иметь замечательных, верных учеников, достойно продолживших его научные изыскания. О них мы и поведем дальнейший разговор.

Винченцо Вивиани *(1622–1703)*, судя по всему, был любимым учеником Галилея. С 17-летнего возраста Вивиани был рядом с Галилеем, жившим в домике под Флоренцией после приговора инквизиции. Вивиани поставил цель увековечить память Учителя и многое для этого сделал, пересказывая и записывая беседы с Галилеем.

Сам же Вивиани построил касательную к циклоиде Галилея, восстановил пятую книгу «Конических сечений» Аполлония, в которой исследовались наибольшие и наименьшие значения в геометрии. Перевел одну из книг «Начал» Евклида. Именем *Вивиани* названа пространственная кривая, полученная при пересечении кругового цилиндра с шаром. При этом шар лежит на поверхности цилиндра, и его радиус равен диаметру основания цилиндра.

В 1659 году Вивиани издал книгу «О максимальных и минимальных значениях». В этой книге впервые была помещена задача, ставшая впоследствии знаменитой:

«На плоскости даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Для какой точки X плоскости сумма расстояний $AX + BX + CX$ *будет минимальной?»*

Считается, что первым решил эту задачу *Э. Торичелли*, но она, несомненно, заслуживает отдельного разговора. Мы же остановимся на задаче, авторство которой приписывается *Вивиани*.

Задача Вивиани.

Даны две параллельные прямые l и n, расстояние между которыми равно h. На прямой l взят отрезок $AB = a$. На прямой n – точка C (рис.3). Где на AC надо взять точку K такую, чтобы сумма площадей треугольников AKB и CKD была минимальной ($D = BK \cap n$)?

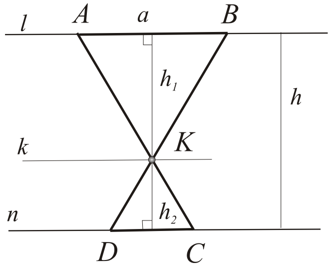


рис.3

Решение.

Пусть расстояние от искомой точки *K* до *l* и *n* соответственно равны h_1 и h_2.

Из подобия треугольников *AKB* и *CKD* следует: $\dfrac{a}{CD} = \dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{h_1}{h - h_1}$. Тогда

$CD = a \cdot \dfrac{h - h_1}{h_1}$. Запишем удвоенную сумму площадей ΔAKB и ΔCKD:

$$2(S_{AKB} + S_{CKD}) = a \cdot h_1 + a \cdot \frac{h - h_1}{h_1} \cdot (h - h_1) = ah_1 + a \cdot \frac{(h - h_1)^2}{h_1} = a \cdot \left(h_1 + \frac{h^2}{h_1} - 2h + h_1 \right).$$

Поскольку величины *a* и *h* постоянны, то для получения минимальной суммы площадей необходимо минимизировать величину $2h_1 + \dfrac{h^2}{h_1}$.

Заметим, что произведение $2h_1 \cdot \dfrac{h^2}{h_1} = 2h^2 = \mathrm{const}$. Если $xy = \mathrm{const}$, то $(x + y)_{\min}$ получается при $x - y = 0$, т.е. когда $x = y$. Стало быть $(2h_1 + \dfrac{h^2}{h_1})_{\min}$ имеем при

$2h_1 = \dfrac{h^2}{h_1}$, или $h_1 = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$.

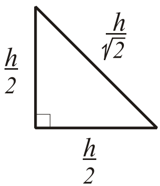


рис.4

Построить отрезок $h_1 = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$, зная длину отрезка h, нетрудно. Например, как показано на *рис.4*. Тогда на расстоянии, равном $h_1 = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$, от прямой *l* проводим прямую $k \parallel l$. Она пересекает *AC* в искомой точке *K*.

Замечание. Удивительно, что положение точки *K* не зависит от длины отрезка *AB*!..

Бонавентура Кавальери *(1598–1647)* родился в Милане, в старинной и знатной семье. Получил хорошее гуманитарное образование, знал латынь и греческий, был знаком с работами древнегреческих математиков. Вступил в монашеский орден в городе Пизе, будучи пятнадцатилетним юношей. После знакомства молодого человека с Галилеем, завязалась дружеская переписка (Галилей тогда преподавал во Флоренции). Из нее видим, с каким почтением и уважением Кавальери относился к Галилею: «Я хотел бы знать Ваше решение того маленького сомнения, которое возникло у меня при чтении Евклида: мне кажется…»

В 1635 году Б. Кавальери издает свой главный труд: «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного». В нем излагается, ставший знаменитым, *«принцип Кавальери»*:

Объемы двух тел (площади двух фигур) будут равны, когда равны между собой площади (длины) всех соответствующих сечений, параллельных одной и той же плоскости (прямой).

Кавальери считал, что линии и плоскости лишены всякой толщины. Идею метода пояснял, сравнивая плоскую фигуру с кусочком ткани, сотканной из параллельных нитей. Только число нитей в кусочке ткани конечно, а число линий в фигуре бесконечно.

С помощью своего «метода неделимых» Кавальери вычислил объем шара, конуса, ряд других формул. Доказал, что площади подобных фигур относятся как квадраты неделимых, а объемы – как кубы неделимых. *«Метод неделимых»* предвосхитил идеи интегрального исчисления. Результаты Кавальери соответствуют такой формуле для вычисления определенных интегралов: $\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Кавальери доказал справедливость теорем Паппа-Гульдина о поверхностях и телах вращения.

Конечно, «принцип Кавальери» имел ряд недостатков: отсутствие строгого алгебраического доказательства, громоздкость приемов. Требование того, чтобы соответствующие неделимые находились на одинаковом расстоянии от главной линии (плоскости). В противном случае получался *парадокс Кавальери*, о котором писал сам автор: треугольники ABD и ACD состоят из вертикальных неделимых. При этом

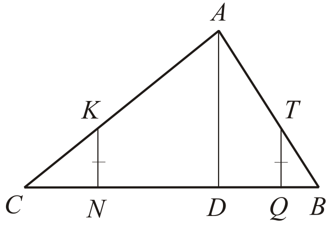


рис.5

каждой неделимой KN левого треугольника соответствует неделимая TQ правого треугольника *(рис.5)*. Получается ошибочный вывод, что $S_{ABD} = S_{ACD}$.

Тем не менее, идеи Кавальери восхитили и пригласили двигаться вперед многих замечательных математиков: Паскаля, Ферма, Валлиса, Ньютона, Лейбница!

Вот, например, что пишет еще один ученик Галилео Галилея *Торричелли*:

«Несомненно, "Геометрия неделимых" Кавальери является прекрасным методом для нахождения теорем, доказательства их огромного количества краткими, прямыми, наглядными способами… Это действительно царский путь сквозь математические тернии».

Мы же покажем, как с помощью «принципа Кавальери» можно вывести формулу для нахождения объема шара.

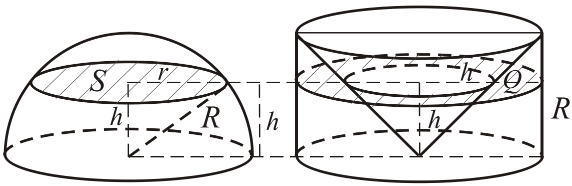


рис.6

Между двумя параллельными плоскостями поместим полусферу радиуса R и цилиндр с основанием того же радиуса *(рис.6)* и высотой, равной R. Покажем, что объем половины шара равен объему тела, полученному при вырезании конуса из цилиндра. Очевидно, площадь сечения $S = \pi r^2 = \pi(R^2 - h^2)$. А площадь кольца $Q = \pi R^2 - \pi h^2 = \pi(R^2 - h^2)$. Тогда, согласно «принципу Кавальери», объем половины шара равен $V_ц - V_к$ (объему цилиндра, из которого вырезан конус).

Но $V_ц = \pi R^2 \cdot R = \pi R^3$; $V_к = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \dfrac{1}{3}\pi R^3$. Тогда объем половины шара $V_1 = \pi R^3 - \dfrac{1}{3}\pi R^3 = \dfrac{2}{3}\pi R^3$. Поскольку $V = 2V_1$, то объем шара $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Эванджелиста Торричелли *(1608–1647)*, родившийся в небольшом городке Фаэнце, изучал математику в Риме под руководством Кастелли – еще одного ученика Галилея. Присоединившись к *Вивиани, Торричелли* вместе с ним помогал ослепшему ученому записывать и оформлять его идеи и замыслы. После смерти Галилея Торричелли занял его должность «философа и первого математика великого герцога Тосканского».

Под влиянием идей Галилея Торричелли написал и издал книгу о циклоиде, в которой успешно использовал *«метод неделимых»* Кавальери. Исследовал вопрос о центрах тяжести фигур. (В современных терминах это соответствует формуле нахождения координат центра тяжести плоской фигуры). Будучи профессором математики Флорентийского университета, занимался вопросами оптики, механики, баллистики. Кто сегодня из знающих физику не слыхал о «торичеллевой пустоте»? В геометрии существует точка, названная его именем – *точка Торричелли*. Эта точка столь знаменита, что заслуживает отдельного разговора. Он впереди.

Как мы уже говорили, Торричелли был ярым поклонником *принципа Кавальери*. Он даже считал «Метод неделимых» царским путем в геометрии. Вот, например, каким образом Торричелли находил формулу вычисления площади круга при помощи «метода неделимых» Кавальери.

Пусть дан круг ω радиуса $OA = R$. На касательной, проведенной в точке *A*, отложим отрезок *AT*, равный длине окружности $2\pi R$ *(рис.7)*.

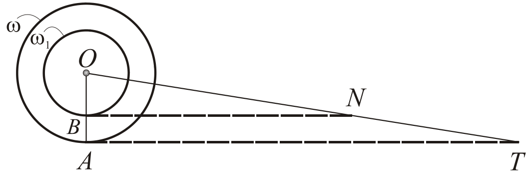


рис.7

Возьмем произвольную точку *B* на радиусе *OA* и построим концентрическую окружность $\omega_1(O;OB)$. Проведем $BN \parallel AT$. Поскольку треугольники *OAT* и *OBN* подобны, то $BN = 2\pi \cdot OB$. Стало быть, отрезок *BN* равен длине окружности ω_1. Тогда системе концентрических окружностей вида ω_1, являющихся неделимыми круга ω, соответствует система неделимых треугольника *OAT* – отрезков вида *BN*. На основании *принципа Кавальери* делаем вывод: площадь круга ω равна площади ΔOAT. Поскольку $S_{OAT} = \dfrac{1}{2} AT \cdot OA = \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$, то и $S_\omega = \pi R^2$.

Вот какие достойные ученики были у Галилео Галилея! Еще один замечательный штрих к его портрету! Не случайно Галилей покоится во Флоренции рядом с Микеланджело и Данте – двумя великими сынами Италии…

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Докажите, что площадь арки циклоиды втрое больше площади круга ω *(рис.2)*.

Задача 2. С помощью «принципа Кавальери» докажите, что объем наклонного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.

Задача 3. Найдите в плоскости треугольника ABC (все углы треугольника меньше 120°) точку X такую, что сумма $(XA + XB + XC)$ – принимает наименьшее значение.

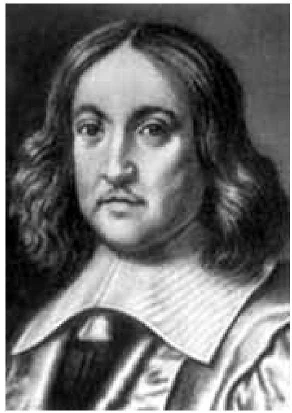
Задача 4. То же, если $A \geq 120^\circ$.

Глава 9

Пьер Ферма — юрист из Тулузы

«Никто, никогда столь успешно не проникал в тайны чисел, как Ферма». Л. Эйлер

«Я считаю геометрию наилучшим, бескорыстнейшим упражнением для ума…» П. Ферма



Пьер Ферма (1601–1665 гг.) жил в непростое для Франции время. Заговоры и дворцовые интриги, махинации кардинала Ришелье, поединки между мушкетерами и гвардейцами кардинала, правление Людовика XIII, а затем и Людовика XIV, говорившего: «Государство – это я».

Ферма не был по профессии математиком. Его специальность – юриспундениция. Почти безвыездно он прожил в Тулузе, городке на юге Франции, работая сначала адвокатом, а затем советником в местном парламенте. Профессия юриста требовала вести уединенный образ жизни, дабы объективно решать все адвокатские вопросы.

Ферма был высокообразованным человеком. Он знал латинский, греческий, испанский, итальянский языки. Блестяще разбирался в искусстве, древнегреческой филологии. Однако страстью Ферма, его «слабостью» (в лучшем смысле этого слова) была математика. Ведя обширную переписку с крупнейшими математиками своего времени (Мерсенном, Паскалем, Валлисом, Декартом), Ферма удивлял их своими находками и открытиями. Он часто был генератором новых идей, звавших к развитию математической науки. Поэтому вклад Ферма в математику чрезвычайно важен и велик, хотя он и не издавал в течение жизни своих книг…

В молодые годы Ферма увлекся трудами древнегреческого геометра Аполлония (~260–170 гг. до н.э.). В «Конических сечениях» Аполлония, сохранившихся почти полностью (без одной книги), его пленили кривые второго порядка: эллипс, парабола и гипербола. Ферма также сделал попытку восстановить утерянное сочинение Аполлония «О плоских местах», в котором рассматривались различные геометрические места точек.

Сведения об этом труде сохранились у Паппа Александрийского (III столетие н.э.). В 1636 году Ферма посылает Мерсенну свою работу «Введение в теорию плоских и пространственных мест». В ней он впервые соединяет воедино алгебру с геометрией. Показывает, что уравнения 1^{й} степени соответствуют прямым, а 2^{й} степени – эллипсам, гиперболам и параболам, то есть коническим сечениям. Ферма, таким образом, становится основоположником *аналитической геометрии*.

Ровно через год, в 1637 году, Рене Декарт издает свою «Геометрию», где независимо от Ферма вводит прямоугольную систему координат и применяет к геометрии алгебраические методы (как говорится, идея витала в воздухе). И хотя Ферма последовательнее внедрял так называемый координатный метод, именно «Геометрия» Декарта оказала наибольшее влияние на дальнейшее развитие математики. Тому имеется ряд причин: труд Ферма был напечатан значительно позднее «Геометрии» Декарта; Декарт ввел более удачные обозначения (ими пользуются и сегодня); Ферма рассматривал лишь положительные числа (первый квадрант), в то время как Декарт использовал все 4 четверти прямоугольной системы координат…

В кругу интересов Пьера Ферма находились и экстремальные задачи. В 1638 году он высылает Мерсенну сочинение «Метод отыскания наименьших и наибольших значений». Идея метода основана на том, что «вблизи экстремума изменение функции нечувствительно».

Как бы мы сегодня решали такую задачу?

Задача 1. *Разделить отрезок $AB = a$ точкой C так, чтобы произведение $AC \cdot BC$ было наибольшим.*

<u>Решение</u>.

I способ.

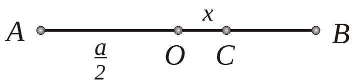


рис.1

$$AC \cdot BC = (\frac{a}{2} + x) \cdot (\frac{a}{2} - x) = \frac{a^2}{4} - x^2 \quad (рис.\ 1).$$

Тогда $(AC \cdot BC)_{\max} = \frac{a^2}{4}$ при $x = 0$, то есть C – середина отрезка AB.

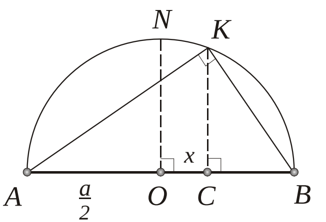


рис.2

II способ.

$AC \cdot BC = CK^2$ *(рис.2)*. Здесь ω – полуокружность, описанная на AB как на диаметре. Поскольку $(KC)_{\max} = ON = \frac{a}{2}$, то $C \equiv 0$.

Ферма решил эту задачу с помощью своего *метода*, который впоследствии будет назван *теоремой Ферма* или *необходимым условием существования экстремума функции*. То есть Ферма, говоря современным языком, находил производную функции и приравнивал ее к нулю. Стало быть, Ферма стоял у истоков *дифференциального исчисления*. Не случайно И. Ньютон говорил: «Намек на метод я получил из способа Ферма проведения касательных».

Рассматривая Пифагоровы «тройки чисел», соответствующие уравнению $x^2 + y^2 = z^2$, Ферма попытался обобщить теорему Пифагора, т.е. решить в целых числах уравнение $x^n + y^n = z^n$ для $n \geq 3$. Вот что он написал в заметках на полях любимой им книги «Арифметика» Диофанта: «Невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата. И вообще, никакую степень, большую двух, на две степени с тем же показателем… Я нашел воистину чудесное доказательство этого факта, однако эти поля для него слишком малы…»

С тех пор практически каждый математик брался за решение этой задачи, названной *великой теоремой Ферма* (разве что Гаусс игнорировал ее, считая ни с чем не связанным, изолированным утверждением). В бумагах самого Ферма было найдено доказательство для $n = 4$. Эйлер доказал утверждение для $n = 3$, Дирихле – для $n = 5$. Позднее были и другие продвижения в этом вопросе.

Но только в 1995 году английский математик, работающий в США, профессор Принстонского университета Эндрю Уайлс полностью доказал *великую теорему Ферма*. И с его доказательством согласился весь научный мир. Эпопея протяженностью в 350 лет была завершена!.. Заметим, что Э. Уайлс «сражался» с ней 30 лет, решил ее методами современной математики и опубликовал на 100 страницах журнала «Анналы математики».

Поэтому остается загадкой, как доказал (и доказал ли вообще) свою теорему Ферма…

В *теории чисел* Ферма действительно не имел себе равных. Он успешно занимался нахождением алгоритма для *дружественных чисел* (двух чисел, каждое из которых равно сумме делителей другого) Нашел несколько *совершенных чисел* (число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме себя). Ферма – автор широко распространенного сегодня *метода бесконечного спуска*. Участникам математических олимпиад никак не обойтись без знания *малой теоремы Ферма*: для всякого простого числа p и числа a, не делящегося на p, имеет место сравнение $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$.

Ферма полагал, что все числа $F_n = 2^{2^n} + 1$ являются простыми. Через 100 лет Л. Эйлер показал, что Ферма ошибался – на примере числа $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$, которое делится на 641.

Да, в этом вопросе Ферма оказался неправ, но в 1796 году юный К. Гаусс, воспользовавшись его формулой, доказал следующее утверждение:
«Если число сторон правильного n-угольника является простым числом Ферма вида $2^{2^n} + 1$*, то такой n-угольник можно построить при помощи циркуля и линейки».*

Стало ясно, что можно построить правильный треугольник ($n = 0$); правильный пятиугольник ($n = 1$); правильный 17-угольник ($n = 2$) и так далее. Вместе с тем, нельзя построить циркулем и линейкой правильный семиугольник, одиннадцатиугольник…

Ферма был дружен с Блезом Паскалем, вел с ним оживленную переписку. В одном из писем Паскаль попросил у Ферма совета по задаче, связанной с игрой в кости. Решение Ферма покорило Паскаля! Оно было другим, но давало такой же, как у Паскаля, ответ. Паскаль в восхищении восклицает: «Я вижу, что истина одинакова и в Тулузе, и в Париже!..» Считается, что своей перепиской Ферма и Паскаль заложили начала *теории вероятностей*.

Достижения Ферма можно продолжить: *принцип Ферма* в геометрической оптике; всестороннее исследование циклоиды; серия задач, связанных с бесконечно убывающей геометрической прогрессией; решение стереометрического аналога задачи Аполлония: построить сферу, касающуюся трех данных сфер…

Остановимся подробнее на некоторых *геометрических моментах* в работах Ферма.

Задача 2. *На сторонах остроугольного треугольника ABC построены во внешнюю сторону равносторонние треугольники AKB, BNC и CTA (рис.3). Докажите, что окружности, описанные около указанных равносторонних треугольников, пересекаются в одной точке F – точке Ферма.*

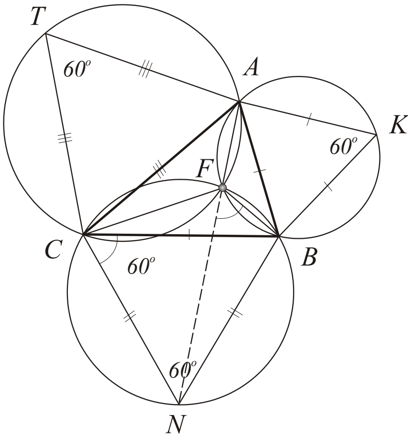


рис.3

Решение. Пусть описанные окружности треугольников AKB и BCN пересекаются в точке F.
Тогда $\angle AFB = 180° - 60° = 120°$ и $\angle BFC = 180° - 60° = 120°$.
Сосчитаем величину угла AFC.
$\angle AFC = 360° - 120° - 120° = 120°$.
Поскольку $\angle AFC + \angle ATC = 120° + 60° = 180°$, то точки $A - T - C - F$ лежат на одной окружности, то есть точка F принадлежит окружности, описанной около треугольника ATC.

Задача 3. *Докажите, что в условиях задачи 2 прямые AN, BT и CK пересекаются в точке F – точке Ферма.*

Решение. Соединим A и F , F и N *(рис.3)*. Как мы уже показали в *задаче 2* $\angle AFB = 120°$. В то же время $\angle BFN = \angle BCN = 60°$ (вписанные, опираются на одну дугу). Тогда $\angle AFN = 120° + 60° = 180°$ и $A - F - N$ – одна прямая. Аналогично показывается, что точки $B - F - T$, а также $C - F - K$ принадлежат одной прямой. Следовательно, *AN, BT* и *CK* пересекаются в точке *F* – *точке Ферма*.

Задача 4. *Докажите, что в условиях задачи 2 точка F является той точкой плоскости, для которой сумма расстояний до вершины A, B и C минимальна.*

Решение. Напомним, что из точки F каждая из сторон AB, BC и AC видна под углом $120°$. Проведем через A прямую перпендикулярно AF, через B – перпендикулярно BF и через C – перпендикулярно CF. В пересечении получим ΔDEG *(рис.4)*. Около четырехугольника $AFBE$ моно описать окружность (два противоположных угла равны по $90°$). Тогда угол DEG равен $60°$. Аналогично $\angle EGD = \angle EDG = 60°$, то есть ΔDEG – равносторонний. Для любой точки

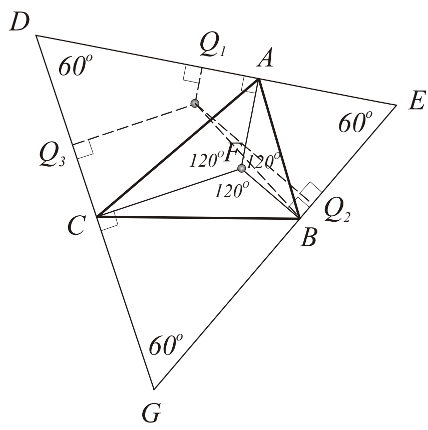


рис.4

внутри равностороннего треугольника сумма расстояний до сторон есть величина постоянная, равная его высоте *(известный факт геометрии треугольника)*. Следовательно, $FA+FB+FC=h_1$, где h_1 – высота в равностороннем ΔDEG.

Покажем, что для любой другой точки Q в плоскости ΔABC сумма $QA+QB+QC>FA+FB+FC$.

Пусть Q_1; Q_2; Q_3 – проекции точек Q на прямые *DE; EG* и *DG* соответственно. Тогда $QQ_1+QQ_2+QQ_3=h_1=FA+FB+FC$. В то же время $QA>QQ_1$ (гипотенуза больше катета). Аналогично $QB>QQ_2$ и $QC>QQ_3$. Стало быть, $QA+QB+QC>h_1=FA+FB+FC$.

Замечание. *Точку Ферма* часто называют *точкой Торричелли*. Судя по всему, Торричелли обнаружил ее раньше Ферма, но доказал минимальность ее суммы расстояний до вершин средствами физики.

Задача 5. *Дан прямоугольник ABCD с отношением сторон* $\frac{AB}{BC}=\sqrt{2}$. *На AB во внешнюю сторону построена полуокружность ω (рис.5). X – произвольная точка ω. Пусть* $K=XC\cap AB$, $N=XD\cap AB$. *Докажите, что* $AK^2+BN^2=AB^2$.

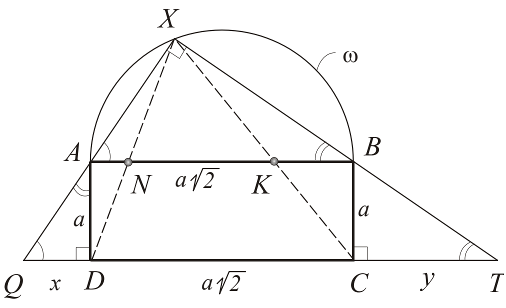


рис.5

Решение. Проведем лучи *XA* и *XB* до пересечения с прямой *CD* в точках *Q* и *T* соответственно. Пусть $QD=x$ и $TC=y$. Пусть также $BC=a$ и $AB=a\sqrt{2}$. Очевидно, $\Delta ADQ\sim\Delta TCB$ *(покажите!)* Тогда $\frac{x}{a}=\frac{a}{y}$, откуда $xy=a^2$ *(1)*.

Найдем сумму QC^2+TD^2.

$$QC^2+TD^2=(x+a\sqrt{2})^2+(y+a\sqrt{2})^2=x^2+y^2+4a^2+2ax\sqrt{2}+2ay\sqrt{2}=$$

$$=x^2+y^2+2a^2+2(ax\sqrt{2}+ay\sqrt{2}+a^2).$$

Заменим согласно *(1)* a^2 на xy.

$$QC^2 + TD^2 = x^2 + y^2 + 2a^2 + 2(ax\sqrt{2} + ay\sqrt{2} + xy) = (x + y + a\sqrt{2})^2 = QT^2$$

Итак, $QC^2 + TD^2 = QT^2$ *(2)*

Поскольку треугольники *XAB* и *XQT* гомотетичны с центром гомотетии в точке *X* и при этом выполняется равенство *(2)*, то справедливо и необходимое равенство: $AK^2 + BN^2 = AB^2$.

Несколько задач, имеющих отношение к геометрическим изысканиям Ферма, предложим для самостоятельного решения.

Задача 6. Докажите, что в условиях *задачи 2* $AN = BT = CK$.

Задача 7. Решите *задачу 4*, воспользовавшись поворотом на $60°$.

Задача 8. Что произойдет с *точкой Ферма*, если треугольник *ABC* – тупоугольный с углом $A \geq 120°$?

Задача 9. Для решения *задачи Ферма (задача 5)* Леонард Эйлер применил *лемму*: $AK \cdot BN = AB \cdot NK + AN \cdot BK$ *(рис.5)*. Докажите ее!

Задача 10. Воспользовавшись *леммой задачи 9*, решите *задачу Ферма (задача 5)*.

Задача 11. Известно, что множество точек *X*, обладающее тем свойством, что $k_1 A_1 X^2 + k_2 A_2 X^2 + \ldots + k_n A_n X^2 = c$ не является пустым. При этом $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$. Докажите, что это множество – окружность *(окружность Ферма-Аполлония)*.

Глава 10

О точке Торричелли — обстоятельно и не спеша!

В XVII столетии этой замечательной точкой интересовались такие выдающиеся математики, как Вивиани, Кавальери, Торричелли, Ферма (кстати, трое первых – ученики Галилео Галилея). Позже эту точку и связанные с ней задачи поднял на уровень проблемы швейцарский математик Якоб Штейнер. Вот почему главная задача нашего разговора называется *задачей Штейнера*. А точка, которая отвечает требованиям задачи, называется *точкой Торричелли* (иногда *точкой Ферма*). Но давайте говорить обо всем по порядку…

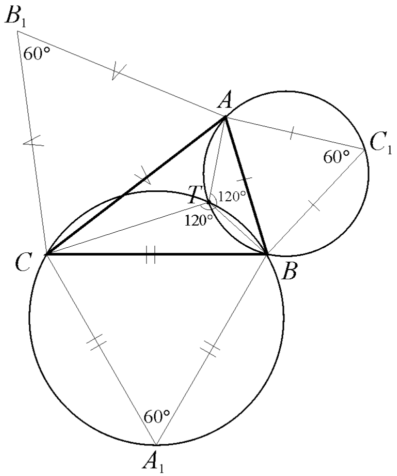


*Рис.*1

Задача 1. *На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Вокруг них описаны окружности, которые называются окружностями Торричелли. Докажите, что все они пересекаются в одной точке – точке Торричелли.*

Решение. Пусть построены равносторонние треугольники ABC_1; BCA_1 и CAB_1 (*рис.*1). Опишем окружности около первых двух. Они пересекутся в точке T.

Поскольку $\angle AC_1B = 60°$, то $\angle ATB = 120°$.

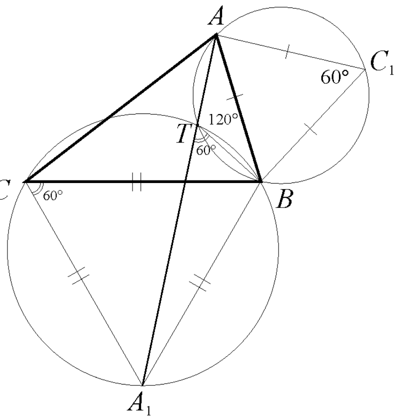
Аналогично $\angle BTC = 120°$. Тогда и $\angle ATC = 120°$ ($360° - 120° - 120°$).

Следовательно, точки A; T; C; B_1 принадлежат одной окружности.

А это и значит, что окружность, описанная около ΔCAB_1, пройдет также через точку T.

Задача 2. *Докажите, что отрезки AA_1; BB_1; CC_1 из предыдущей задачи пересекаются в одной точке, а именно в точке Торричелли.*

Рис.2



Решение. Соединим точку T с A; B и A_1 (*рис.*2). $\angle BTA_1 = \angle BCA_1 = 60°$ (вписанные, опираются на одну дугу). А $\angle ATB = 120°$, поскольку $ATBC_1$ – вписанный четырехугольник. Следовательно, $\angle ATA_1 = 180°$ и точки $A - T - A_1$ принадлежат одной прямой.

Аналогично можно показать, что точки $C - T - C_1$, а также $B - T - B_1$ принадлежат одной прямой. То есть отрезки AA_1; BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке – точке Торричелли.

Задача 3. *Докажите, что* $AA_1 = BB_1 = CC_1$ *(рис.3).*

Решение. Нетрудно увидеть, что $\Delta ABA_1 = \Delta C_1BC$ – по двум сторонам и углу между ними. Действительно, $AB = C_1B$; $BA_1 = BC$ и $\angle ABA_1 = \angle C_1BC = 60° + B$. Таким образом, $AA_1 = CC_1$.

Аналогично можно показать, что $AA_1 = BB_1$.

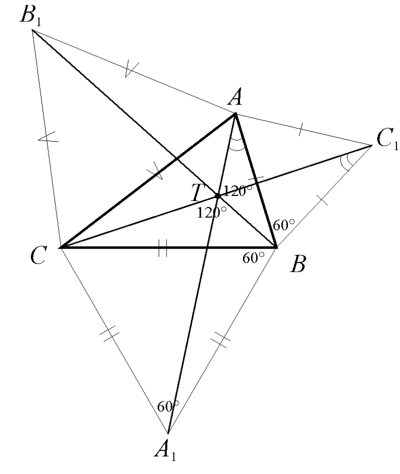


*Рис.*3

Сделаем важное замечание: из *точки* T *Торричелли* каждая сторона видна под углом $120°$. Поэтому она находится внутри треугольника, если ни один из углов треугольника не достигает $120°$. Эта точка будет находиться в вершине тупого угла треугольника, если он равен $120°$. И, наконец, *точка Торричелли* находится вне треугольника, если один из углов превышает $120°$.

Задача 4 (главная, задача Штейнера). *В плоскости* ΔABC *с углом* $A<120°$ *(* A *– наибольший угол) найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.*

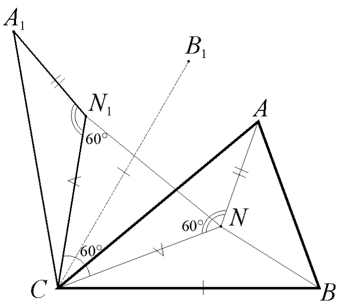


Рис.4

Решение. Пусть точка N является кандидатом на точку, которую мы ищем. Выполним поворот всей системы относительно вершины C на $60°$ против часовой стрелки. При этом точка B перейдет в B_1 (она нас не интересует) N – в N_1, вершина A – в A_1 и отрезок NA – в отрезок N_1A_1 (*рис*.4). Поскольку $\angle NCN_1 = 60°$ и $CN = CN_1$ (при повороте длины отрезков не изменяются), то ΔCNN_1 – равносторонний и $NN_1 = CN$. Тогда $NA + NB + NC = A_1N_1 + N_1N + BN$. Длина ломаной минимальна, когда она является отрезком. Таким образом, точки $A_1 - N_1 - N - B$ должны принадлежать одной прямой.

В таком случае $\angle BNC = 120°$ и $\angle A_1N_1C = 120°$. Но $\angle A_1N_1C = \angle ANC$ (при повороте ΔANC переходит в ΔA_1N_1C), то есть $\angle ANC = 120°$.

Становится очевидным, что точка N является *точкой Торричелли* для ΔABC, или $N \equiv T$.

Задача 5. *В* ΔABC *угол* A *равен* $120°$*. Докажите, что точка минимума суммы* $XA + XB + XC$ *совпадает с вершиной* A*, которая в данном случае совпадает с точкой* T*.*

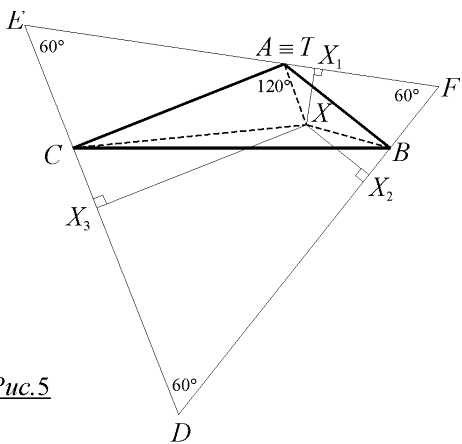


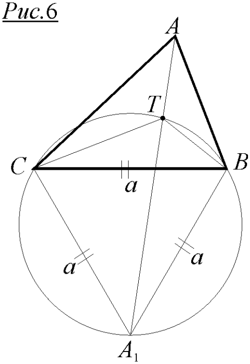
Рис.5

Решение. Опять-таки можно воспользоваться поворотом, но мы предложим другой способ доказательства. Через вершины B и C проведем прямые перпендикулярно AB и AC соответственно. Пусть они пересекутся в точке D (*рис*.5). Очевидно, при этом $\angle BDC = 60°$

(углы ABD и ACD прямые, а $\angle BAC = 120°$). Через точку A проведем прямую под углом $60°$ к прямой DC. Получим равносторонний ΔDEF. Для любой точки X внутри или на стороне равностороннего треугольника сумма ее расстояний до сторон равна высоте этого треугольника (известный факт). То есть $XX_1 + XX_2 + XX_3 = AB + AC = h$ (h – высота равностороннего ΔDEF).

Очевидно, $XA + XB + XC \geq h$ ($XA \geq XX_1$; $XB \geq XX_2$; $XC \geq XX_3$). Следовательно, в нашей задаче вершина A, совпадающая с *точкой Торричелли*, является искомой точкой.

Рис.6



Задача 6. *T – точка Торричелли в остроугольном ΔABC. Докажите, что $TA + TB + TC = AA_1$ (рис.6).*

Решение. По *теореме Птоломея* для вписанного четырехугольника $BTCA_1$ имеем:

$BT \cdot CA_1 + CT \cdot BA_1 = BC \cdot TA_1$, или

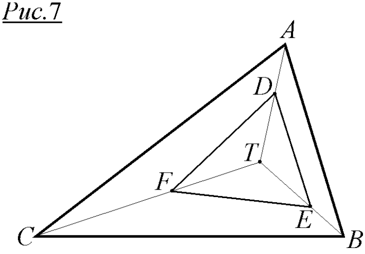
$BT \cdot a + CT \cdot a = TA_1 \cdot a$. Или, после сокращения на a:

$BT + CT = TA_1$. Поскольку точки $A - T - A_1$ принадлежат одной прямой *(см. решение задачи 2)*, то получим необходимое: $TA + TB + TC = AA_1$.

Задача 7. *На отрезках TA, TB, TC (T – точка Торричелли в ΔABC с углами, меньшими $120°$), произвольно взяты точки D, E, F соответственно (рис.7). Будет ли T точкой Торричелли для ΔDEF?*

Решение. Да, поскольку из точки Торричелли все стороны треугольника DEF видны под углами $120°$.

Рис.7



Задача 8. *Построить остроугольный ΔABC по a, A, $t = TA + TB + TC$, где T – точка Торричелли треугольника ABC.*

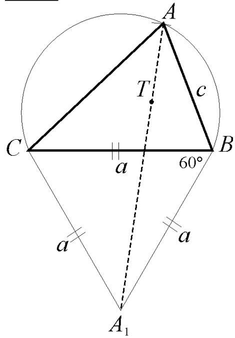


Рис.8

Решение. На стороне $BC = a$ строим сегмент, который содержит угол A (*рис.*8). В противоположную сторону опять-таки на $BC = a$ строим равносторонний ΔBCA_1. Из точки A_1 раствором циркуля, равным t, делаем засечку. Поскольку $TA + TB + TC = AA_1$ (*задача* 6), то в пересечении с сегментом получим необходимую вершину A.

Задача 9. *В треугольнике ABC со сторонами a, b, c все углы меньше $120°$. T – точка Торричелли этого треугольника. Найдите $TA + TB + TC$.*

Решение. Поскольку точка T находится внутри такого треугольника и $TA + TB + TC = AA_1$ (*задача* 6), то рассмотрим ΔABA_1 (*рис.*8).

По теореме косинусов $AA_1^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(60° + B)$;

$AA_1^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 60° \cdot \cos B + 2ac \cdot \sin 60° \cdot \sin B$;

$AA_1^2 = a^2 + c^2 - ac \cdot \cos B + ac\sqrt{3} \cdot \sin B$.

Но $ac \cdot \cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$ (теорема косинусов для ΔABC) и $ac \cdot \sin B = 2S$ (по формуле площади для ΔABC).

Поэтому, имеем: $AA_1^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3} = \left(TA + TB + TC\right)^2$.

Отсюда $\boxed{TA + TB + TC = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3}}}$, где S найдем по формуле Герона.

Задача 10. *Дан ΔABC площади S, наибольший угол которого не достигает $120°$. T – точка Торричелли этого треугольника. Найдите сумму: $TA\cdot TB+TB\cdot TC+TC\cdot TA$.*

Решение. Площадь S треугольника ABC может быть вычислена по такой формуле:

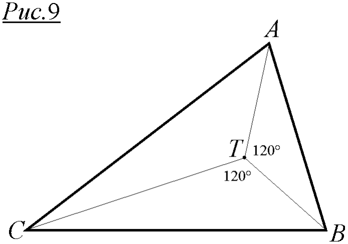
$$S=\frac{1}{2}TA\cdot TB\sin 120°+\frac{1}{2}TB\cdot TC\sin 120°+\frac{1}{2}TC\cdot TA\sin 120°,$$

или $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(TA\cdot TB+TB\cdot TC+TC\cdot TA\right)$.

Отсюда $\boxed{TA\cdot TB+TB\cdot TC+TC\cdot TA=\frac{4S}{\sqrt{3}}}$.

Задача 11. *В условиях задачи 9 найдите расстояние MT, где M – точка пересечения медиан треугольника ABC.*

Рис.9



Решение. Воспользуемся *теоремой Лейбница* для любой точки X плоскости ΔABC и его центроида M:

$$XA^2+XB^2+XC^2=MA^2+MB^2+MC^2+3XM^2.$$

Поскольку отрезки MA, MB, MC равны $\frac{2}{3}$ соответствующих медиан, то

$$MA^2+MB^2+MC^2=\frac{4}{9}\left(m_a^{\,2}+m_b^{\,2}+m_c^{\,2}\right).$$

Но $m_a^{\,2}+m_b^{\,2}+m_c^{\,2}=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ – докажите!

Следовательно, $MA^2+MB^2+MC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$. Пусть роль произвольной точки X выполняет нужная нам точка Торричелли.

Тогда $TA^2+TB^2+TC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)+3TM^2$,

или $\left(TA+TB+TC\right)^2-2\left(TA\cdot TB+TB\cdot TC+TC\cdot TA\right)=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)+3TM^2$.

Учитывая формулы *задач 9 и 10*, получим:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2S\sqrt{3}-\frac{8S}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)+3TM^2,$$

откуда $\boxed{TM^2=\frac{1}{9}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-2S\sqrt{3}\right)}$.

Следствие. Из полученной формулы сразу получается популярное неравенство геометрии треугольника: $a^2+b^2+c^2\geq 4S\sqrt{3}$.

Задача 12. *T – точка Торричелли в треугольнике ABC, наибольший угол которого не достигает $120°$. Докажите, что $TA+TB+TC\geq 6r$ (r – радиус вписанной в ΔABC окружности).*

Решение. $\left(TA+TB+TC\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2S\sqrt{3}$ (*задача* 9).

Но $a^2+b^2+c^2\geq 4S\sqrt{3}$ (следствие *задачи 11*). Тогда $\left(TA+TB+TC\right)^2\geq 4S\sqrt{3}$.

Воспользуемся известным неравенством $S\geq 3\sqrt{3}r^2$ (докажите его!)

Имеем: $\left(TA+TB+TC\right)^2\geq 36r^2$, або $TA+TB+TC\geq 6r$.

Следствие. Поскольку для треугольников *задачи 12* сумма $TA+TB+TC$ является минимальной, то для них выполняется неравенство: $XA+XB+XC\geq 6r$ (где X – произвольная точка плоскости треугольника ABC, все углы которого меньше $120°$).

Замечание. Вообще для любой точки X в плоскости произвольного ΔABC выполняется неравенство $XA+XB+XC\geq 6r$ (так называемое *неравенство Шрейбера*).

Несколько задач, связанных с точкой Торричелли, предлагаем решить самостоятельно.

Задача 13. Докажите, что в треугольнике не может быть больше одной точки с минимальной суммой расстояний от нее до вершин.

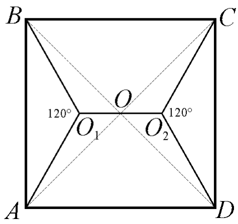
Задача 14. В треугольнике ABC $\angle A > 120°$. Докажите, что свойство минимальной суммы расстояний от точки до вершин имеет вершина A, а не *точка Торричелли*.

Задача 15. Точка N находится внутри равностороннего ΔABC. ND, NE, NF – перпендикуляры к его сторонам. Докажите, что N – точка Торричелли для ΔDEF.

Задача 16. Построить ΔABC по b, c, $t = TA + TB + TC$ (T – точка Торричелли, причем T находится внутри ΔABC).

Задача 17. Во время чемпионата мира по футболу 4 стадиона будут находиться в вершинах квадрата $ABCD$ (рис.10). Как провести сетку дорог, которая соединяет все стадионы? К тому же сетка дорог должна иметь наименьшую возможную длину.

*Рис.*10



Ответ. Искомая сетка дорог состоит из отрезков AO_1; BO_1; O_1O_2; CO_2; DO_2, *где* $\angle AO_1B = \angle CO_2D = 120°$.

Задача 18. Центры равносторонних треугольников, рассмотренных при построении точки Торричелли (*задача 1*) сами являются вершинами равностороннего треугольника. Докажите! (Эту задачу приписывают *Наполеону*).

Задача 19. В треугольнике ABC $\angle A > 120°$. Докажите, что $b + c \geq 6r$.

Глава 11

Рене Декарт (1596–1650). Декартова система координат

«Пока алгебра и геометрия развивались врозь, их прогресс был медленным, применение – ограниченным. Когда же эти две науки были соединены, они стали помогать друг другу и быстро шагать к совершенству».

Ж.Л. Лагранж

Если бы Декарт не написал «Геометрию», в которой прочными дружескими узами связал воедино алгебру и геометрию, то и тогда бы мы причисляли его к когорте крупнейших математиков. Судите сами: Декарт первым стал записывать известные величины, как *a; b; c*, а неизвестные – *x; y; z*. Он упростил обозначение степени, и оно приобрело современный вид: $a^2; x^3; y^4 \ldots$ Он сформулировал *основную теорему алгебры: алгебраическое уравнение* $n^{\underline{\text{ой}}}$ *степени имеет ровно n корней, если учитывать положительные, отрицательные и комплексные корни* (впоследствии доказана К.Ф. Гауссом). Декарт нашел алгоритм образования дружественных чисел, исследовал совершенные числа (те, что равны сумме всех своих делителей). Придал знаку радикала современный вид: $\sqrt{a}$, например. Первым стал говорить о комплексных числах, называя их воображаемыми (imaginaire). Отыскал закономерность, связывающую число вершин *(В)*, граней *(Г)* и ребер *(Р)* многогранника: $В + Г - Р = 2$ (позже эту формулу обобщил и строго доказал Л. Эйлер, чье имя она сегодня и носит).

Человечество почитает Декарта и как крупного философа, основателя нового направления в философии – *картезианства* (*Cartesius* – латинизированное имя Декарта). Его философские взгляды оказали большое влияние на Ньютона и Лейбница. Хотя главное, быть может, это то, что на основе идей Декарта эти выдающиеся ученые разработали принципы дифференциального и интегрального исчисления.

В физике Декарт показал относительность движения и покоя. Вывел закон сохранения количества движения при ударе двух неупругих тел. В оптике он объяснил закон постоянного отношения синусов углов падения и преломления светового луча. Развил математическую теорию радуги, указал на причины ее появления.

Любопытно, что сам себя Декарт считал:

в первую очередь философом;
во вторую – космологом;
в третью – физиком;
в четвертую – биологом
и только в пятую – математиком.

Как тут не вспомнить:

«Нам не дано предугадать,
Как наше слово отзовется!..»

Мы же сейчас попробуем выяснить, почему последующие полтора века после Декарта математика в основном развивалась путями, им предначертанными.

В июне 1637 года в голландском городе Лейдене вышло в свет сочинение господина Декарта «Рассуждение о методе». Одна из частей этого труда называлась «Геометрия». Она-то и совершила переворот в математике! В «Геометрии» Рене Декарта был предложен универсальный метод решения математических задач – *метод координат*. Согласно этому методу алгебраические задачи решаются средствами геометрии. В то же время при решении геометрических задач используется теория алгебраических уравнений. Декарт тем самым объединил «варварскую» алгебру стран арабского халифата и «классическую» геометрию Древней Греции.

Как же это ему удалось? С одной стороны, Декарт предложил все алгебраические операции выполнять с помощью геометрических построений. Для этого некоторый отрезок следует принять за единичный. Тогда можно перемножать и делить отрезки, извлекать из них корни…

Задача 1 *(Декарт). Дан единичный отрезок. С помощью циркуля и линейки разделите отрезок a на отрезок b.*

Решение. Отложив отрезки *a; b; 1* на сторонах произвольного угла и проведя $q \parallel t$ *(рис.1)*, получаем пропорцию, вытекающую из теоремы Фалеса: $\frac{a}{x} = \frac{b}{1}$, откуда $x = \frac{a}{b}$.

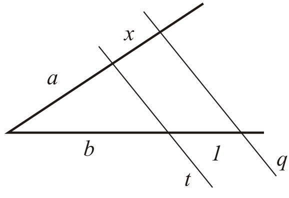


рис.1

Задача 2. *(Декарт). Постройте циркулем и линейкой отрезок, равный $a \cdot b \cdot c$, имея единичный отрезок.*

<u>Решение</u>. аналогично *задаче 1* строим отрезок $y = \dfrac{a \cdot b}{1}$, затем точно так же – отрезок $x = \dfrac{y \cdot c}{1}$.

Задача 3. *(Декарт). Постройте отрезок $\sqrt{a}$, если дан единичный отрезок.*

<u>Решение</u>. На отрезке $a+1$ как на диаметре строим полуокружность *ω (рис.2)*. Тогда, очевидно, $h = \sqrt{a \cdot 1} = \sqrt{a}$.

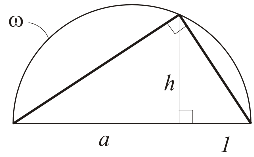


рис.2

Таким образом, утверждает Декарт, алгебраические уравнения можно решать геометрическим методом.

Задача 4. *Постройте корни уравнения $x^2 - mx + n = 0$.*

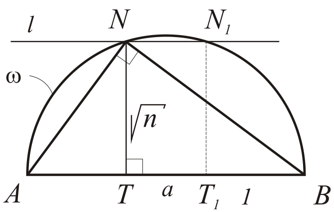


рис.3

<u>Решение</u>. Согласно *теореме Виета* $x_1 + x_2 = m$ и $x_1 \cdot x_2 = n$.

Тогда на отрезке $AB = m$ как на диаметре, строим полуокружность *ω (рис.3)*. На расстоянии $\sqrt{n}$ от диаметра AB ($\sqrt{n}$ строим, как в *задаче 3*) проводим $l \parallel AB$. Она пересекает ω в точке N (или N_1). Проводим $NT \perp AB$ (или $N_1T_1 \perp AB$). Получим, например, $AT = x_1$ и $BT = x_2$ – корни данного квадратного уравнения построены.

С другой стороны, Декарт показал, что геометрические кривые могут быть заданы алгебраическими уравнениями, и, следовательно, их можно с помощью этих уравнений проанализировать. Так, например, прямая линия задается уравнением $ax + by + c = 0$. А уравнение окружности выглядит так: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, где R – радиус окружности и точка $O(a,b)$ – ее центр. Уравнению $xy - 1 = 0$ соответствует гипербола и так далее.

Чтобы найти точки пересечения, например, окружности и параболы, нужно решить систему уравнений, которыми эти линии задаются. При этом корни, по мнению Декарта, могут быть «истинными» (положительными), «ложными» (отрицательными) и даже «воображаемыми» (комплексными).

Не считая алгебру наукой, Декарт видел в ней мощный метод, позволяющий упростить рассуждения и сэкономить усилия при нахождении неизвестных величин. Пусть алгебра «поработает» на геометрию – вот девиз Декарта. И действительно, знаменитые древние задачи об удвоении куба и трисекции угла он сводил к построению корней определенного кубического уравнения. Сложнейшую задачу на ГМТ, решенную в свое время усилиями Евклида, Аполлония и Паппа (и то лишь для $3^{\underline{x}}$ или $4^{\underline{x}}$ прямых), Декарт решает для 5, 6, 7…12 прямых при помощи уравнений 3, 4, 5, 6 степеней.

Таким образом, идеи Декарта объединили две отрасли математических знаний – алгебру и геометрию. Это объединение оказалось благотворным для той и другой. Дополняя друг друга, алгебра и геометрия вместе совершили мощнейший рывок вперед в своем развитии. Метод координат Декарта, легший в основу *аналитической геометрии*, позволил справиться с некоторыми нерешенными доселе задачами. Дал возможность увидеть важные закономерности, незамеченные ранее. Математика в целом получила сильный, животворящий импульс!..

Сам же метод координат оказался тем самым прочным методом, который соединил алгебру с геометрией. Решение задачи *методом координат* иногда можно рассматривать как применение алгебры в геометрии, а иногда – наоборот. Покажем это на примерах.

Алгебра помогает геометрии

Задача 5. *Дан прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной около него окружностей.*

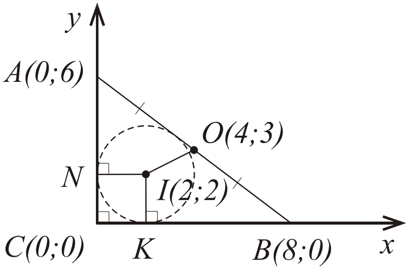


рис.4

Решение. Пусть в прямоугольном ΔABC $(C = 90°)$ $BC = 8$; $AC = 6$. Выберем прямоугольную систему координат с началом в вершине C прямого угла *(рис.4)*. Тогда $C(0;0)$; $B(8;0)$; $A(0;6)$.

Поскольку центр O описанной около ΔABC окружности совпадает с серединой гипотенузы AB, то $O\left(\frac{0+8}{2};\frac{6+0}{2}\right)$, или $O(4;3)$. Радиус r вписанной в ΔABC окружности найдем по формуле: $r=\frac{a+b-c}{2}$, где $BC=a=8$;

$AC=b=6$; $AB=c=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

Получим $r=2$. Пусть I – центр этой окружности. Так как $IN=IK=r=2$, то $I(2;2)$.

Остается найти длину отрезка OI по формуле расстояния между двумя точками: $OI=\sqrt{(4-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$.

Задача 6. *Дан прямоугольный $\Delta ABC\,(C=90°)$ с катетами $BC=a$ и $AC=b$. На гипотенузе AB во внешнюю сторону построен квадрат ABNT с центром O (рис.5). Найти CO.*

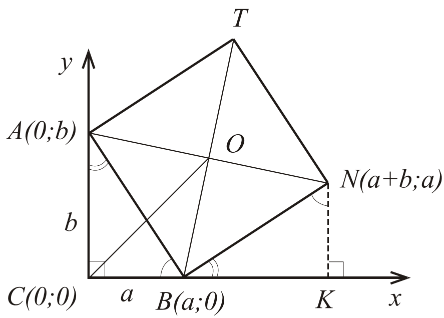


рис.5

Решение. Вновь выберем прямоугольную систему координат с началом в точке C.

Очевидно, $C(0;0)$; $B(a;0)$; $A(0;b)$.

Если мы найдем координаты точки N, то задача будет решена. Действительно, O – середина AN (ее координаты считаются), затем находим CO по формуле расстояния между двумя точками. Проведем $NK\perp BC$. Нетрудно показать, что $\Delta NKB=\Delta BCA$ *(покажите!)*

Тогда $BK=b$ и $NK=a$.

Значит, $N(a+b;a)$.

Затем находим координаты точки $O\left(\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2}\right)$.

После чего $CO=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-0\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-0\right)^2}=\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Задача 7. *Около квадрата со стороной 2а описана окружность. Найти сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин квадрата.*

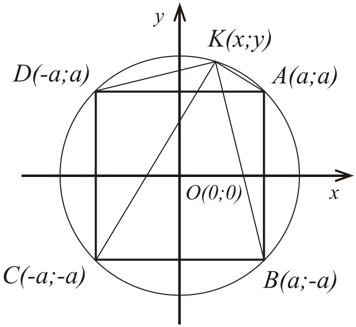


рис.6

Решение. На сей раз поместим начало прямоугольной системы координат в центр *O* квадрата *ABCD (рис.6)*. Тогда $A(a;a)$; $B(a;-a)$; $C(-a;-a)$; $D(-a;a)$.

Выберем на описанной около квадрата окружности произвольную точку $K(x;y)$, не забыв, что $x^2+y^2=R^2=(a\sqrt{2})^2=2a^2$ *(по теореме Пифагора)*.

По формуле расстояния между двумя точками имеем: $KA^2=(x-a)^2+(y-a)^2$; $KB^2=(x-a)^2+(y+a)^2$;

$KC^2=(x+a)^2+(y+a)^2$; $KD^2=(x+a)^2+(y-a)^2$.

Сложив левые и правые части всех четырех равенств, получим:

$$KA^2+KB^2+KC^2+KD^2=2((x+a)^2+(y+a)^2+(x-a)^2+(y-a)^2)=$$
$$=2(2x^2+2y^2+4a^2)=16a^2$$

(с учетом того, что $x^2+y^2=2a^2$).

Задача 8. *На плоскости даны две точки В и С, Найти множество вершин А треугольников АВС таких, в которых медиана BM_2 равна стороне АС.*

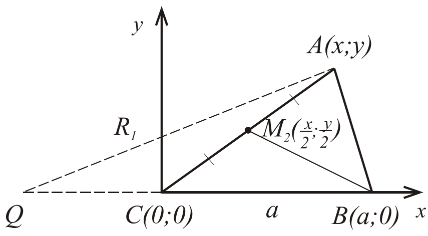


рис.7

Решение. Пусть $BC=a$. Выберем прямоугольную систему координат с началом в точке *C*, а ось абсцисс пустим вдоль прямой *BC*.

Тогда $C(0;0)$; $B(a;0)$ и $A(x;y)$, где *A* – точка искомого ГМТ *(рис.7)*. Очевидно, $M_2\left(\frac{x}{2};\frac{y}{2}\right)$, где M_2 – середина

AC. Согласно условию, $BM_2 = AC$, или $\left(\frac{x}{2}-a\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\left(x-0\right)^2+\left(y-0\right)^2$.

Имеем: $\frac{x^2}{4}-ax+a^2+\frac{y^2}{4}=x^2+y^2$, или $3x^2+3y^2+4ax=4a^2$, или

$x^2+\frac{4a}{3}x+y^2=\frac{4}{3}a^2$, или $\left(x+\frac{2}{3}a\right)^2+y^2=\frac{16}{9}a^2$.

Следовательно, искомое ГМТ есть окружность с центром в точке $Q\left(-\frac{2}{3}a;0\right)$ радиуса $R_1=\frac{4}{3}a$. Понятно, что необходимо исключить две точки пересечения этой окружности с прямой BC.

Геометрия помогает алгебре

Задача 9. *Найдите наименьшее значение суммы:*

$$Q=\sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}+\sqrt{x^2+y^2+6x-10y+34}.$$

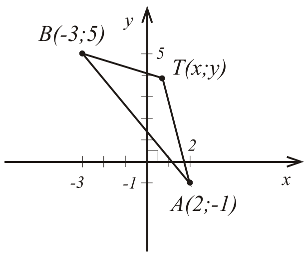


рис.8

Решение. Преобразуем сумму Q в более удобный вид:

$$Q=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2}.$$

Рассмотрим на координатной плоскости точки $A(2;-1)$; $B(-3;5)$ и $T(x;y)$ – *рис.8*.

Очевидно, $AT=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$ и $BT=\sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2}$. Тогда искомая сумма $Q=AT+BT$. Но $AT+BT\ge AB$ (неравенство треугольника), где $AB=\sqrt{(2+3)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{61}$. Значит, $Q\ge\sqrt{61}$. Знак равенства достигается, когда T совпадает с любой точкой отрезка AB. Итак, $Q_{\min}=\sqrt{61}$.

Задача 10. *Решите систему уравнений:*

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2 \\ x^2+y^2-4x=0 \end{cases}$$

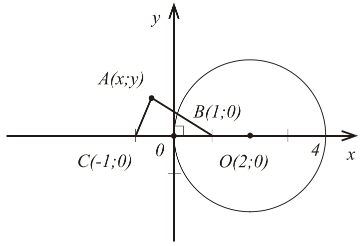


рис.9

<u>Решение</u>. Пусть в прямоугольной системе координат $B(1;0)$; $C(-1;0)$ и $A(x;y)$ – *рис.9*. Тогда $AB=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$;

$AC=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$ и $BC=\sqrt{(1+1)^2+0^2}=2$.

Первое уравнение системы принимает вид $AB+AC=BC$, что означает: *A* – любая точка отрезка *BC*. Второе уравнение преобразует к виду: $(x-2)^2+y^2=4$. Это – окружность с центром $O(2;0)$ радиуса 2. Тогда решением системы являются координаты точки пересечения этой окружности с отрезком *BC*.

<u>*Ответ*</u>. $(0;0)$.

Задача 11. *Найдите наименьшее значение выражения* $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^3}$ *, если* $x-y-2=0$ *.*

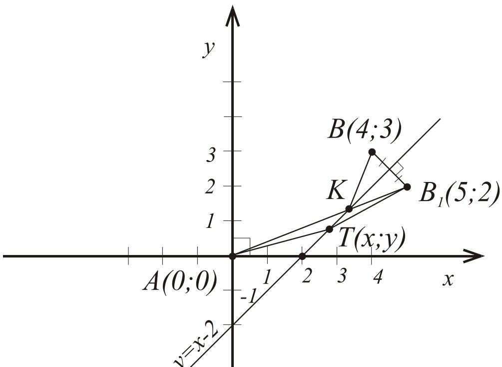


рис.10

<u>Решение</u>. На координатной плоскости рассмотрим точку $A(0;0)$ и $B(4;3)$, а также точку $T(x;y)$ на прямой $y=x-2$ такую, чтобы сумма $TA+TB$ была минимальной *(рис.10)*. Действительно, $TA=\sqrt{x^2+y^2}$ и

$TB=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$. Перед нами – задача Герона: *Дана прямая и две точки по одну сторону от нее. Найти на прямой такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух данных точек была наименьшей.*

Строим точку B_1, симметричную *B* относительно прямой $y=x-2$ и находим ее координаты: $B_1(5;2)$. Находим точку *K* пересечения прямой AB_1 с прямой

$y = x - 2$: $K\left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Точка K является искомой, так как $AK + KB < AT + TB$ или (что одно и то же), $AK + KB_1 < AT + TB_1$ *(покажите!)* Тогда наименьшее значение искомого выражения равно длине отрезка B_1A, где $B_1A = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

Прежде, чем предложить несколько задач для самостоятельного решения, сделаем несколько замечаний.

Система координат Декарта имела менее совершенный вид, чем сегодня (не было, например, отрицательной полуоси), но идеи были заложены те же самые.

Одновременно с Декартом «вышел» на систему координат еще один выдающийся математик Франции – Пьер Ферма. Но его труд был опубликован значительно позже «Геометрии» Декарта. К тому же у Ферма были менее удобные символы и обозначения.

Свой труд Декарт завершает такими словами: «У меня нет цели написать великую книгу. Я скорее стремлюсь в немногих словах высказаться о многом… Надеюсь, потомки будут благодарны мне не только за то, что я объяснил, но и за то, что я добровольно пропустил, дабы доставить им удовольствие самим отыскать это…»

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 13. Дан отрезок *a*. Пользуясь отрезком длины 1, постройте отрезок

$$x = \frac{a^2 - 9}{a^2 + a - 2}.$$

Задача 14. Дан отрезок длины 1 и отрезки, равные *m; n; k*. Постройте отрезок

x, если $x = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$.

Задача 15. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и биссектрисе прямого угла. *(Папп Александрийский).*

Указание. Воспользовавшись подобием, составьте квадратное уравнение и построением найдите его корни.

Задача 16. В круг вписана трапеция $ABCD\ (AB \parallel CD)$. K – произвольная точка на диаметре круга, параллельного его основаниям. Докажите, что $KA^2 + KB^2 = KC^2 + KD^2$.

Задача 17. Могут ли координаты всех вершин равностороннего треугольника выражаться рациональными числами?

Задача 18. Найдите множество точек, сумма квадратов расстояний от которых до вершин *B* и *C* треугольника *ABC* равна квадрату расстояния до его третьей вершины *A*.

Задача 19. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\ .$$

Задача 20. Докажите, что при любых *x, y, z* выполняется неравенство:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}\ .$$

<u>Указание</u>. Рассмотрите на координатной плоскости точки $A(x; 0)$; $B\left(-\dfrac{y}{2}; \dfrac{y\sqrt{3}}{2}\right)$; $C\left(-\dfrac{z}{2}; -\dfrac{z\sqrt{3}}{2}\right)$.

Задача 21. Решите уравнение:

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+5)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 8\,.$$

<u>Указание</u>. Воспользуйтесь тем фактом, что при наличии в треугольнике угла $A \geq 120°$ точка минимума суммы расстояний до вершин совпадает с вершиной угла *A*.

Глава 12

Метод координат решает знаменитые задачи

«Каждая задача, которую я решал, становилась правилом, служившим впоследствии для решения других задач».

Рене Декарт

Когда молодая принцесса Елизавета Пфальцская решила важную геометрическую задачу, называемую ныне *теоремой принцессы Елизаветы*, радости ее учителя Рене Декарта не было предела. Еще бы: принцесса решила задачу его *методом – методом координат*. «Я бы не взялся решить эту задачу даже… за месяц!» – воскликнул Декарт. Правду ли он сказал или проявил галантность перед дамой – не важно. Важно, что на практике была показана жизнеспособность его метода. Что может быть выше этого?..

…Вот и мы на примерах решения *известных задач* постараемся показать действенность, эффективность, мощь метода координат – детища Рене Декарта.

Задача 1 *(частный случай теоремы принцессы Елизаветы).*

Найдите геометрическое место точек плоскости, разность квадратов от которых до двух данных точек A и B постоянна.

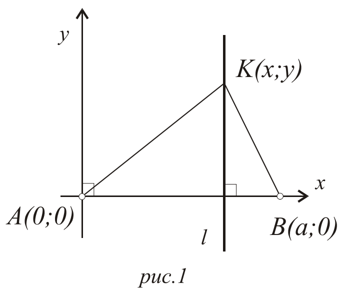


рис.1

Решение. Пусть расстояние $AB = a$. Выберем декартову систему координат так, чтобы $A(0;0)$ и $B(a;0)$ – *рис.1*. Пусть $K(x;y)$ – произвольная точка искомого ГМТ. То есть точка K такова, что $AK^2 - BK^2 = t$, где $t > 0$. Тогда имеем: $x^2 + y^2 - ((x-a)^2 + y^2) = t$, или $2ax - a^2 = t$, откуда $x = \dfrac{a^2 + t}{2a}$ *(1)*. Равенство *(1)* является уравнением прямой l, перпендикулярной оси абсцисс.

Задача 2. *Суммы квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до противоположных вершин прямоугольника равны между собой. Докажите!*

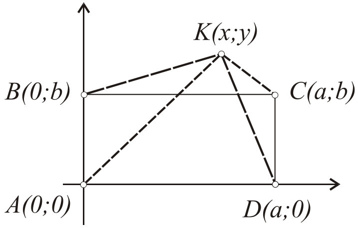


рис.2

Доказательство. Поместим вершину A прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AD = a$, $AB = b$ в начало координат *(рис.2)*. Имеем: $A(0;0)$; $B(0;b)$; $C(a;b)$; $D(a;0)$. Пусть $K(x;y)$ – произвольная точка плоскости. Покажем, что $KA^2 + KC^2 = KB^2 + KD^2$. Действительно,

$$KA^2 + KC^2 = x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 = 2(x^2 + y^2) - 2(ax + by) + a^2 + b^2.$$

В то же время

$$KB^2 + KD^2 = x^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) - 2(ax + by) + a^2 + b^2.$$

Следовательно, $KA^2 + KC^2 = KB^2 + KD^2$, что и требовалось доказать!..

Задача 3. *Дан треугольник ABC. На его сторонах AB, BC и AC выбраны соответственно точки N, T и Q такие, что* $\frac{AN}{NB} = \frac{BT}{TC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{2}{1}$. *Докажите, что центроиды треугольников ABC и NTQ совпадают.*

Доказательство. Пусть вершины треугольника ABC имеют следующие координаты: $A(x_a; y_a)$, $B(x_b; y_b)$; $C(x_c; y_c)$ – *рис.3*. Известно, что в таком случае координаты центроида M треугольника ABC будут таковы: $M\left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}; \frac{y_a + y_b + y_c}{3}\right)$ – *покажите!*

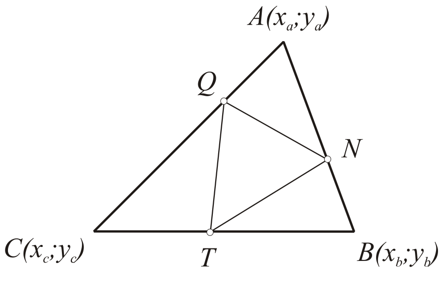


рис.3

Пусть G – центроид ΔNTQ. Покажем, что и он имеет те же координаты. Сначала найдем координаты точек N, T и Q, воспользовавшись формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \; x_N = \frac{x_a + 2x_b}{1+2}; \; y_N = \frac{y_a + 2y_b}{1+2}.$$

Итак, $N\left(\frac{x_a+2x_b}{3};\frac{y_a+2y_b}{3}\right)$. Аналогично, $T\left(\frac{x_b+2x_c}{3};\frac{y_b+2y_c}{3}\right)$ и $Q\left(\frac{x_c+2x_a}{3};\frac{y_c+2y_a}{3}\right)$. После чего нетрудно сосчитать координаты центроида G треугольника NTQ: $G\left(\frac{x_a+x_b+x_c}{3};\frac{y_a+y_b+y_c}{3}\right)$. Таким образом, $G \equiv M$.

Замечание. Точно так же можно было решить задачу в общем виде, когда $\frac{AN}{NB}=\frac{BT}{TC}=\frac{CQ}{QA}=k$.

Задача 4. *Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек K, для которых* $\frac{AK}{BK}=3$.

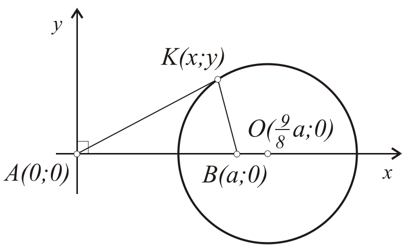


рис.4

Решение. Пусть $AB=a$. Поместим точку A в начало координат, а ось абсцисс направим вдоль луча AB. Тогда $A(0;0)$ и $B(a;0)$. Пусть также $K(x;y)$ – произвольная точка искомого ГМТ, то есть $\frac{AK}{KB}=3$ *(рис.4)*. Тогда $AK^2=9BK^2$, или $x^2+y^2=9(x-a)^2+9y^2$.

Имеем: $8x^2-18ax+9a^2+8y^2=0$; $\left(x-\frac{9}{8}a\right)^2+y^2=\frac{9}{64}a^2$.

Это уравнение окружности с центром в точке $O\left(\frac{9}{8}a;0\right)$ радиусом $\frac{3}{8}a$.

Замечание. Решив задачу для общего случая, когда $\frac{AK}{BK}=k$, получим известное ГМТ – *окружность Аполлония*.

Задача 5 *(Папп Александрийский). Постройте прямоугольный треугольник, зная длину гипотенузы и биссектрисы, проведенной из вершины прямого угла.*

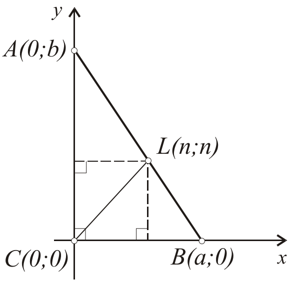


рис.5

Решение. Пусть $C = 90°$; $AB = c$ и биссектриса $CL = l$. Поместим вершину C в начало прямоугольной системы координат *(рис.5)*. Тогда $B(a;0)$ и $A(0;b)$, где $CB = a$ и $CA = b$ – неизвестные катеты. Очевидно, $L(n;n)$, где $n = \frac{l}{\sqrt{2}}$ (любая точка биссектрисы равноудалена от сторон). Согласно формуле биссектрисы,

$$l = \frac{2ab}{a+b}\cos 45° = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

Следовательно, $n = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{ab}{a+b}$, откуда $ab = (a+b)n$ *(1)*.

Поскольку $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, имеем: $c^2 = (a+b)^2 - 2n(a+b)$, или $(a+b)^2 - 2n(a+b) - c^2 = 0$. Данное квадратное уравнение относительно $(a+b)$ имеет один положительный корень. Строим его. С учетом равенства *(1)* строим отрезок $\sqrt{ab} = \sqrt{(a+b)n}$. Далее $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ и $a - b = \sqrt{(a+b)^2 - (2\sqrt{ab})^2}$ – строим отрезок $a-b$. Зная длины отрезков $a+b$ и $a-b$, строим катеты a и b. Задача решена.

Задача имеет решение, если $l \le \frac{1}{2}c$.

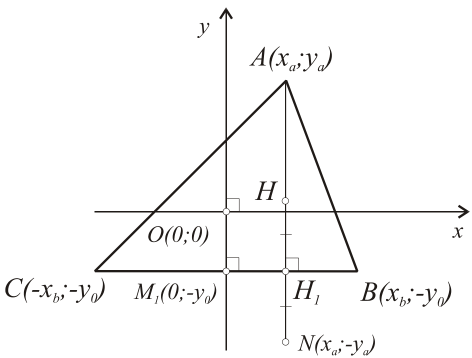


рис.6

Задача 6. *Докажите, что точки, симметричные ортоцентру H относительно сторон треугольника ABC, принадлежат описанной около этого треугольника окружности.*

Доказательство. Пусть H – ортоцентр ΔABC, AH_1 – высота, N – точка, симметричная ортоцентру относительно стороны BC, то есть $HH_1 = H_1N$. Пусть также O – центр описанной окружности ΔABC. Введем прямоугольную систему координат с центром в точке O *(рис.6)*. Тогда $O(0;0)$, $M_1(0;-y_0)$, где M_1 – середина BC. В таком случае $B(x_b;-y_0)$; $C(-x_b;-y_0)$. Обозначим $A(x_a;y_a)$ и $H_1(x_a;-y_0)$.

Поскольку $OM_1 = \frac{1}{2}AH$ – известная формула геометрии треугольника, то $H(x_a;y_a-2y_0)$. Так как H_1 – середина HN, то по формуле координат середин отрезка находим координаты точки N: $N(x_a;-y_a)$.

$OA^2 = R^2 = x_a^2 + y_a^2$. Найдем длину отрезка ON. $ON^2 = x_a^2 + y_a^2 = R^2$.

Итак, $ON = R$, что означает: точка N лежит на описанной окружности ΔABC.

Задача 7. *Точки, симметричные ортоцентру H относительно середин сторон треугольника ABC, также принадлежат описанной около этого треугольника окружности. Докажите!*

Доказательство. Пусть прямоугольная система координат и обозначения останутся такими же, как в *задаче 6*. Пусть также точка D симметрична ортоцентру H относительно M_1 – середины BC *(рис.7)*. Поскольку $M_1(0;-y_0)$ и $H(x_a;y_a-2y_0)$ – *задача 6*, то по формуле координат середины отрезка находим: $D(-x_a;-y_a)$.

$OA^2 = R^2 = x_a^2 + y_a^2$.

$OD^2 = x_a^2 + y_a^2 = R^2$, или $OD = R$.

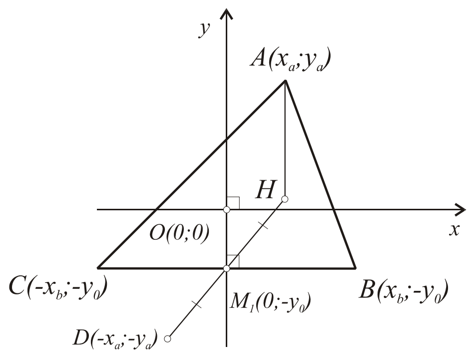


рис.7

Таким образом, точка D лежит на описанной около ΔABC окружности.

Задача 8 *(прямая Эйлера). В прямоугольном треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, центроид M (точка пересечения медиан) и ортоцентр H лежат на одной прямой, причем $2OM = MH$. Докажите!*

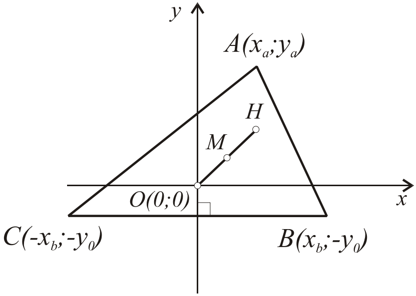


рис.8

Доказательство. Систему координат и обозначения оставим такими же, как в *задачах 6 и 7 (рис.8)*. Напомним, что $H(x_a; y_a - 2y_0)$. Координаты центроида M находим как среднее арифметическое координат вершин треугольника ABC:

$$x_M = \frac{x_a + x_b - x_b}{3} = \frac{x_a}{3},$$

$$y_M = \frac{y_a - y_0 - y_0}{3} = \frac{y_a - 2y_0}{3}.$$

Итак, имеем: $O(0;0)$; $M\left(\frac{x_a}{3}; \frac{y_a - 2y_0}{3}\right)$; $H\left(x_a; y_a - 2y_0\right)$. Это и означает, что точки *O; M; H* принадлежат одной прямой – *прямой Эйлера*. При этом $OM = \frac{1}{3}OH$, или $2OM = MH$, что и требовалось доказать.

***Задача 9** (формула Гамильтона). Докажите справедливость векторной формулы:* $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ *(О – центр описанной окружности* ΔABC*, Н – его ортоцентр).*

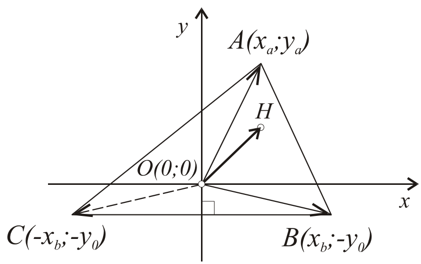


рис.9

Доказательство. В этой задаче мы вновь не будем оригинальными – система координат и обозначения – те же *(рис.9)*. Поскольку $H(x_a; y_a - 2y_0)$, то $\overline{OH}(x_a; y_a - 2y_0)$ *(1)*.

Так как $\overline{OA}(x_a; y_a)$; $\overline{OB}(x_b; -y_O)$; $\overline{OC}(-x_b; -y_O)$, то суммарный вектор $\overline{q} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ имеет следующие координаты: $\overline{q}(x_a + x_b - x_b; y_a - y_0 - y_0)$, или $\overline{q}(x_a; y_a - 2y_0)$ *(2)*.

Сравнив *(1)* и *(2)*, делаем вывод: $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

Задача 10 *(теорема Лейбница). Докажите, что для любой точки K в плоскости треугольника ABC выполняется равенство:*

$KA^2 + KB^2 + KC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3KM^2$ *, где M – центроид* ΔABC *.*

<u>Доказательство</u>. Выберем прямоугольную систему координат с началом в точке M_1 – середине BC *(рис.10)*. Тогда имеем: $M_1(0;0)$; $B(x_b;0)$; $C(-x_b;0)$; $A(x_a;y_a)$ и $M\left(\frac{x_a}{3};\frac{y_a}{3}\right)$, так как $AM : MM_1 = 2:1$. Для произвольной точки $K(x;y)$ запишем:

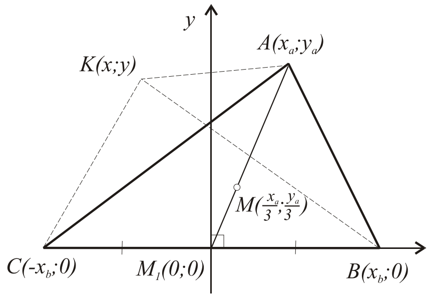


рис.10

$$KA^2 + KB^2 + KC^2 = (x_a - x)^2 + (y_a - y)^2 + (x_b - x)^2 + y^2 + (x_b + x)^2 + y^2 = \\ = (x_a - x)^2 + (y_a - y)^2 + 2x_b^2 + 2x^2 + 2y^2 \quad (1)$$

Запишем слагаемые из правой части *теоремы Лейбница* согласно *формуле расстояния между двумя точками*:

$$MA^2 = \frac{4}{9}x_a^2 + \frac{4}{9}y_a^2 \quad (2)$$

$$MB^2 = \left(x_b - \frac{x_a}{3}\right)^2 + \frac{y_a^2}{9} \quad (3)$$

$$MC^2 = \left(\frac{x_a}{3} + x_b\right)^2 + \frac{y_a^2}{9} \quad (4)$$

$$3MK^2 = 3\left(\left(\frac{x_a}{3} - x\right)^2 + \left(\frac{y_a}{3} - y\right)^2\right) \quad (5)$$

Сложив левые и правые части выражений *(2);(3);(4);(5)* и приведя подобные слагаемые, получим:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3MK^2 = (x_a - x)^2 + (y_a - y)^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2x_b^2 \quad (6)$$

Сравнив *(6)* и *(1)*, делаем вывод:

$KA^2 + KB^2 + KC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3MK^2$ – *теорема Лейбница* доказана!

Несколько известных задач, в которых эффективно может быть применен метод координат, предложим для самостоятельного решения.

Задача 11. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон. Докажите!

Задача 12. Докажите теорему косинусов методом координат.

Задача 13. Докажите, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 14. Сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов его боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований. Докажите!

Задача 15. На прямой l взяты три последовательные точки: $A; B; C$. По одну сторону от l построены равносторонние треугольники AKB и BNC. E – середина AN, F – середина KC. Докажите, что треугольник BEF – равносторонний.

Задача 16. В равносторонний треугольник вписана окружность радиуса r. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки этой окружности до вершин треугольника.

Ответ. $15r^2$

Задача 17. Можно ли на координатной плоскости разместить равносторонний треугольник так, чтобы все его вершины находились в точках, имеющих рациональные координаты?

Ответ. Нельзя

Задача 18. *(теорема принцессы Елизаветы).* Все точки, касательные из которых к двум данным неконцентрическим окружностям равны, лежат на одной прямой.

Замечание. Эта прямая перпендикулярна линии центров окружностей и называется *их радикальной осью*.

Глава 13

Жерар Дезарг – «отец» проективной геометрии и учитель Блеза Паскаля

«Узнать законы перспективы я желал более, чем получить королевство». А.Дюрер

Военный инженер и архитектор из Лиона Жерар Дезарг (1591–1661) был блестящим геометром, стоявшим у истоков *проективной геометрии*. Правда, чтобы понять это, человечеству понадобилось почти 200 лет, когда соотечественник Дезарга Жан Виктор Понселе (1788–1867) издал в 1822 году «Трактат о проективных свойствах фигур». В этой работе Понселе фактически восстановил и развил идеи Дезарга, ничего не зная о них. Вскоре член Парижской Академии наук Мишель Шаль нашел копию сочинения Дезарга, после чего математический мир ахнул… И Жерара Дезарга стали называть «отцом» проективной геометрии.

За свою жизнь Дезарг написал два сочинения по геометрии – новаторских по своей сути, зовущих к новым открытиям. Первое было написано в 1636 году и посвящено построению *перспективных* изображений. Вопросами перспективы занимались крупнейшие художники: *Пьеро дела Франческа, Альбрехт Дюрер, Леонардо да Винчи* и многие другие, поскольку это было первейшим делом для композиционного решения картины. Дезарг же постарался заложить основы математической теории перспективы. Наряду с достаточно известным *графическим* методом, Дезарг впервые предложил метод *аналитический*, который давал возможность по известным координатам точек осуществить построение их перспективных изображений. Это было особенно удобно при больших расстояниях от центра перспективы до картинной плоскости, когда некоторые точки могли оказаться за пределами чертежа. *Аналитический метод Дезарга* впоследствии был положен в основу известного сегодня *аксонометрического метода*. Но современники Дезарга восприняли его более чем сдержанно. А на практике и вовсе отказались от него, продолжая работать по старинке.

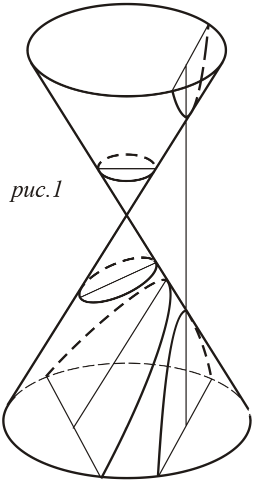


рис.1

Второе сочинение Дезарга посвящено учению о конических сечениях. Дело в том, что Дезарг очень высоко ставил труд древнегреческого математика Аполлония Пергского «Конические сечения». В нем Аполлоний рассматривал окружность, эллипс, параболу, гиперболу *(рис.1)* – как возможные виды сечения конуса плоскостью, выявлял геометрические свойства этих линий – так называемых кривых второго порядка. (Заметим в скобках, что *теория конических сечений Аполлония стала отправным пунктом для создания как аналитической, так и проективной геометрии*).

Так вот, в 1639 году Дезарг написал сочинение «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью». Хотя некоторые понятия проективной геометрии мы встречаем у Паппа Александрийского, именно в сочинении Дезарга впервые идеи *проективной геометрии* были изложены систематически.

Проективная геометрия занимается проективными преобразованиями, отображающими фигуру в одной плоскости на другую плоскость при помощи центрального проектирования (или ряда последовательных проектирований). В частном случае плоскости могут быть совмещены (планиметрический вариант проективной геометрии). Отметим, что проективные преобразования *искажают величины отрезков и углов*, то есть не сохраняют метрических свойств фигур *(рис.2)*. Это существенно отличается от осевой и центральной симметрий, поворота и даже гомотетии, которая изменяет размеры, но сохраняет

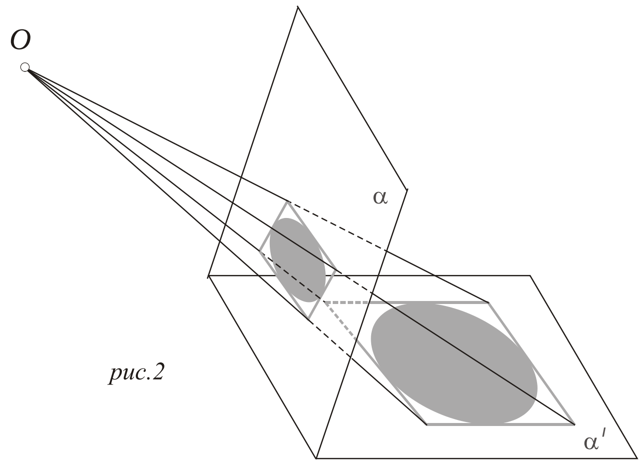


рис.2

углы и, стало быть, форму предмета. Какие же тогда свойства остаются неизменными (инвариантными) при проективных преобразованиях? Сюда следует отнести такие:

- принадлежность точки прямой и прямой плоскости;
- принадлежность трех и более точек одной прямой;
- пересечение трех и более прямых в одной точке.

Дезарг представил свой труд на кружке Марена Мерсенна (1588–1648), у которого по четвергам собирались лучшие умы Франции (членами кружка были Ферма, Декарт, Э. Паскаль, Б. Паскаль, Дезарг, Роберваль и другие). Кружок назывался «Парижская академия», и на его основе через некоторое время действительно была создана Парижская Академия Наук.

Все 56 экземпляров изданной брошюры Дезарг дарит участникам кружка, друзьям. (Сегодня сохранилось два экземпляра сочинения Дезарга). Отзывы самые лестные – от Ферма, Декарта, других математиков. Юный Блез Паскаль с восхищением говорит о работе Дезарга, считает его своим Учителем!

В следующем году, вдохновленный сочинением Дезарга, Паскаль доказывает свою знаменитую *теорему о вписанном шестиугольнике*. И метод Паскаля соответствует методу Дезарга: сначала доказательство идет для окружности, затем распространяется на любое коническое сечение. Вот уж действительно, *Дезарг позвал Паскаля дерзать*!..

В своем сочинении Дезарг вводит и обосновывает теорию поляр точки относительно окружности. Рассматривает двойное отношение четырех точек прямой. Показывает, что пучок прямых и параллельные прямые имеют одну и ту же природу – просто точка пересечения параллельных прямых удалена в бесконечность. И, наконец, главное в этой работе – сама *теорема Дезарга*, о которой мы поведем наш дальнейший разговор.

Постараемся только сначала ответить на вопрос: почему, несмотря на высокие оценки современников, сочинение Дезарга не было по достоинству оценено? Среди ряда причин выделим три:

- малое количество экземпляров;
- трудный язык сочинения, множество новых терминов, к которым непросто привыкнуть;
- большое внимание научного мира к «Геометрии» Декарта, вышедшей в 1637 году большим тиражом и затмившей на то время труды других математиков.

Теорема Дезарга *(планиметрическая).*

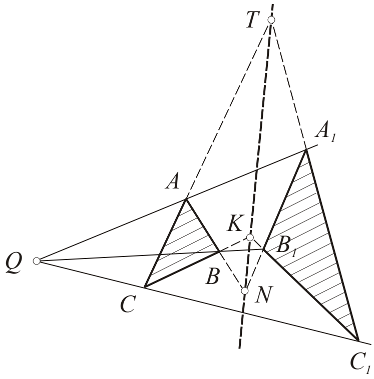


рис.3

Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ с попарно непараллельными сторонами. Известно, что прямые A_1A; B_1B и C_1C пересекаются в точке Q *(рис.3)*. Докажите, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1; BC и B_1C_1; AC и A_1C_1 – точки N, K и T соответственно – принадлежат одной прямой.

Доказательство.

Применим теорему Менелая для ΔABQ и секущей $A_1 - B_1 - N$:

$$\frac{QA_1}{A_1A}\cdot\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BB_1}{B_1Q}=1 \qquad (1)$$

По теореме Менелая для ΔBCQ и секущей $B_1 - C_1 - K$ имеем:

$$\frac{QB_1}{B_1B}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CC_1}{C_1Q}=1 \qquad (2)$$

Вновь применим теорему Менелая для ΔACQ и секущей $A_1 - C_1 - T$:

$$\frac{QC_1}{C_1C}\cdot\frac{CT}{TA}\cdot\frac{AA_1}{A_1Q}=1 \qquad (3)$$

Перемножим левые и правые части равенств *(1); (2); (3)*. Поскольку $\frac{QA_1}{A_1A}\cdot\frac{AA_1}{A_1Q}=1$; $\frac{BB_1}{B_1Q}\cdot\frac{QB_1}{B_1B}=1$; $\frac{CC_1}{C_1Q}\cdot\frac{QC_1}{C_1C}=1$, после сокращения получим следующее:

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CT}{TA}=1 \qquad (4)$$

По обратной теореме Менелая равенство *(4)* для ΔABC и точек N; K; T означает, что точки N; K и T принадлежат одной прямой.

Заметим, что теорема Дезарга верна и в случае, когда точка Q находится в бесконечности *(рис.4)*.

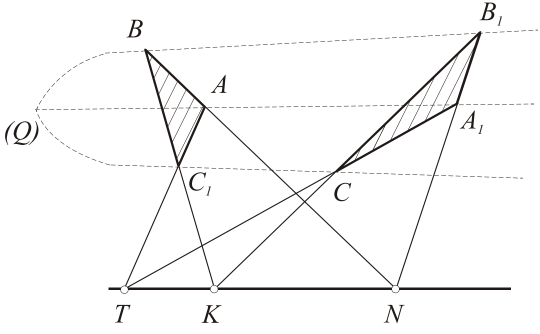


рис.4

Теорема Дезарга *(стереометрическая).*

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ находятся в разных плоскостях α и α_1. Прямые AA_1; BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке Q *(рис.5)*. Докажите, что прямые AB и A_1B_1; BC и B_1C_1; AC и A_1C_1 (при условии их непараллельности) пересекаются соответственно в точках N, K и T, лежащих на одной прямой.

Доказательство.
Поскольку AB и A_1B_1 непараллельны и лежат в одной плоскости – плоскости треугольника QAB, то они пересекаются в некоторой точке N. При этом точка N должна принадлежать как плоскости $\alpha(AB\in\alpha)$, так и плоскости $\alpha_1(A_1B_1\in\alpha_1)$. Значит, $N\in l$, где l – прямая, по которой пересекаются плоскости α и α_1. Аналогично $K\in l$ и $T\in l$. Значит, все три точки: N, K и T лежат на одной прямой – прямой l.

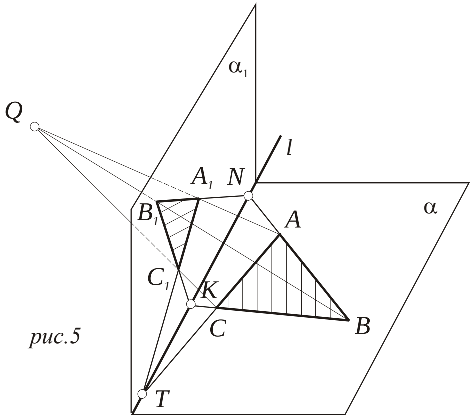


рис.5

Замечание 1. *Стереометрическая теорема Дезарга*, как видим, доказывается при помощи *проективной геометрии*. *Планиметрическая же теорема Дезарга* – с помощью метрических соотношений *(теоремы Менелая)*. Доказать *планиметрическую теорему Дезарга* только проективной геометрией невозможно без «выхода в пространство» (в стереометрию), что доказал немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943).

Замечание 2. Одним из основных понятий проективной геометрии является *принцип двойственности*, обоснованный при помощи свойств поляр математиками Ж.В. Понселе и Ж.Д. Жергонном (1771–1859). Согласно этому принципу все теоремы проективной геометрии группируются попарно, причем теоремы одной группы сходны между собой. Например, *провести прямую через точку* и *отметить точку на прямой* – операции двойственные. Если исходная теорема истинна, то истинна и двойственная ей теорема. Явление двойственности – отличительная особенность проективной геометрии – в метрической геометрии двойственности не существует.

Таким образом, верна теорема, двойственная *планиметрической теореме Дезарга*:

Если точки пересечения соответствующих сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ лежат на одной прямой, то прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в одной точке.

В данном случае двойственная теорема совпадает с *обратной теоремой Дезарга*.

Решим несколько задач, в которых успешно может быть применена теорема Дезарга (прямая или обратная).

Задача 1. *Отрезки AD, BE и CF пересекаются в точке Q внутри треугольника ABC (рис.6).* $K = BC \cap EF$, $N = AB \cap ED$ *и* $T = AC \cap FD$. *Докажите, что точки K,N и T принадлежат одной прямой.*

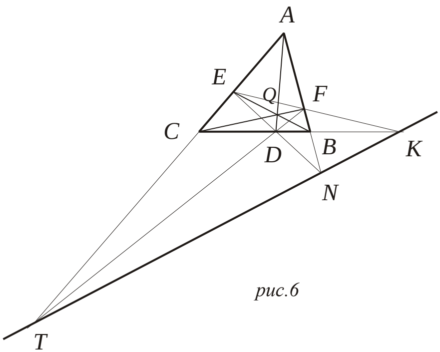


рис.6

Доказательство. Поскольку отрезки, соединяющие соответствующие вершины треугольников ABC и DEF пересекаются в одной точке – точке Q, то, согласно теореме Дезарга, точки K, N и T пересечения соответствующих сторон этих треугольников лежат на одной прямой.

Задача 2. *Воспользовавшись теоремой Дезарга, докажите, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке.*

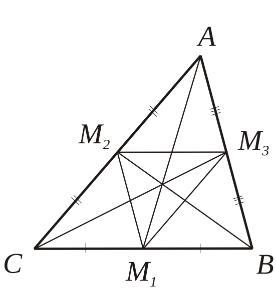


рис.7

Доказательство. Проведем в ΔABC медианы AM_1; BM_2; CM_3 *(рис.7)*.

Поскольку $M_2M_3 \parallel BC$, $M_1M_3 \parallel AC$ и $M_1M_2 \parallel AB$, то можно считать, что точки пересечения соответственных прямых треугольников ABC и $M_1M_2M_3$ лежат на одной бесконечно удаленной прямой (так называемой несобственной прямой плоскости данного ΔABC). Тогда, по *обратной теореме Дезарга*, прямые AM_1; BM_2 и CM_3 пересекаются в одной точке.

Задача 3. *Дан угол A с недоступной вершиной и точка K внутри угла. Пользуясь только линейкой, проведите прямую KA.*

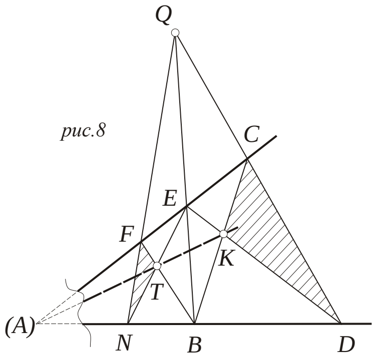


рис.8

<u>Решение</u>. Через K проведем произвольно прямые BC и DE *(рис.8)*.
Пусть $Q = BE \cap DC$. Проведем также произвольно $Q - F - N$. Обозначим через T точку пересечения прямых BF и EN. Соответствующие стороны треугольников DCK и NFT пересекаются в точках $B; E; Q$, вершины пересекаются в одной точке – точке A *(обратная теорема Дезарга)*. Следовательно, прямая KT совпадает с прямой KA.

Задача 4. *Прямые m и n пересекаются в недоступной точке E, а прямые k и t –в недоступной точке F. Одной линейкой постройте доступную часть прямой EF.*

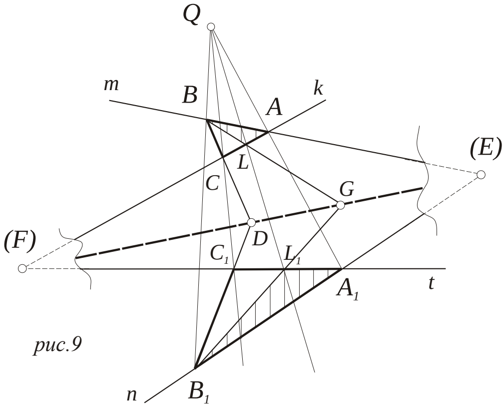


рис.9

<u>Решение</u>. Пусть прямые m и k пересекаются в точке A, а прямые n и t – в точке A_1 *(рис.9)*. Отложим произвольно отрезок AB на прямой m и отрезок A_1B_1 на n. Пусть также $Q = A_1A \cap B_1B$. Внутри угла A_1QB_1 проведем произвольно прямую, пересекающую k и t соответственно в точках C и C_1. Поскольку прямые AA_1; BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке – точке Q (отвечают условию *теоремы Дезарга*), то точка D пересечения BC и B_1C_1 лежит на одной прямой с точками E и F. Проведя внутри угла A_1QB_1 еще одну прямую, пересекающую k и t соответственно в точках C и C_1. Поскольку прямые AA_1; BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке – точке Q (отвечают условию *теоремы Дезарга*), то точка D пересечения BC и B_1C_1 лежит на одной прямой с точками E и F. Проведя внутри угла A_1QB_1 еще одну прямую, пересекающую k и t в точках L и L_1 соответственно, и применив *теорему Дезарга* к треугольникам ABL и $A_1B_1L_1$, получим точку G, которая также лежит на прямой EF. Стало быть, прямая DG совпадает с искомой.

Задача 5. *Точки K, N, T лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC.* $D = AK \cap CT$; $F = AK \cap NT$ $Q = NK \cap AB$ *и* $E = FQ \cap TK$ *(рис.10). Докажите, что точки* $D - E - B$ *принадлежат одной прямой.*

Доказательство. Точки пересечения соответствующих сторон треугольников *TFD* и *KQB* лежат на одной прямой.

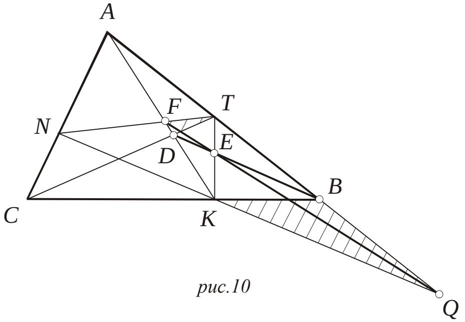


рис.10

Действительно, $C = TD \cap BK$; $N = TF \cap QK$ и $A = DF \cap QB$.

Тогда, согласно *обратной теореме Дезарга*, прямые, соединяющие соответственные вершины этих треугольников пересекаются в одной точке. Таким образом, *TK, FQ* и *DB* пересекаются в одной точке. Но *TK* и *FQ* пересекаются в точке *E*. Значит, и *DB* проходит через эту точку, то есть $D - E - B$ – одна прямая.

Задача 6. *Дан тетраэдр DABC. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через точку* A_1 *на ребре DA, а также прямую l, находящуюся в плоскости треугольника ABC (рис.11).*

Построение.

Пусть $K = AB \cap l$ и $N = AC \cap l$. Пусть также $B_1 = A_1K \cap DB$ и $C_1 = A_1N \cap DC$. Треугольник $A_1B_1C_1$ является искомым сечением. Действительно, соответствующие вершины треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке *D*. А прямые, содержащие соответствующие стороны этих треугольников, лежат на одной прямой – прямой *l* ($T = BC \cap B_1C_1$).

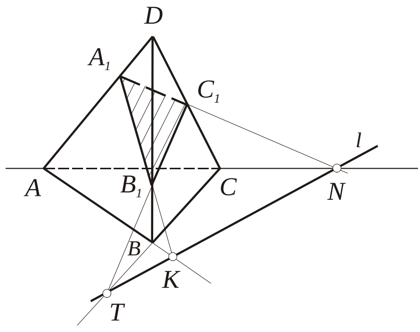


рис.11

Замечание. Как мы видим, теорема Дезарга обосновывает построение сечения многогранников *методом следов*.

Еще несколько задач предложим для самостоятельного решения.

Задача 7. Докажите *обратную планиметрическую теорему Дезарга*, не используя принцип двойственности.

Задача 8. Докажите, не используя принцип двойственности, *обратную стереометрическую теорему Дезарга*.

Задача 9. На плоскости даны три прямые, пересекающиеся в одной точке, а также три точки. Постройте треугольник, вершины которого лежат на данных прямых, а стороны проходят через три данные точки.

Задача 10. Даны крайние точки отрезка AB и короткая линейка, длина которой меньше AB. Пользуясь только этой линейкой, проведите прямую AB.

И последнее. Хорошая получается рифма: *Дезарг – дерзать!*

Глава 14

Блез Паскаль и его «мистический шестивершинник»

«Нет нигде настоящих доказательств, кроме как в геометрии, а также там, где ей подражают».
Блез Паскаль

Французский математик, физик, философ Блез Паскаль (1623–1662) за свою недолгую жизнь успел сделать удивительно много! Попробуем только перечислить его достижения, не называя пока главного…

Вычислительная суммирующая машина Паскаля, сделанная в помощь отцу для обеспечения сложных вычислений на его работе. Выполняла четыре арифметических действия с пятизначными числами. На это ушло пять лет напряженной работы.

Принцип полной математической индукции впервые встречается и применяется в трудах Паскаля.

Общий признак делимости целых чисел открыт Паскалем. Из него все другие признаки делимости могут быть получены как следствия.

Основы теории вероятностей заложены Блезом Паскалем и Пьером Ферма в их переписке по поводу задач с игральными костями. Задачи были предложены Паскалю азартным игроком, кавалером де Мере.

Закон Паскаля о распределении давления в жидкостях (основной закон гидростатики).

Паскаль доказал существование атмосферного давления, а также его зависимость от высоты над уровнем моря.

В трактате «Об арифметическом треугольнике» составлен треугольник из биномиальных коэффициентов, так называемый «треугольник Паскаля».

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

В конкурсе среди лучших математиков Европы по решению шести задач, связанных с *циклоидой*, победителем стал… Блез Паскаль.

Паскаль первым показал возможность использования недесятичной системы счисления – с любым числом в основании.

В трактате «О синусах четверти круга» Паскаль настолько приблизился к основам интегрального и дифференциального исчисления, что восхищенный этим трудом Г.В. Лейбниц воскликнул: «Как он мог остановиться за шаг до открытия? Неужто пелена была на его глазах?..»

Как же складывалась жизнь Блеза Паскаля, этого «человека великого ума и великого сердца» (Л. Толстой)? Этого «гениального безумца, родившегося на столетие раньше срока» (Вольтер)?

Он родился в небольшом французском городке Клермон-Ферран. Его отец, Этьенн Паскаль, служил в суде, но при этом увлекался математикой, поддерживая переписку со многими профессиональными математиками. Улитка Паскаля – кривая четвертого порядка, задаваемая формулой $(x^2 + y^2 - 2rx)^2 - l^2(x^2 + y^2) = 0$ – названа в его честь. Отец сперва старался оградить от математики болезненного и нервного ребенка. Но маленький Блез был наслышан о «таинственной геометрии», любимой отцом, и потихоньку сам стал «играть в нее», решая задачи и доказывая теоремы.

Когда однажды сын радостно сообщил отцу: «Я доказал, что три угла твоей треуголки равны двум углам стола» (то есть сумма углов треугольника равна $180°$), Этьенн Паскаль все понял и дал сыну изучать «Начала» Евклида.

С 14 лет Блез вместе с отцом стал посещать «четверги Марсенна», на которых, бывали Дезарг, Ферма, Роберваль и другие математики. На базе кружка Марсенна позже была сформирована Парижская Академия Наук.

Своим учителем Паскаль считает Дезарга и под его влиянием в 16 лет печатает первый труд «Эссе о конических сечениях». Как часто поступали математики того времени, Паскаль напечатал и расклеил на стенах домов 50 экземпляров афиш. На них без доказательства формулируется теорема, которую сегодня весь мир называет *теоремой Паскаля*. А тогда все математики были поражены как возрастом автора, так и глубиной содержания теоремы.

Жерар Дезарг утверждал, что в *теореме Паскаля* содержатся четыре книги крупнейшего древнегреческого математика Аполлония.

Вот об этой теореме Паскаля и некоторых следствиях из нее мы поведем дальнейший разговор. Из-за множества следствий (он нашел их около 400) сам Паскаль свою теорему называл *теоремой о «мистическом шестивершиннике»*. Сначала он сформулировал ее для окружности, а затем при помощи центрального проектирования перешел к коническим сечениям (эллипсу, параболе, гиперболе).

В результате получилось следующее:

Если противоположные стороны шестиугольника, вписанного в коническое сечение, продолжить, то точки их пересечения лежат на одной прямой.

Нас же, несомненно, будет интересовать вариант *теоремы Паскаля*, связанный с окружностью. Итак,

Теорема Паскаля. *Точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника (или их продолжений) лежат на одной прямой – прямой Паскаля.*

Можно и так:

Пусть A, B, C, D, E, F – вершины вписанного шестиугольника, расположенные в любом порядке. Тогда три точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой.

Замечание. Поскольку 6 точек на окружности могут быть расположены произвольным образом, то с помощью комбинаторики несложно подсчитать, что для данных 6 точек существует *60 прямых Паскаля*.

Как сам Паскаль доказывал свою теорему, неизвестно. Более вероятно, по мнению ряда исследователей, что с помощью *теоремы Менелая*. Именно с этого способа мы и начнем доказательство *теоремы Паскаля*.

I способ. Пусть 6 точек на окружности обозначены буквами *A, B, C, D, E, F* так, как показано на *рис.1* (один из 60 вариантов). Пусть также $T = AB \cap DE$; $N = BC \cap EF$ и $Q = CD \cap FA$.

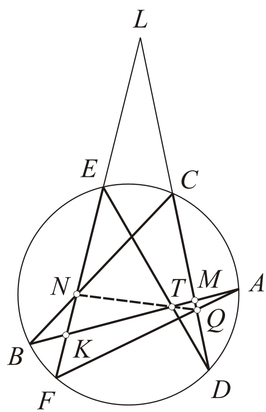


рис.1

Необходимо доказать, что $N - T - Q$ – одна прямая. Обозначим также $M = AB \cap CD$; $L = DC \cap FE$ и $K = AB \cap EF$. Три раза применим *теорему Менелая*:

а) для ΔKLM и секущей $E - T - D$:

$$\frac{LD}{DM} \cdot \frac{MT}{TK} \cdot \frac{KE}{EL} = 1 \qquad (1)$$

б) для ΔKLM и секущей $A - Q - F$:

$$\frac{LQ}{QM} \cdot \frac{MA}{AK} \cdot \frac{KF}{FL} = 1 \qquad (2)$$

в) для ΔKLM и секущей $B - N - C$: $\frac{LC}{CM} \cdot \frac{MB}{BK} \cdot \frac{KN}{NL} = 1 \qquad (3)$

Перемножая левые и правые части равенств *(1)*, *(2)* и *(3)*, заметим: $KE \cdot KF = AK \cdot BK$ – *по теореме о произведении отрезков хорд*. Тогда эти выражения сократятся, так как $KE \cdot KF$ попадет в числитель дроби, в то же время $AK \cdot KB$ – в знаменатель. Аналогично $MA \cdot MB = CM \cdot DM$. Они также сократятся. Наконец, $LD \cdot LC = LF \cdot LE$ – *по теореме о квадрате касательной*.

Так что и здесь произойдет сокращение. Остается: $\frac{LQ}{QM} \cdot \frac{MT}{TK} \cdot \frac{KN}{NL} = 1$.

По *обратной теореме Менелая* это и означает, что точки $N - T - Q$ принадлежат одной прямой, что и требовалось доказать!..

<u>II способ</u>. Пусть точки *A, B, C, D, E, F* расположены так, как на *рис.2*. Пусть также $T = AB \cap DE$, $N = BC \cap EF$. Покажем, что прямые *CD, FA* и *TN* пересекаются в одной точке – точке *Q* (это и будет означать, что $T - Q - N$ – одна прямая). Пусть $Q_1 = CD \cap TN$.

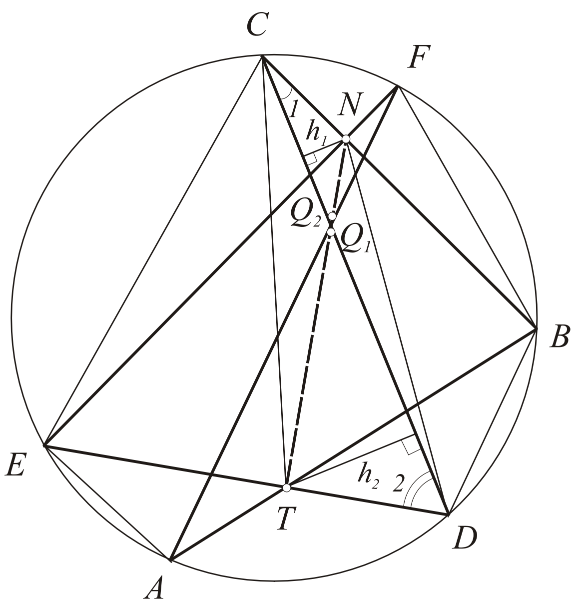


рис.2

Площади треугольников *CND* и *CTD* относятся как высоты h_1 и h_2 (у них общее основание *CD*), а $\frac{h_1}{h_2} = \frac{NQ_1}{Q_1T}$. Тогда $\frac{NQ_1}{Q_1T} = \frac{S_{CND}}{S_{CTD}} = \frac{\frac{1}{2}CD \cdot CN \cdot \sin\angle 1}{\frac{1}{2}CD \cdot DT \cdot \sin\angle 2}$.

Поскольку $\sin\angle 1 = \frac{BD}{2R}$ и $\sin\angle 2 = \frac{CE}{2R}$ *(по теореме синусов)*, то имеем:

$$\frac{NQ_1}{Q_1T} = \frac{CN \cdot BD}{DT \cdot CE} \qquad (1)$$

Аналогично, если $Q_2 = AF \cap TN$, то получим: $\frac{NQ_2}{Q_2T} = \frac{FN \cdot EA}{AT \cdot BF}$ *(2)*

Если мы покажем равенство правых частей в равенствах *(1)* и *(2)*, то $\frac{NQ_1}{Q_1T} = \frac{NQ_2}{Q_2T}$, что и будет означать: $Q_1 \equiv Q_2 \equiv Q$.

Поскольку $\Delta CNE \sim \Delta FNB$, то $\frac{CN}{CE} = \frac{FN}{BF}$ *(3)*

Аналогично $\Delta DTB \sim \Delta ATE$ и $\frac{BD}{DT} = \frac{EA}{AT}$ *(4)*

Из равенств *(3)* и *(4)* очевидно: $\frac{CN \cdot BD}{CE \cdot DT} = \frac{FN \cdot EA}{BF \cdot AT}$.

Тогда $\frac{NQ_1}{Q_1T} = \frac{NQ_2}{Q_2T}$ и, так как Q_1 и Q_2 принадлежат *TN*, делаем вывод: $Q_1 \equiv Q_2 \equiv Q$, то есть $T - Q - N$ – одна прямая *(прямая Паскаля)*.

<u>*III способ*</u>. В нем используется *лемма об угле с вершиной вне круга:* $x = \frac{\alpha - \beta}{2}$ *(рис.3) – покажите!*

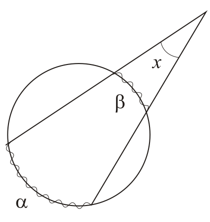


рис.3

Пусть точки *A, B, C, D, E, F* расположены на окружности ω так, как показано на *рис.4*, а *T, N* и *Q* – уже знакомые нам точки: $T = AB \cap DE$, $N = BC \cap EF$ и $Q = CD \cap FA$.

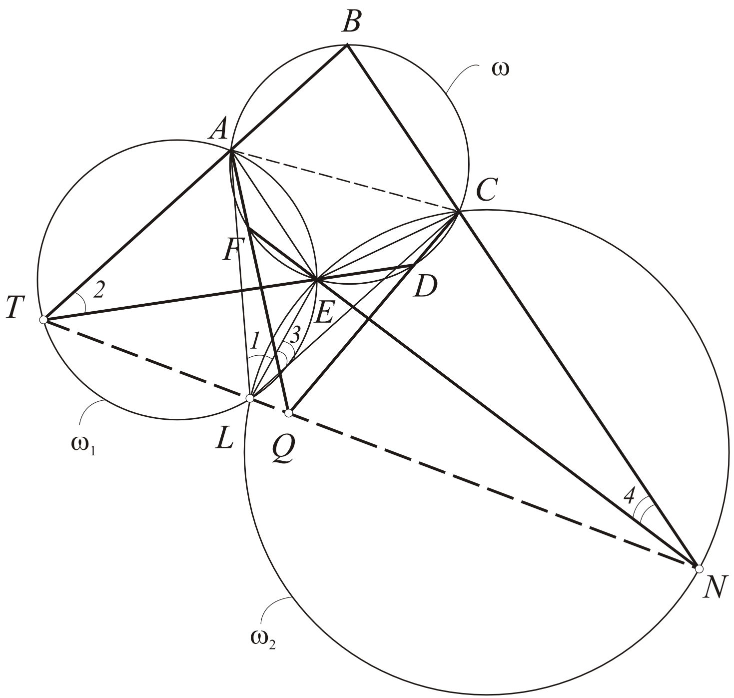


рис.4

Необходимо доказать, что $T - Q - N$ – одна прямая. Опишем окружность ω_1 около ΔAET и окружность ω_2 около ΔCEN . Пусть *L* – вторая точка их пересечения (кроме *E*).

Мы покажем, что $T - L - N$ – одна прямая, а затем, что $L - Q - N$ – одна прямая. Это и будет означать, что точки $T - L - Q - N$ принадлежат одной прямой – *прямой Паскаля*.

Итак, $\angle 1 = \angle 2$ – вписанные в ω_1, опираются на одну дугу. Аналогично $\angle 3 = \angle 4$ для окружности ω_2 . Согласно *лемме об угле с вершиной вне круга* для окружности ω и углов 2 и 4, нетрудно подсчитать: $\angle 2 = \dfrac{\cup ABCD - \cup AFE}{2}$,

$\angle 4 = \dfrac{\cup FABC - \cup EDC}{2}$, откуда $\angle 2 + \angle 4 = \dfrac{\cup ABC - \cup DEF}{2}$.

Тогда и $\angle 1 + \angle 3 = \dfrac{\cup ABC - \cup DEF}{2} = \angle ALC$.

Но по этой же лемме для той же окружности *ω,* описанной около данного шестиугольника, $\angle AQC = \dfrac{\cup ABC - \cup DEF}{2}$.

Поскольку $\angle ALC = \angle AQC$, то точки *A; L; Q; C* лежат на одной окружности – назовем ее ω_3. Покажем, что $T - L - N$ – одна прямая.

Пусть $\angle ELN = \alpha$. Тогда $\angle ECN = 180° - \alpha$ (окружность ω_2) и $\angle BCE = \alpha$ (смежный с ним). $\angle BAE = 180° - \alpha$ (окружность ω) и смежный с ним $\angle TAE = \alpha$. Значит, $\angle TLE = 180° - \alpha$ (окружность ω_1). Так как $\angle TLE + \angle ELN = 180° - \alpha + \alpha = 180°$, то $T - L - N$ – одна прямая.

Аналогично показывается, что $L - Q - N$ – одна прямая: пусть $\angle CLN = \angle CEN = \beta$ (вписанные в ω_2). Тогда и $\angle CAF = \beta$ (четырехугольник $CAFE$ вписан в ω). Значит, и $\angle CLQ = \angle CAQ = \beta$ – вписанные в ω_3. Поскольку $\angle CLQ = \angle CLN = \beta$, то $L - Q - N$ – одна прямая. Итак, все 4 точки: $T - L - N - Q$ лежат на одной прямой. Теорема Паскаля доказана!

Замечание. Три способа доказательства *теоремы Паскаля* были предложены для демонстрации различных подходов при решении геометрической задачи. Для понимания того, что вершины вписанного в окружность шестиугольника могут обозначаться произвольно. Наконец, для «привыкания» к теореме Паскаля, более глубокого ее понимания – с тем, чтобы «узнать» задачи, в которых ее можно применить.

Глава 15

Следствия из теоремы Паскаля. Применение теоремы

Монах Марен Марсенн, будучи сам незаурядным ученым, обладал удивительной способностью объединять вокруг себя людей науки. На кружке Марсенна раз в неделю встречались, спорили, вели научные дискуссии лучшие математики Франции. Так вот, Марсенн утверждал, что Блез Паскаль в работе «Полный труд о конических сечениях» (к великому сожалению, рукопись утеряна) получил около *400 следствий из теоремы Паскаля!..*

Несколько наиболее интересных и важных (на наш взгляд) следствий из этой теоремы мы приведем ниже. Заметим лишь, что ряд следствий из этой теоремы имеют место при *вырождении вписанного шестиугольника*. В результате получаются любопытные теоремы для вписанных пятиугольника и четырехугольника. А также популярная задача для треугольника, в вершинах которого проведены касательные к описанной около него окружности.

Прежде, чем перейти к следствиям, напомним формулировку *теоремы Паскаля* и примем удобные для работы обозначения.

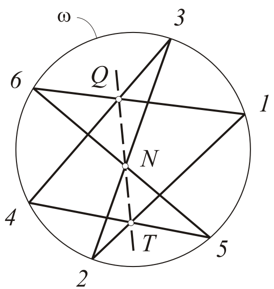


рис.1

Теорема Паскаля.

Пусть 1; 2; 3; 4; 5; 6 – вершины вписанного в окружность ω шестиугольника, расположенные в произвольном порядке. Тогда прямые: 12–45; 23–56; 34–61 пересекаются соответственно в трех точках T; N; Q, лежащих на одной прямой (рис.1).

Итак, следствия из теоремы Паскаля…

Пусть прямые 12 и 45 параллельны. Тогда прямая NQ также будет им параллельна ($N = 23 \cap 56$ и $Q = 34 \cap 61$) – *рис.2*.

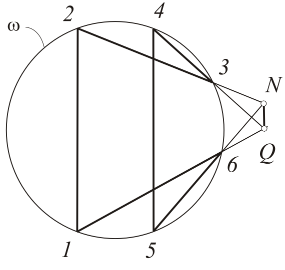


рис.2

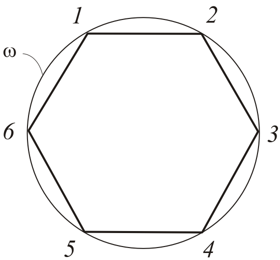


рис.3

Пусть прямые 12 и 45 параллельны. Пусть также параллельны прямые 23 и 56. Тогда и прямые третьей пары: 34 и 61 тоже будут параллельны. Этот случай реализуется, например, в правильном вписанном шестиугольнике *(рис.3)*.

Пусть точки 1 и 2 совпадают. Тогда в полученном вписанном пятиугольнике точка T пересечения касательной в вершине 1 с прямой 45, а также точки $N = 23 \cap 56$ и $Q = 34 \cap 61$ принадлежат одной прямой *(рис.4)*.

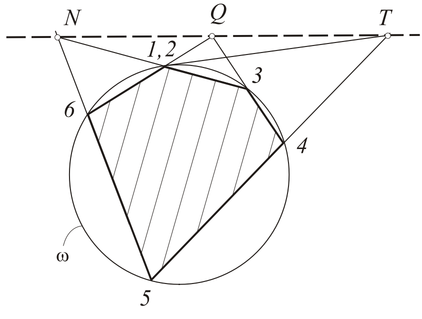


рис.4

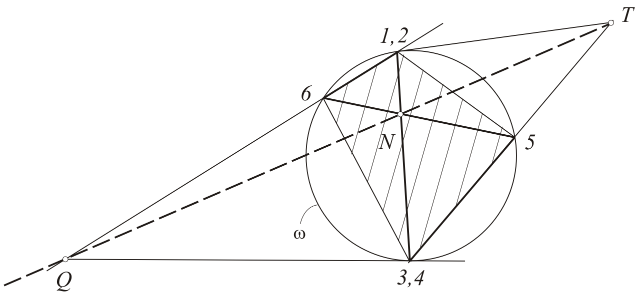


рис.5

N – точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника. T и Q – точки пересечения касательных, проведенных в концах одной диагонали, с прямыми, содержащими противоположные стороны *(рис.5)*.

Тогда $T - N - Q$ – одна прямая.

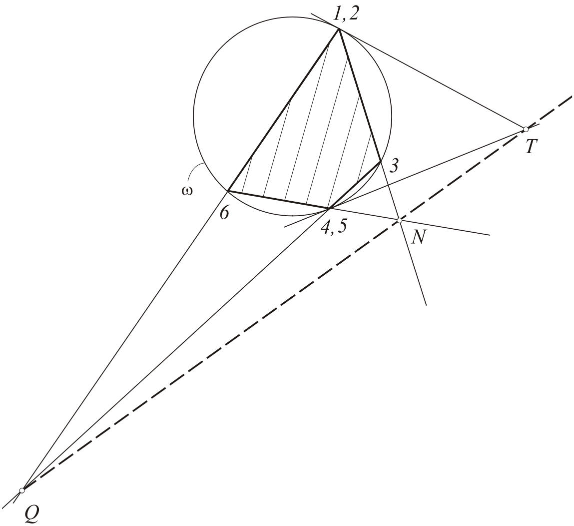


рис.6

Во вписанном четырехугольнике две пары прямых, содержащих противоположные стороны и одна пара касательных в противоположных вершинах, пересекаются в трех точках Q, N и T, лежащих на одной прямой *(рис.6)*.

В вершинах треугольника проведены касательные к описанной около него окружности. Они пересекают прямые, содержащие его противоположные стороны, в трех точках *T, N* и *Q*, лежащих на одной прямой *(рис.7)*.

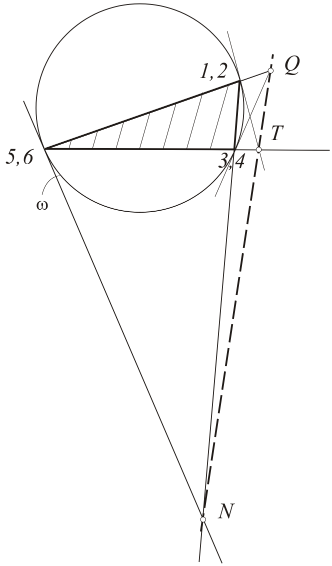


рис.7

Коническое сечение *однозначно* определяется любыми своими пятью точками. На примере окружности это выглядит так: имеется пять вершин вписанного шестиугольника *1; 2; 3; 4; 5* и прямая *k*, проходящая, например, через вершины *5* и *6* *(рис.8)*. Тогда однозначно определяется положение вершины *6* на прямой *k* с помощью одной линейки (подробнее это следствие будет предложено в виде задачи).

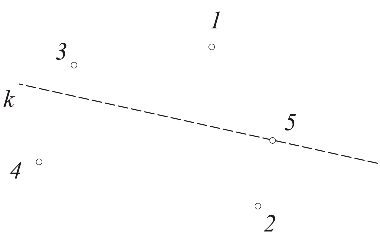


рис.8

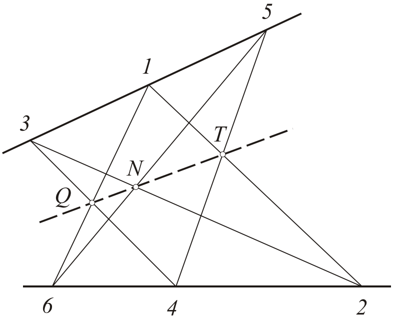


рис.9

Знаменитую теорему Паппа можно рассматривать как следствие из теоремы Паскаля для вырожденной кривой второго порядка.

Действительно, согласно *теореме Паппа*, если точки 1; 3; 5 лежат на прямой a, а точки 2; 4; 6 – на прямой b и при этом $T = 1\,2 \cap 4\,5$; $N = 2\,3 \cap 5\,6$ и $Q = 3\,4 \cap 6\,1$, то $T - N - Q$ – одна прямая *(рис.9)*. Чем не *теорема Паскаля* для вырожденного конического сечения? Не случайно *теорему Паппа* часто называют *конфигурацией Паппа-Паскаля*!..

Ну, а теперь – самое время перейти к задачам, в которых успешно и эффективно применяется *теорема Паскаля*.

Задача 1. *ABCD – прямоугольник, вписанный в окружность. E и F – произвольные точки дуг AB и CD соответственно (рис.10).* $T = BE \cap CF$, $N = BD \cap AC$ *и* $Q = EA \cap FD$. *Докажите, что* $T - N - Q$ *– одна прямая.*

Доказательство. Пронумеровав точки вписанного шестиугольника *AEBCFD* так, как показано на *рис.10*, видим, что $T = 1\,2 \cap 4\,5$; $N = 2\,3 \cap 5\,6$ и $Q = 3\,4 \cap 6\,1$. Согласно *теореме Паскаля* точки *T; N; Q* принадлежат одной прямой.

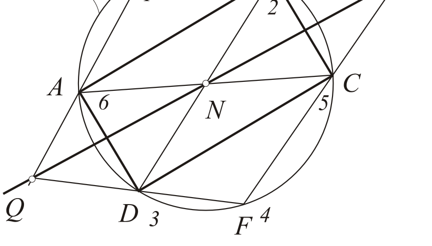


рис.10

Задача 2. *Пусть N – инцентр треугольника ABC (точка пересечения его биссектрис). Прямые AN, BN и CN пересекают окружность ω, описанную около ΔABC, соответственно в точках $W_1; W_2; W_3$ (рис.11). Пусть*

$T = W_1W_2 \cap AC$ *и* $Q = W_1W_3 \cap AB$.

Докажите, что $T - N - Q$ – одна прямая.

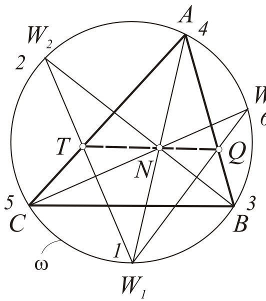


рис.11

Доказательство. Пронумеровав соответствующим образом вершины вписанного в окружность ω шестиугольника $AW_3BW_1CW_2$ *(рис.11)*, убеждаемся: $T = 1\,2 \cap 4\,5$; $N = 2\,3 \cap 5\,6$ и $Q = 3\,4 \cap 61$. По *тереме Паскаля* $T - N - Q$ – одна прямая.

Задача 3. *Около остроугольного треугольника ABC с ортоцентром N описана окружность ω. Прямые AN и BN пересекают ω в точках F_1 и F_2 соответственно (рис.12). X – произвольная точка дуги AB, не содержащей вершину C. $T = AC \cap XF_2$ и $Q = BC \cap XF_1$. Докажите, что $T - N - Q$ – одна прямая.*

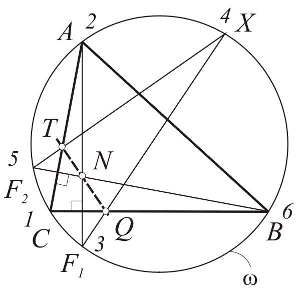


рис.12

Доказательство. На *рис.12* указана нумерация вершин вписанного в ω шестиугольника $AXBF_1CF_2$, согласно которой $T = 1\,2 \cap 4\,5$; $N = 2\,3 \cap 5\,6$ и $Q = 3\,4 \cap 6\,1$. По *теореме Паскаля* точки *T; N; Q* лежат на одной прямой.

Задача 4. *Четырехугольник ABCD вписан в окружность ω. K – произвольная точка в плоскости ABCD. Прямые AK и DK пересекают ω в точках M и L соответственно (рис.13). $T = AK \cap DC$, $Q = DK \cap AB$.*

Докажите, что точка пересечения прямых TQ и LM лежит на прямой BC.

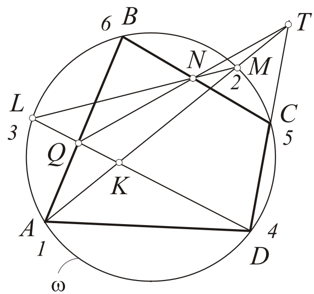


рис.13

Доказательство. Пусть $N = LM \cap BC$. Занумеруем вершины вписанного шестиугольника $ALBMCD$ так, как показано на *рис.13*. Тогда $T = 1\,2 \cap 4\,5$; $N = 2\,3 \cap 5\,6$ и $Q = 3\,4 \cap 6\,1$. Согласно *теореме Паскаля* $T - N - Q$ – одна прямая. А это и означает, что прямые TQ и LM пересекаются в точке N, принадлежащей прямой BC.

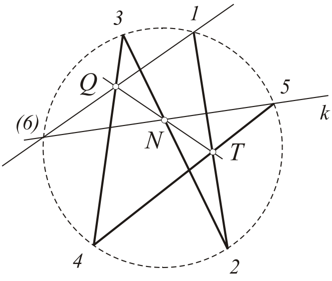


рис.14

Задача 5. *Известно положение пяти вершин: 1; 2; 3; 4; 5 шестиугольника, вписанного в окружность (сама окружность не дана). Дана также прямая k, проходящая через вершины 5 и 6. Пользуясь только линейкой, определите положение вершины 6.*

Построение. Пусть $T = 1\,2 \cap 4\,5$, а $N = 2\,3 \cap k$ *(рис.14)*. Согласно теореме Паскаля $Q = TN \cap 3\,4$. Тогда прямая $1Q$ пересекает прямую k в искомой вершине 6.

Задача 6. *Окружность s касается сторон AC и AB треугольника ABC в точках T и Q соответственно. Она также касается внутренним образом окружности ω, описанной около треугольника ABC, в точке D (рис.15). Пусть N – инцентр в треугольнике ABC (точка пересечения биссектрис). Докажите, что N – середина TQ.*

Доказательство. Воспользуемся известной *леммой Архимеда*: если окружности s и ω имеют внутреннее касание в точке D и AC – хорда ω, касающаяся s в точке T *(рис.16)*, то прямая DT пересекает дугу AC окружности ω в ее середине, то есть $\cup AW_2 = \cup W_2C$ *(покажите!)*

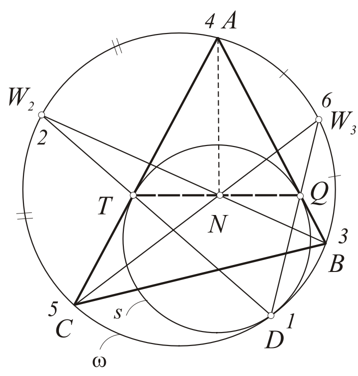


рис.15

Вернемся к *рис.15*. С учетом *леммы Архимеда* имеем: $\cup AW_2 = \cup W_2C$ и $\cup AW_3 = \cup W_3B$. Следовательно, прямые BW_2 и CW_3 совпадают с биссектрисами углов B и C и, следовательно, пересекаются в инцентре N треугольника ABC. Пронумеровав вершины вписанного в окружность ω шестиугольника

AW_3BDCW_2 так, как показано на *рис.15* и воспользовавшись *теоремой Паскаля*, приходим к выводу: точки *T; N; Q* принадлежат одной прямой. Более того, поскольку $\Delta ATN = \Delta AQN$ (по двум сторонам и углу между ними), то $TN = NQ$.

Таким образом, инцентр *N* совпадает с серединой отрезка *TQ*.

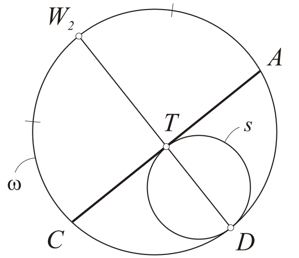


рис.16

<u>Замечание</u>. *Может создаться впечатление, что нумерация точек в задачах навязывается читателю. Если это и так, то с одной лишь целью удобства в связи с принятой индексацией.*

Прежде, чем перейти к задачам для самостоятельного решения, отметим: много говорится о превратностях судьбы Блеза Паскаля. О странностях его характера. О том, как карета, в которой находился Паскаль, чудом не упала в реку Сена в Париже. О его взглядах в последние годы жизни относительно греховности занятия наукой. О самоистязании (носил ремень с гвоздями, впивавшимися в тело). Навестивший его Х. Гюйгенс нашел Паскаля глубоким стариком (это в 37 лет!)

Но не забудем и то, что размышления Блеза Паскаля о жизни были позже изданы книгой под названием «Мысли». И этой книгой восхищались (порой полемизируя, споря) лучшие умы человечества!..

«Человек, по-видимому, создан, чтобы мыслить. В этом все его достоинство, вся его заслуга. И вся его обязанность состоит в том, чтобы мыслить как должно…» (Блез Паскаль)

И, самое главное, не забудем сказать слова благодарности Блезу Паскалю за блестящую геометрическую теорему, открытую в 1640 году в возрасте 16 лет, и которая помогает нам сегодня решать непростые, красивые задачи!..

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 7. Точка *M* лежит на окружности ω – описанной окружности треугольника *ABC*. *K* – произвольная точка. Прямые *AK, BK* и *CK* пересекают ω в точках A_1; B_1; C_1 соответственно. Пусть $T = MA_1 \cap BC$; $N = MB_1 \cap CA$ и $Q = MC_1 \cap AB$. Докажите, что точки *T; N; Q* лежат на одной прямой, проходящей через точку *K*.

Задача 8. AH_1 и BH_2 – высоты в треугольнике *ABC;* AL_1 и BL_2 – биссектрисы в этом же треугольнике. K_1 и K_2 – точки касания вписанной в треугольник *ABC* окружности со сторонами *BC* и *AC* соответственно. Докажите, что прямые H_1H_2; L_1L_2 и K_1K_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

Задача 9. Пусть *O* и *I* – центры описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника; *R* и *r* – радиусы этих окружностей; *K* – точка, симметричная вершине прямого угла относительно *I*. Найдите *OK. (Олимпиада имени И.Ф.Шарыгина, 2010 г.)*

Задача 10. Прямая, проходящая через центр описанной окружности треугольника *ABC*, пересекает стороны *AB* и *AC* соответственно в точках C_1 и B_1. Окружности, построенные на BB_1 и CC_1 как на диаметрах, пересекаются в двух точках. Докажите, что одна из этих точек лежит на описанной окружности треугольника *ABC,* другая – на окружности Эйлера этого треугольника.

Глава 16

Галльский Аполлоний Франсуа Виет

Начнем с истории, которая произошла в 1594 году в Париже. Нидерландский посол на одном из приемов у короля Франции Генриха IV стал утверждать, что среди французов нет крупных математиков.

– Почему, дорогой посол, Вы так считаете?

– Да потому, что наш знаменитый ученый муж Ван Роомен предложил всем математикам в качестве приглашения на диспут решить его, Ван Роомена, уравнение. При этом он сказал мне, что во Франции едва ли даже стоит показывать это уравнение.

– Оно при Вас?

– При мне, Ваше величество!

– У меня есть выдающийся математик! Позовите Виета! – вскричал Генрих IV.

… Раскрыв письмо Ван Роомена, Виет увидел уравнение 45й степени!..

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \ldots - 3795x^3 + 45x = \sqrt{\frac{7-\sqrt{5}}{4} - \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}}{8}}}$$

В правой части уравнения Виет узнал длину стороны правильного 15-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса. Эта сторона опирается на дугу $24°$ ($24° \cdot 15 = 360°$). Поскольку уравнение 45й степени с крайними коэффициентами 1 и 45, то x – это хорда $\frac{1}{45}$ части дуги в $24°$. Первое значение x найдено: $x = 2\sin(\frac{4}{15})°$.

Затем Виет нашел еще 22 корня предложенного уравнения с помощью общей формулы: $x = 2\sin\frac{n \cdot 360° + 12°}{45}$ при $n = 1,\ 2,\ 3 \ldots 22$. (Это уравнение имело еще и 22 отрицательных корня, но ни Виет, ни другие математики того времени отрицательные числа не рассматривали). Итак, задача Ван Роомена решена!

Что же послать ему в ответ? Конечно же, свою любимую задачу! Решив ее недавно, Франсуа Виет стал называть себя не кем-нибудь, а *Apollonius Gallus* (французский Апполоний). Еще бы: ведь после Аполлония (III век до н.э.) ее никто не мог решить с помощью циркуля и линейки! Об этой задаче упоминает Папп Александрийский. Но ее решение содержалось в утраченном труде Аполлония «О касаниях».

*Вот она, **задача Аполлония**: Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей.*

Ван Роомен не сумел решить *задачу Аполлония* циркулем и линейкой, хотя сделал это с помощью конических сечений (что свидетельствует о высоком уровне его геометрических знаний). К чести Ван Роомена, узнав решение Виета, он выразил искреннее восхищение, стал почитателем таланта и другом Франсуа Виета.

Ну, а мы перейдем к рассказу о том, как *Apollonius Gallus* решал *задачу Аполлония*. И поведем наш разговор обстоятельно, не спеша, останавливаясь на всех промежуточных фактах, дабы *задача Аполлония* не показалась слишком сложной.

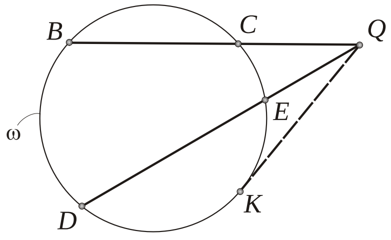


рис.1

***1.** Из точки Q вне окружности ω проведены произвольно две секущие: $Q-C-B$ и $Q-E-D$ (рис.1). Тогда $QB \cdot QC = QD \cdot QE$.*

Действительно, $QB \cdot QC = QD \cdot QE = QK^2$ – по *теореме о квадрате касательной*.

***2.** На рис.2 показано, как проводить общую внешнюю касательную K_1K_2 (касательную Кардано) к окружностям ω_1 и ω_2 с радиусами R_1 и R_2 соответственно.*

ΔO_1O_2F можно построить, поскольку известна его гипотенуза O_1O_2 и катет $O_1F = R_1 - R_2$.

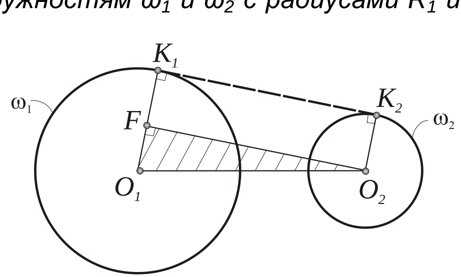


рис.2

3. *Две внешние касательные окружностей* ω_1 и ω_2*, а также линия их центров* O_1O_2*, пересекаются в одной точке – центре гомотетии Q этих окружностей (рис.3).*

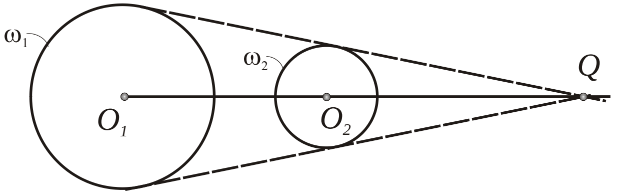


рис.3

4. *Из центра гомотетии Q окружностей* ω_1 и ω_2 *проведены касательная* $Q-K_2-K_1$ *и произвольная секущая, пересекающая* ω_1 и ω_2 *соответственно в точках L и D; E и N (рис.4).*

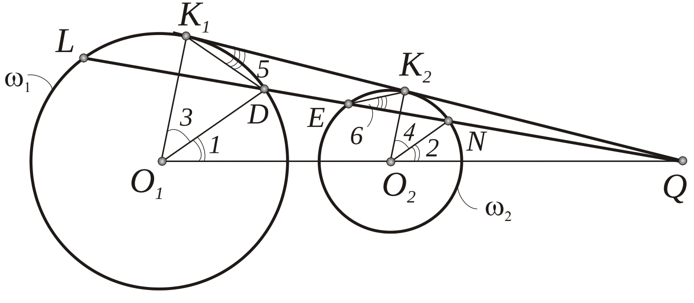


рис.4

Покажем, что $QK_1 \cdot QK_2 = QD \cdot QE$.

$\angle 1 = \angle 2$ *(гомотетия)*. Тогда, очевидно, $\angle 3 = \angle 4$.

$\angle 5 = \dfrac{1}{2}\angle 3$ *(угол между касательной и хордой равен половине соответствующего центрального угла)*.

$\angle 6 = \dfrac{1}{2}\angle 4$ *(вписанный угол измеряется половиной соответствующего центрального угла)*.

Следовательно, $\angle 5 = \angle 6$ и $\Delta K_1DQ \sim \Delta EK_2Q$ *(по двум углам)*.

Значит, $\dfrac{QK_1}{QE} = \dfrac{QD}{QK_2}$, откуда $QK_1 \cdot QK_2 = QD \cdot QE$.

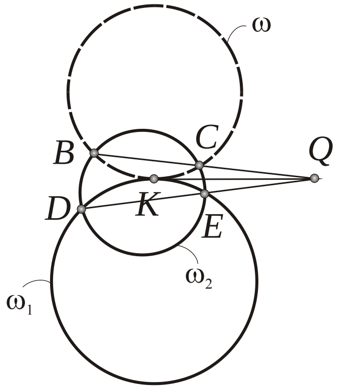


рис.5

***5.** Постройте окружность ω, проходящую через две данные точки B и C и касающуюся данной окружности ω_1 (рис.5).*

Решение. Построим на BC как на хорде произвольно окружность ω_2, чтобы она пересекала ω_1. Пусть D и E – точки пересечения этих окружностей. Пусть также $Q = BC \cap DE$. Тогда, *согласно (1)*, для окружности ω_2 выполняется равенство: $QB \cdot QC = QD \cdot QE$. Но для искомой окружности ω: $QB \cdot QC = QK^2$, где K – точка касания ω и ω_1.

Итак, отрезок $QK = \sqrt{QB \cdot QC}$ нам известен и засечка раствором циркуля, равным QK, дает на ω_1 точку K. Остается построить окружность ω, проходящую через точки B, C, K.

***6.** Пусть окружность ω касается окружностей ω_1 и ω_2 в точках D и E (рис.6). Докажите, что прямая DE пересекает линию центров O_1O_2 именно в точке Q – центре гомотетии окружностей ω_1 и ω_2.*

Доказательство. Пусть O – центр окружности ω. Соединим D и E, E и Q. Если для треугольника OO_1O_2 будет выполняться равенство:

$$\frac{OE}{EO_2} \cdot \frac{O_2Q}{QO_1} \cdot \frac{O_1D}{DO} = 1,$$

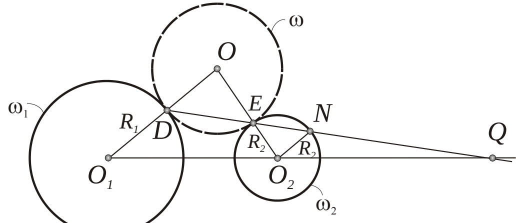


рис.6

то *по теореме Менелая* это и будет означать, что $D - E - Q$ – одна прямая. $OE = DO = R$ (радиусу окружности ω).

Остается доказать, что $\dfrac{O_2Q}{QO_1} = \dfrac{EO_2}{O_1D} = \dfrac{R_2}{R_1}$. А это верно, что следует из подобия треугольников O_2NQ и O_1DQ.

Итак, $Q = DE \cap O_1O_2$.

7. *Постройте окружность ω, проходящую через данную точку B и касающуюся двух данных окружностей* ω_1 и ω_2.

Решение. Пусть такая окружность ω построена. Пусть также D и E – точки касания ω соответственно с ω_1 и ω_2 *(рис.7)*. Согласно *пункту* 6 прямая DE пересекается с прямой O_1O_2 в точке Q – центре гомотетии окружностей ω_1 и ω_2. Построим общую внешнюю касательную K_1K_2 к окружностям ω_1 и ω_2 – *пункт 2*. Она также проходит через точку Q – *пункт 3*. Соединим B и Q. Если бы окружность ω была построена и BQ пересекала ее вторично в точке C, то для ω выполнялось бы равенство: $QB \cdot QC = QD \cdot QE$ – *пункт 1*. Кроме того, $QD \cdot QE = QK_1 \cdot QK_2$ – *пункт 4*. Следовательно, $QB \cdot QC = QK_1 \cdot QK_2$, и мы можем найти положение точки C на прямой BQ: $QC = \dfrac{QK_1 \cdot QK_2}{QB}$.

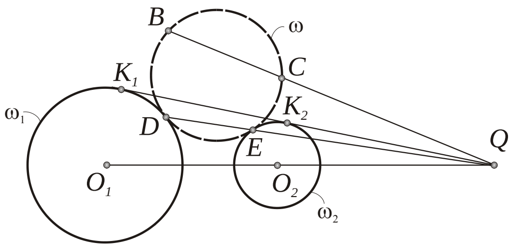


рис.7

Тепеь мы можем построить окружность ω, имея окружность ω_1, которой она должна коснуться, а также точки B и C – *пункт 5*. Задача решена!

8. *Постройте окружность ω, касающуюся трех данных окружностей* $\omega_1; \omega_2; \omega_3$ *– задача Аполлония.*

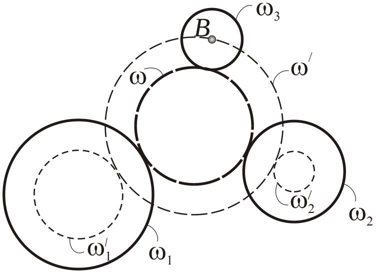


рис.8

Решение. Пусть данные окружности $\omega_1; \omega_2; \omega_3$ имеют радиусы соответственно $R_1; R_2; R_3$ и R_3 – наименьший из них *(рис.8)*. Уменьшим все окружности на R_3. Тогда ω_1 превратится в концентрическую ей окружность ω_1' радиуса $R_1 - R_3$. Аналогично ω_2 – в ω_2' радиуса $R_2 - R_3$, а окружность ω_3 превратится в точку. Обозначим ее B. Теперь мы можем построить окружность ω', проходящую через точку B и касающуюся окружностей ω_1' и ω_2' – *пункт 7*. Остается увеличить окружности ω_1' и ω_2' на R_3, вернув их в первоначальное положение. А точку

B превратить в окружность ω_3 радиуса R_3. А окружность $\omega^{/}$ уменьшить на R_3 и превратить в искомую – концентрическую ей окружность ω. И мы получим требуемое.

Вот за какую задачу Франсуа Виет отважился назвать себя Аполлонием Галльским!

Сделаем несколько существенных замечаний.

Те, кто знаком с *инверсией*, могут выполнить *задачу Аполлония* значительно быстрее. Однако идеи, заложенные в построении – те же самые!

В зависимости от расположения окружностей $\omega_1; \omega_2; \omega_3$ *задача Аполлония* может иметь от 0 до 8 решений. Например, в случае, изображенном на *рис.9*, решений нет.

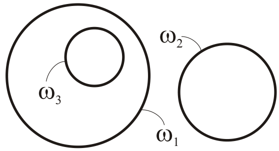


рис.9

Что касается рассмотренного расположения окружностей на *рис.8*, то тут возможны и другие варианты касания окружности ω с тремя данными окружностями. Как, скажем, на *рис.10* и *рис.11*.

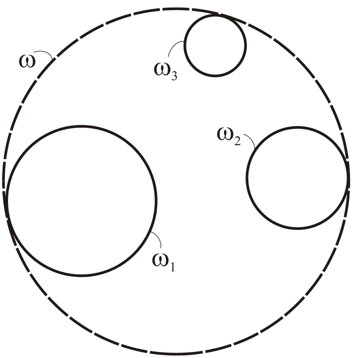


рис.10

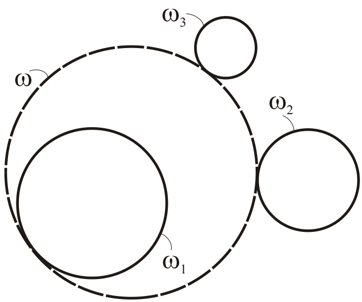


рис.11

Рассмотрите самостоятельно случаи взаимного расположения окружностей, показанные на рис.12-15. *Напомним при этом, что точку тоже можно считать окружностью.*

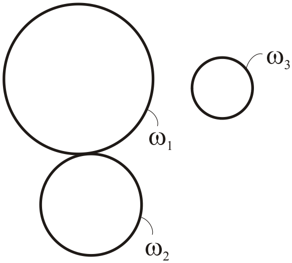


рис.12

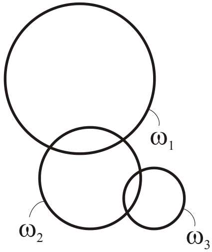


рис.13

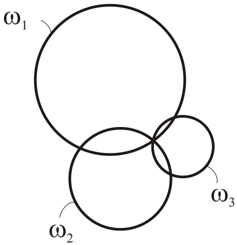


рис.14

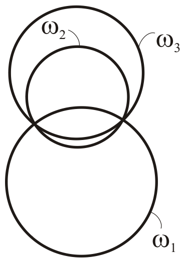


рис.15

Глава 17

Франсуа Виет и геометрия. Теорема косинусов

Удивительно, как много успел сделать во всех областях математики Франсуа Виет (1540–1603)! Юрист по профессии, родившийся на юге Франции в городке Фонтене-ле-Конт, Виет считается «отцом современной алгебры».

Действительно, до него все в алгебре записывалось словами, включая уравнения. Виет же ввел символы:

для неизвестных – гласные буквы $A; E; I; Y...$

для известных – согласные $B; C; D...$

Опираясь на труды Тарталья, Кардано, дель Ферро, Феррари, он заложил основы общей теории алгебраических уравнений. После выхода в свет своей главной работы по алгебре «Введение в аналитическое искусство» Виет писал: «Все математики знали, что под алгеброй и алмукабалой скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти. Задачи, которые они считали наиболее трудными, легко решаются десятками с помощью нашего искусства…»

Уже более 400 лет служит верой и правдой математике *теорема Виета* – одно из самых знаменитых алгебраических утверждений. Тем более, что ее можно обобщить на многочлены любой степени. Термин «коэффициент» впервые встречаем у Виета. Он же первым начинает «работать» с десятичными дробями, с квадратными и фигурными скобками. Виет вычисляет первое точное значение для числа π в виде бесконечного произведения.

Увлечение Виета астрономией дает потрясающие результаты в тригонометрии: формулы тройных углов; теорема тангенсов; разложение $\cos nx$ и $\sin nx$ по степеням $\cos x$ и $\sin x$; полное решение плоских и сферических треугольников по трем элементам!..

И это при том, что Виет вовсе не является профессиональным математиком. Он – советник при дворе короля Генриха IV. Особую славу на этом поприще Виет снискал после того, как сумел подобрать ключ к сложнейшему шифру секретной переписки короля Испании с его послом в Нидерландах. В результате король Франции был в курсе всех действий своих противников.

Франсуа Виет блестяще владел *геометрией*, знал и любил труды древнегреческих геометров, учился у них. Видел свою задачу в том, чтобы навести прочные мосты между юной растущей алгеброй и древней, мудрой геометрией: «Я хочу соединить остроумные измышления новейших алгебраистов с глубокими изысканиями древних геометров».

По отрезку, равному a, Виет строил с помощью циркуля и линейки отрезки $a\sqrt{5}; a\sqrt{11}; a\sqrt{17}; a\sqrt{19}$ (покажите, как это выполняется).

Уравнения третьей и четвертой степеней Виет часто решал с помощью трисекции угла, используя «метод вставок» Архимеда.

Именно Франсуа Виет впервые полностью разобрал случай решения треугольников по двум сторонам и углу против одной из них: $a; b; A$ (наиболее сложный случай). Виет показал что: *а)* решение не всегда возможно; *б)* если оно есть, то может быть одно или два *(покажите это!)*

И главное: *Франсуа Виет первым сформулировал в современном виде теорему косинусов!* До него даже очевидную сегодня задачу: *по элементам b, c, A найти сторону a в треугольнике ABC*, решали довольно сложно (проводили высоты и несколько раз использовали прямоугольные треугольники). Совсем близко к теореме косинусов «подошли» арабские матеатики Аль-Беруни и Аль-Каши, но все же ни тот, ни другой так и не сформулировали ее.

Итак, формула $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ впервые встречается у Виета!

Сегодня *теоремой косинусов* едва ли кого удивишь. Но в XVI веке, более 400 лет назад!.. И потом, не забудем, что с помощью *теоремы косинусов* могут быть решены: теорема Птолемея; теорема Стюарта; формула Эйлера; теорема Герона; формула медианы; многие другие задачи, формулы, теоремы. А знаменитая *теорема Пифагора* – не что иное, как следствие *теоремы косинусов*! Поскольку Виет является «родителем» *теоремы косинусов*, то пусть подборка задач с ее использованием будет небольшим гимном этому замечательному ученому!..

Задача 1. *В треугольнике ABC со сторонами a, b, c выполняется равенство:* $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = \frac{3}{a+b+c}$. *Найдите величину угла A.*

Решение. Избавившись от знаменателя, получим: $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Но по теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Таким образом, $\cos A = \frac{1}{2}$ и $A = 60°$.

Задача 2. *В треугольнике ABC известны сторона a и противолежащий угол A. Найдите его площадь, если известно, что* $b+c=a\sqrt{2}$.

Решение. Согласно условия $(b+c)^2=2a^2$, или $b^2+c^2+2bc=2a^2$.

Но $b^2+c^2=a^2+2bc\cos A$ *(по теореме косинусов)*.

Имеем $a^2+2bc(1+\cos A)=2a^2$, или

$$4bc\cos^2\frac{A}{2}=a^2;\ 2bc\sin A\cos\frac{A}{2}=a^2\sin\frac{A}{2};\ 4S=a^2 tg\frac{A}{2}\ \text{и}\ S=\frac{a^2}{4}tg\frac{A}{2}.$$

Задача 3. *Продолжение биссектрисы угла A пересекает описанную около неравнобедренного треугольника ABC окружность в точке W (рис.1). Докажите, что* $AW=\dfrac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}$.

Решение. По теореме косинусов для треугольника

ABW: $BW^2=AW^2+c^2-2AW\cdot c\cdot\cos\dfrac{A}{2}$.

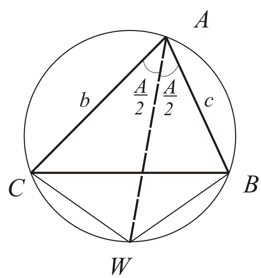


рис.1

По этой же теореме для треугольника ACW:

$$CW^2=AW^2+b^2-2AW\cdot b\cdot\cos\frac{A}{2}.$$

Поскольку $BW=CW$ ($\cup BW=\cup CW$, а равные дуги стягиваются равными хордами), то получаем:

$$AW^2+c^2-2AW\cdot c\cdot\cos\frac{A}{2}=AW^2+b^2-2AW\cdot b\cdot\cos\frac{A}{2};$$

$$2AW\cos\frac{A}{2}(b-c)=b^2-c^2,\ \text{откуда}\ AW=\frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}.$$

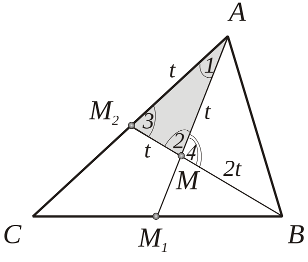


рис.2

Задача 4. *Медианы AM_1 и BM_2 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что ΔAMM_2 – равносторонний. Найдите угол A.*

Решение. Пусть $AM = MM_2 = M_2A = t$ и $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 60°$ *(рис.2)*. Тогда $\angle 4 = 120°$ и $BM = 2MM_2 = 2t$. *По теореме косинусов* для ΔAMB: $AB^2 = t^2 + 4t^2 - 2t \cdot 2t \cdot \cos 120°$ или $AB = t\sqrt{7}$. Вновь по теореме косинусов для ΔABM_2 имеем: $9t^2 = t^2 + 7t^2 - 2t \cdot t\sqrt{7} \cos A$, откуда $\cos A = -\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$.

Следовательно, $A = \pi - \arccos \dfrac{1}{2\sqrt{7}}$.

Задача 5. *Пусть точка Q делит сторону $BC = a$ на отрезки $CQ = q$ и $BQ = n$ (рис.3). Докажите, что длина отрезка AQ вычисляется по формуле: $AQ^2 = \dfrac{n}{a}b^2 + \dfrac{q}{a}c^2 - qn$ (теорема Стюарта).*

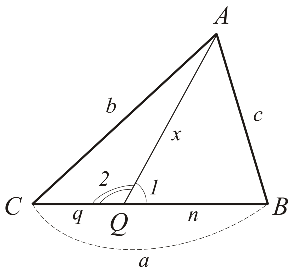


рис.3

Решение. Пусть $AQ = x$, $\angle 1 = \alpha$, $\angle 2 = 180° - \alpha$.
По теореме косинусов для ΔABQ:

$$c^2 = x^2 + n^2 - 2xn\cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{x^2 + n^2 - c^2}{2xn} \qquad (1)$$

Теорема косинусов для ΔACQ дает такое равенство:

$$b^2 = x^2 + q^2 + 2xq\cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{b^2 - x^2 - q^2}{2xq} \qquad (2)$$

Приравняв *(1)* и *(2)*, получим: $\dfrac{x^2 + n^2 - c^2}{2xn} = \dfrac{b^2 - x^2 - q^2}{2xq}$;

$$x^2q + n^2q - c^2q = b^2n - x^2n - q^2n$$
$$x^2(q+n) = b^2n + c^2q - nq(q+n).$$

Поскольку $q + n = a$, получаем: $x^2 = AQ^2 = \dfrac{n}{a}b^2 + \dfrac{q}{a}c^2 - nq$

Задача 6. *В параллелограмме со сторонами a и b $a>b$ из середины большей стороны параллельная сторона видна под углом φ. Найдите площадь параллелограмма.*

Решение. Пусть $BC = AD = a$; $AB = CD = b$ и $\angle ATD = \varphi$, где T – середина BC (рис.4). Пусть также $\angle ABC = \alpha$ и $\angle DCB = 180° - \alpha$.

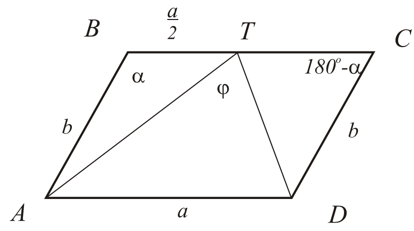


рис.4

По теореме косинусов для ΔABT:

$$AT^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} - ab\cos\alpha \qquad (1)$$

По ней же для ΔDCT: $TD^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} + ab\cos\alpha \qquad (2)$

Вновь *по теореме косинусов* для ΔATD имеем:

$a^2 = AT^2 + TD^2 - 2AT \cdot TD\cos\varphi$.

Подставим *AT* и *TD* из *(1)* и *(2)*

$$a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} - ab\cos\alpha + b^2 + \frac{a^2}{4} + +ab\cos\alpha - 2AT \cdot TD\cos\varphi,$$

Откуда $AT \cdot TD = \dfrac{2b^2 - \dfrac{a^2}{2}}{2\cos\varphi} = \dfrac{4b^2 - a^2}{4\cos\varphi}$,

$$S_{ATD} = \frac{1}{2}AT \cdot TD\sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{4b^2 - a^2}{4\cos\varphi}\sin\varphi.$$

Очевидно, $S_{ATD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Поэтому $S_{ABCD} = \dfrac{4b^2 - a^2}{4}tg\varphi$.

Задача 7. *В прямоугольном треугольнике с катетами 9 и 12 найдите расстояние MI между точками пересечения его медиан и биссектрис.*

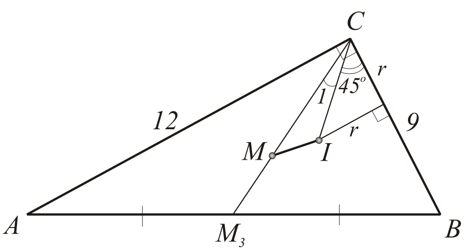


рис.5

Решение. Пусть в прямоугольном ΔABC $(C = 90°)$ $BC = 9$; $AC = 12$ *(рис.5)*. По теореме Пифагора $AB = 15$, $CM_3 = \frac{15}{2}$ (медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы) и

$$CM = \frac{2}{3}CM_3 = 5.$$

Радиус вписанной в ΔABC окружности вычисляется по формуле:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{9+12-15}{2} = 3$$

Тогда $CI = r\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Так как ΔBCM_3 равнобедренный $(BM_3 = CM_3)$, то $\angle BCM_3 = B$. Значит, $\angle 1 = B - 45°$.

По теореме косинусов для ΔMCI :

$$MI^2 = CM^2 + CI^2 - 2CM \cdot CI \cdot \cos(B-45°) .$$

Из треугольника ABC $\cos B = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$; $\sin B = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Получаем: $MI^2 = 25+18-2\cdot 5\cdot 3\sqrt{2}(\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$MI^2 = 43-30\sqrt{2}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 43-42 = 1$$

$$MI = 1 .$$

Задача 8. *На окружности ω даны точки A и B (рис.6). Найти на ω точку X – такую, чтобы сумма $XA^2 + XB^2$ была максимальной.*

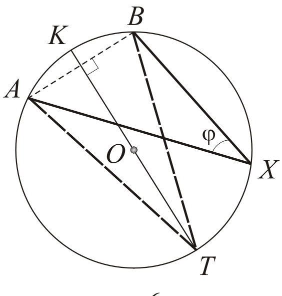


рис.6

Решение. Очевидно, точка X находится на большей части дуги AB. При этом AB и $\angle AXB = \varphi$ – фиксированы. По теореме косинусов для ΔAXB :

$$AB^2 = XA^2 + XB^2 - 2XA \cdot XB \cdot \cos\varphi .$$

Или $XA^2 + XB^2 = AB^2 + 2XA \cdot XB \cdot \sin\varphi \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$,

Или $XA^2 + XB^2 = AB^2 + 4S_{AXB} \cdot ctg\varphi$.

Поскольку AB и φ постоянны, то $\left(XA^2 + XB^2\right)_{\max}$ достигается при $(S_{AXB})_{\max}$.

Нетрудно видеть, что $(S_{AXB})_{\max}$ при $X \equiv T$, где T – наиболее удаленная от AB точка диаметра $KT \perp AB$.

Задача 9. *Постройте вписанный четырехугольник ABCD по данным его сторонам* a; b; c; d .

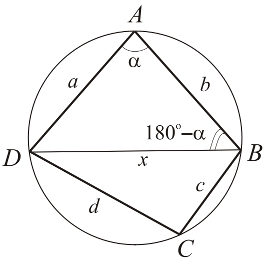


рис.7

Решение. Пусть $AD = a$; $AB = b$; $BC = c$; $CD = d$. Пусть также $BD = x$, а $\angle BAD = \alpha$ и $\angle BCD = 180° - \alpha$ *(рис.7)*.

По теореме косинусов для ΔBAD :

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab} \qquad (1)$$

По теореме косинусов для ΔBCD :

$$x^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x^2 - c^2 - d^2}{2cd} \qquad (2)$$

Приравняв *(1)* и *(2)*, найдем x:

$$\frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab} = \frac{x^2 - c^2 - d^2}{2cd}, \text{ или } x^2 = \frac{(a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab}{ab + cd},$$

Или $x^2 = \dfrac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$, откуда $x = \dfrac{\sqrt{ac + bd}\cdot\sqrt{ad + bc}}{\sqrt{ab + cd}}$.

Построить отрезок x нетрудно. Покажем, как построить, например, отрезок $n = \sqrt{ac + bd}$.

$n = \sqrt{a(c + \dfrac{bd}{a})}$. Строим отрезок $q = \dfrac{bd}{a}$ – элементарное построение, строим отрезок $t = c + q$. И, наконец, $n = \sqrt{at}$ – также элементарное построение.

Все дальнейшие построения очевидны!..

Задача 10. *Докажите, что в произвольном треугольнике ABC со сторонами* $a; b; c$ *и углами* $A; B; C$ *выполняется неравенство:*

$ab\cdot\cos C + bc\cdot\cos A + ac\cdot\cos B \geq \dfrac{2}{3}p^2$ *, где p – полупериметр* ΔABC *.*

Доказательство. Согласно теореме косинусов $ab\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$.

Аналогично $bc\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$, $ac\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}$.

Тогда нам необходимо доказать, что

$$\frac{a^2+b^2-c^2+b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2}{2} \geq \frac{2}{3}p^2,$$

или $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} \geq \dfrac{2}{3}\dfrac{(a+b+c)^2}{4}$,

или $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$,

или, после раскрытия скобок: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$,
что верно (знаменитое *неравенство трех квадратов*).

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 11. Площадь треугольника *ABC* вычисляется по формуле:

$S = \dfrac{1}{4}(a^2-b^2-c^2)$. Найдите угол *A*.

Ответ. $135°$

Задача 12. Найдите угол *A* в треугольнике *ABC*, для которого выполняется равенство: $4\sqrt{3}S = b^2+c^2-a^2$.

Ответ. $30°$

Задача 13. *AB* и *CD* – основания трапеции, около которой описана окружность *ω*. *TQ* – диаметр *ω*, причем $TQ \parallel AB$. *K* – точка на прямой *TQ*. Докажите, что $KA^2+KB^2 = KC^2+KD^2$.

Задача 14. *K* – точка на диаметре *AB* окружности *ω*. Проводятся всевозможные хорды $CD \parallel AB$. Докажите, что $KC^2+KD^2 = const$.

Задача 15. Докажите справедливость следующих формул в произвольном треугольнике: $a^2 = (b+c)^2 - 4S\cdot ctg\dfrac{A}{2}$; $a^2 = (b-c)^2 + 4S\cdot tg\dfrac{A}{2}$.

Задача 16. Вписанная в треугольник *ABC* окружность касается сторон *AB* и *AC* в точках *K* и *N* соответственно. Известно, что $AK:KB = 1:6$, а

$AN : NC = 1:7$. Найдите величину угла A.

Ответ. $120°$

Задача 17. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB и AC в точках K и N соответственно. Известно, что $BN = CK$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

Задача 18. Докажите *теорему Птолемея*: во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон.

Задача 19. В параллелограмме известны две стороны a и b ($a > b$) и острый угол α между диагоналями. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ. $\frac{a^2 - b^2}{2} \cdot tg\alpha$

Задача 20. Высоты треугольника ABC связаны соотношением: $h_a = h_b + h_c$.

Докажите, что $\cos A \geq \frac{7}{8}$.

Глава 18

Обстоятельный разговор о прямой Симсона-Уоллеса

Почему именно прямая Симсона-Уоллеса, а не просто Симсона, как она зовется во всей математической литературе? Ну хотя бы ради исторической справедливости, поскольку впервые она появляется в трудах шотландского математика Вильяма Уоллеса (1768–1843) – профессора математики Эдинбургского университета. Прямой Симсона ее называют потому, что другой шотландский математик Роберт Симсон (1687–1768), профессор в университете Глазго, по содержанию своих геометрических работ (о теореме Дезарга, Паскаля и другие) почти должен был "выйти" на эту прямую.

Именно так математики и считали. Но дело в том, что в трудах Симсона, которые все сохранены, ни одного слова нет о прямой Симсона.

Мы в дальнейшем все же будем называть ее прямой Симсона (так уже сложилось), но хотя бы в голове будем держать, что отцом этой прямой в действительности является В. Уоллес.

Итак, время начать обстоятельный разговор о так называемой прямой Симсона.

***Теорема 1**. Основания перпендикуляров, проведенных из произвольной точки описанной около треугольника окружности на его стороны (или их продолжения), принадлежат одной прямой – прямой Симсона.*

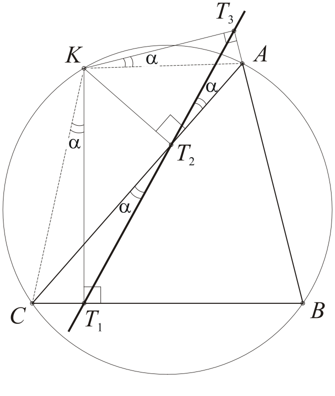


рис.1

Доказательство. Пусть K – произвольная точка окружности, описанной около треугольника ABC *(рис.1)*. T_1; T_2; T_3 – основания перпендикуляров, проведенных из точки K на прямые, которые содержат стороны BC, AC и AB соответственно. Необходимо доказать, что точки T_1; T_2; T_3 принадлежат одной прямой.

Поскольку $KABC$ – вписанный четырехугольник, то

$$\angle AKC = 180° - B \qquad (1)$$

Но около четырехугольника KT_3BT_1 также можно описать окружность (два противоположных угла равны по $90°$), то есть

$$\angle T_1KT_3 = 180° - B \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), делаем вывод: $\angle AKC = \angle T_1KT_3$. Тогда очевидно, что равны и углы CKT_1 и AKT_3. Пусть каждый из них равен α.

$\angle CT_2T_1 = \angle CKT_1 = \alpha$ (вписанные, опираются на одну дугу окружности с диаметром KC).

Аналогично $\angle AT_2T_3 = \angle AKT_3 = \alpha$ – вписанные, опираются на одну дугу в окружности с диаметром AK.

Поскольку $\angle CT_2T_1 = \angle AT_2T_3 = \alpha$, то точки $T_1 - T_2 - T_3$ принадлежат одной прямой.

***Задача 1**. Существуют ли точки, которые принадлежат своей прямой Симсона?*

<u>Решение</u>. Да, существуют. Это, например, вершины треугольника ABC.

Действительно, прямая AH_1, содержащая высоту, проведенную из вершины A, является прямой Симсона точки A *(рис.2)*.

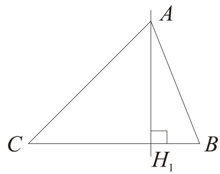


рис.2

***Задача 2**. Для каких точек прямая Симсона совпадает с одной из сторон треугольника ABC?*

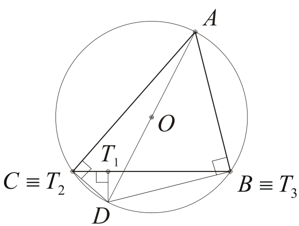


рис.3

<u>Решение</u>. Пусть D – точка, диаметрально противоположная точке A *(рис.3)*. Поскольку $\angle DBA = \angle DCA = 90°$ (вписанные опираются на диаметр), то точки C и B соответственно совпадут с точками T_2 и T_3 прямой Симсона, значит прямая, которая содержит сторону BC, и будет прямой Симсона точки D.

Следовательно, прямые Симсона точек, диаметрально противоположных вершинам A, B, C, содержат сторону треугольника ABC.

Нетрудно показать, что других точек, для которых прямые Симсона совпадают со сторонами, не существует.

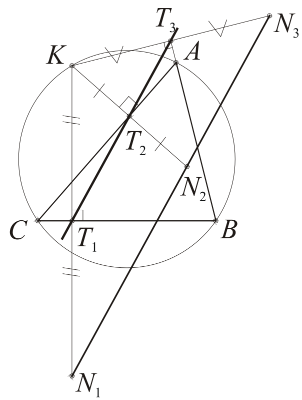


рис.4

***Задача 3**. Для любой точки K окружности, описанной около треугольника ABC, ее симметричные образы относительно сторон треугольника принадлежат одной прямой. Докажите!*

<u>Решение</u>. Пусть точки N_1; N_2; N_3 – симметричные образы точки K относительно сторон BC, AC и AB соответственно (*рис.4*).
Поскольку середины отрезков KN_1; KN_2; KN_3 – точки $T_1 - T_2 - T_3$ – принадлежат одной прямой (прямой Симсона), то и точки $N_1 - N_2 - N_3$ также принадлежат одной прямой (иногда говорят: здесь мы имеем дело с «удвоенным» Симсоном).

***Задача 4**. Доказать, что прямой $N_1 - N_2 - N_3$ задачи 3 принадлежит также и точка H – ортоцентр треугольника ABC.*

<u>Решение</u>. Соединим точки N_1 и N_3 задачи 3 с ортоцентром H (*рис.5*). Пусть высоты AH_1 и CH_3 пересекают описанную окружность в точках F_1 и F_3 соответственно. Известно, что точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника, принадлежат описанной окружности, то есть $HH_1 = H_1F_1$ и $HH_3 = H_3F_3$.
Из четырехугольника H_1HH_3B видно, что $\angle H_1HH_3 = 180° - B$. Если мы докажем, что $\angle 1 + \angle 2 = B$, то задача будет решена.
Из соображений симметрии KF_1 и HN_1 пересекутся в точке G_1, принадлежащей BC, а KF_3 и HN_3 – в точке G_3 на прямой AB. Тогда $\angle KF_1A = \angle 1$, а $\angle KF_3C = \angle 2$.
Но $\angle KF_1A = \frac{1}{2} \cup AK$ и $\angle KF_3C = \frac{1}{2} \cup KC$ –

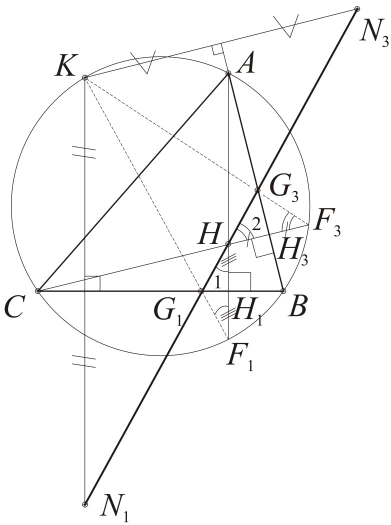


рис.5

как вписанные. Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\cup AK + \cup KC) = \frac{1}{2} \cup AC$.

Учитывая то, что $\cup AC = 2B$ (на эту дугу опирается вписанный угол B), получим: $\angle 1 + \angle 2 = B$. Таким образом, ортоцентр H принадлежит прямой $N_1 - N_2 - N_3$.

***Задача 5**. Прямая Симсона точки K делит отрезок KH пополам. Доказать.*

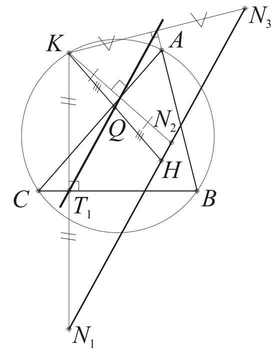


рис.6

Решение. Поскольку по *задаче 4* ортоцентр H принадлежит прямой $N_1 - N_2 - N_3$, которая является "удвоенным" Симсоном, то очевидно, что середина отрезка KH – точка Q – принадлежит прямой $T_1 - T_2 - T_3$ – прямой Симсона точки K (*рис.6*).

***Задача 6**. Точка пересечения Q прямой Симсона точки K и отрезка KH принадлежит окружности 9 точек треугольника ABC. Доказать.*

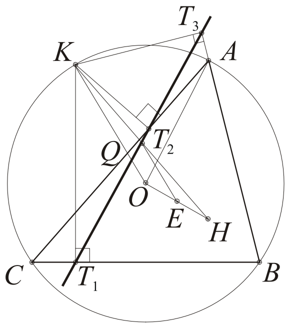


рис.7

Решение. Известно, что центром окружности 9 точек является точка E – середина отрезка OH, а радиус этой окружности равен $\frac{1}{2}R$ – половине радиуса окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда очевидно, что QE – средняя линия в треугольнике OKH (*рис.7*), то есть $QE = \frac{1}{2}OK = \frac{1}{2}R$. Это и значит, что Q – середина KH – принадлежит окружности 9 точек треугольника ABC.

***Задача 7**. Отрезок AD параллелен прямой Симсона точки K (D – точка пересечения прямой KT_1 с описанной окружностью). Доказать.*

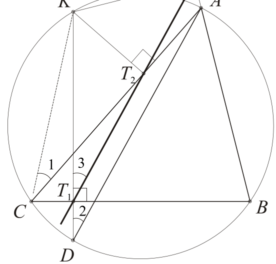
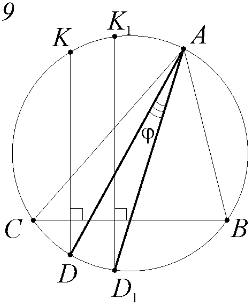


рис.8

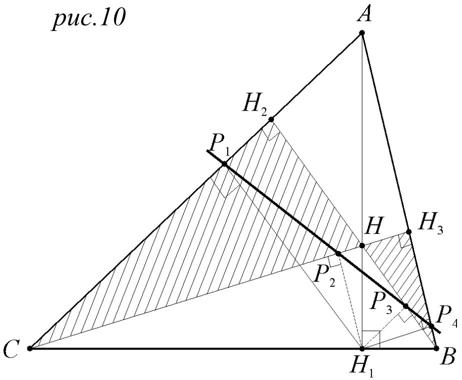
Решение. $\angle 1 = \angle 2$ – вписанные, опираются на дугу KA (*рис.8*). $\angle 1 = \angle 3$ – вписанные, опираются на одну дугу в окружности с диаметром KC. Следовательно, $\angle 2 = \angle 3$, или отрезок AD параллелен прямой $T_1 - T_2 - T_3$.

***Задача 8**. Угол между прямыми Симсона точек K и K_1 равен половине дуги между этими точками. Доказать.*



Решение. Отрезки AD и AD_1, параллельны прямым Симсона точек K и K_1 *(задача 7)*. Следовательно, угол между прямыми Симсона точек K и K_1 равняется углу ϕ между параллельными им отрезками AD и AD_1 *(рис.9)*.

А угол ϕ равняется половине дуги DD_1 (вписанный). Но $\cup DD_1 = \cup KK_1$ – как дуги, которые содержатся между параллельными хордами, значит утверждение задачи доказано: $\phi = \frac{1}{2} \cup KK_1$.



***Задача 9**. Проекции основания высоты треугольника на две другие стороны и две другие высоты принадлежат одной прямой. Докажите!*

Решение. Из *рис.10* P_1 и P_4 – проекции основания H_1 высоты AH_1 на стороны AC и AB соответственно, а P_2 и P_3 – проекции H_1 на высоты CH_3 и BH_2. Нужно доказать, что $P_1 - P_2 - P_3 - P_4$ – одна прямая.

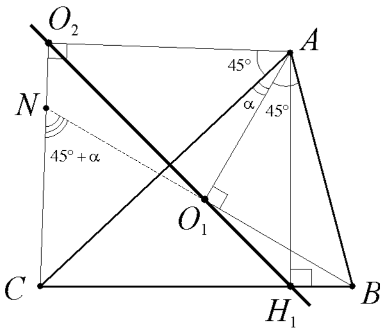
Около CH_2HH_1 можно описать окружность (два противоположных угла равняются по $90°$). Тогда для точки H_1 описанной около ΔCH_2H окружности прямая $P_1 - P_2 - P_3$ будет прямой Симсона.

Аналогично около H_1HH_3B можно описать окружность. И для точки H_1 этого окружности, описанной около треугольника BH_3H прямая $P_2 - P_3 - P_4$ будет прямой Симсона.

Поскольку точки P_2 и P_3 принадлежат каждой из двух прямых Симсона, то вообще все четыре точки (P_1; P_2; P_3; P_4) принадлежат одной прямой.

Задача 10. *В остроугольном треугольнике ABC на стороне AB построен квадрат с центром O_1 – вовнутрь треугольника, а на стороне AC – квадрат с центром O_2 – во внешнюю сторону. H_1 – основание высоты AH_1 треугольника ABC (рис.11). Доказать, что точки H_1; O_1; O_2 принадлежат одной прямой.*

рис.11



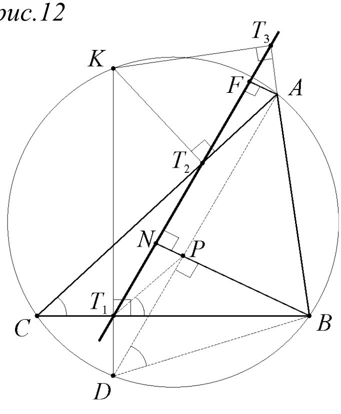
Решение. Продолжим BO_1 до пересечения с O_2C в точке N. Покажем, что прямая $H_1 - O_1 - O_2$ – прямая Симсона для точки A окружности, описанной около треугольника BNC.

Поскольку AH_1; AO_1; AO_2 – перпендикуляры на стороны (или их продолжения) треугольника BNC, то достаточно доказать, что точка A принадлежит окружности, описанной около этого треугольника.

Пусть $\angle O_1AC = \alpha$. Тогда $\angle CAB = 45° + \alpha$ и $\angle O_1AO_2 = 45° + \alpha$. В четырехугольнике O_2AO_1N подсчитаем, что $\angle O_2NO_1 = 135° - \alpha$, а смежный с ним $\angle BNC = 45° + \alpha$. Таким образом, $\angle BNC = \angle CAB = 45° + \alpha$, значит точки B, A, N, C принадлежат одной окружности.

Задача 11. *NF – проекция стороны AB на прямую Симсона точки K (рис.12). Доказать, что $T_1T_2 = NF$.*

рис.12



Решение. Пусть P – точка пересечения отрезков AD и BN. Известно, что $AD \parallel NF$ *(задача 7)*. Вокруг четырехугольника DT_1PB можно описать окружность с диаметром DB. Тогда $\angle PT_1B = \angle PDB$ – опираются на дугу PB. Но $\angle ADB = \angle ACB$ (вписанные, опираются на дугу AB).

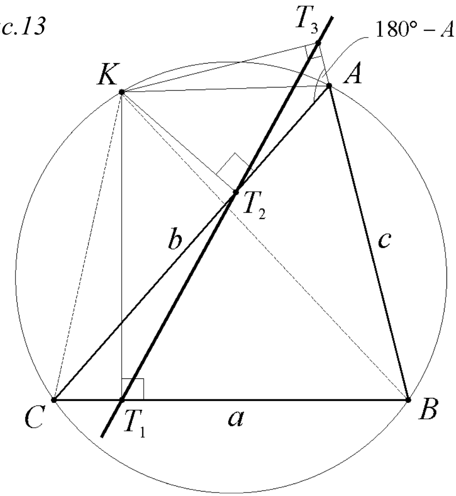
Таким образом, $\angle ACB = \angle PT_1B$, что означает параллельность прямых T_1P и AC.

Тогда APT_1T_2 – параллелограмм ($AP \parallel T_1T_2$ и

$AT_2 \parallel T_1P$). Следовательно $AP = T_1T_2$. Но $AP = NF$. Значит, $T_1T_2 = NF$.

***Задача 12**. Воспользовавшись прямой Симсона, докажите теорему Птоломея: произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.*

рис.13



<u>Решение</u>. KA – диаметр окружности, описанной около четырехугольника KT_3AT_2 (*рис.*13) и $\dfrac{T_2T_3}{\sin(180° - A)} = KA$, или $T_2T_3 = KA \cdot \sin A$.

KB – диаметр круга, описанного вокруг KT_3BT_1, тогда $\dfrac{T_1T_3}{\sin B} = KB$, и

$T_1T_3 = KB \cdot \sin B$.

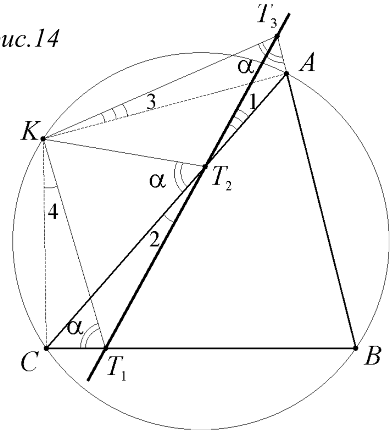
Аналогично KC – диаметр окружности, описанной около KT_2T_1C , откуда $\dfrac{T_1T_2}{\sin C} = KC$ (теорема синусов для ΔCT_2T_1), или $T_1T_2 = KC \cdot \sin C$.

Учитывая то, что $T_1T_3 = T_1T_2 + T_2T_3$, получим: $KB \cdot \sin B = KC \cdot \sin C + KA \cdot \sin A$, или $KB \cdot \dfrac{b}{2R} = KA \cdot \dfrac{a}{2R} + KC \cdot \dfrac{c}{2R}$, или, после сокращения на $2R$, $KB \cdot b = KA \cdot a + KC \cdot c$. Это уже и является теоремой Птоломея для вписанного в окружность четырехугольника $KABC$ (действительно, KB и b – его диагонали; KA и a та KC и c – пары противоположных сторон).

Перед тем, как предложить несколько задач для самостоятельного решения, докажем обобщенную теорему о прямой Симсона-Уоллеса.

***Теорема 2 (обобщенная)**. Из произвольной точки K описанной около треугольника ABC окружности проведены прямые, которые пересекают BC, AC и продолжение AB в точках T_1; T_2 и T_3 соответственно (рис.14) – под равными углами α. Доказать, что и в этом случае $T_1 - T_2 - T_3$ – одна прямая.*

рис.14



Доказательство. Чтобы доказать теорему, покажем равенство углов 1 и 2.

Поскольку $\angle KT_2A = 180° - \alpha$ (смежный с углом KT_2C), то вокруг четырехугольника KT_3AT_2 можно описать окружность, в результате чего $\angle 1 = \angle 3$.

Вокруг KT_2T_1C также можно описать окружность ($\angle KT_2C = \angle KT_1C = \alpha$) и $\angle 2 = \angle 4$.

Можно описать окружность и вокруг KT_3BT_1 ($\angle KT_1B = 180° - \alpha$ как смежный с углом KT_1C).

Поскольку четырехугольники $KABC$ и KT_3BT_1 вписанные, то $\angle CKA = \angle T_1KT_3 = 180° - B$. Откуда вытекает, что $\angle 3 = \angle 4$, или $\angle 1 = \angle 2$. Теорема доказана.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 13. Прямая Симсона точки K окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, делит радиус OK пополам. Докажите.

Задача 14. Докажите теорему о прямой Симсона с помощью теоремы Менелая.

Задача 15. Если основания перпендикуляров, проведенных из точки K к сторонам треугольника ABC (или их продолжений) принадлежат одной прямой, то точка K принадлежит описанной около треугольника ABC окружности. Докажите! (Задача, обратная теореме о прямой Симсона).

Задача 16. Докажите, что прямые Симсона диаметрально противоположных точек перпендикулярны, и что они пересекаются на окружности 9 точек треугольника ABC.

Задача 17. Восстановите ΔABC по углу A и его прямой Эйлера (прямой, которая содержит центр описанного круга O и ортоцентр H).

Задача 18. Если через точку K описанной около треугольника ABC окружности провести три произвольных хорды и на каждой из них как на диаметре построить окружность, то эти окружности попарно пересекутся в трех точках, которые принадлежат одной прямой (теорема Сальмона).

Задача 19. $ABCD$ – вписанный четырехугольник. K – произвольная точка окружности. Для точки K и каждого из треугольников ABC, BCD, CDA, DAB существуют свои прямые Симона. Доказать, что проекции точки K на эти прямые Симсона принадлежат одной прямой – *прямой Симсона четырехугольника*.

Глава 19

Чева «обыкновенный»

Джиованни Чева (1648–1734), итальянский геометр, по профессии инженер-гидравлик, в работе «О прямых линиях» доказал теорему, носящую его имя. Чева называл ее задачей. Он предложил как чисто геометрическое решение, так и то, которое может быть получено исходя из механических соображений. Чева родился в Милане, обучался в Пизанском университете. Будучи специалистом по гидравлике, работал экономистом (правительственным комиссаром) в одном из герцогств Италии. В математике Чева более всего интересовался коническими сечениями, построениями касательных к ним. Разрабатывал учение о секущих. Его ученик Д. Саккери был одним из тех, кто предвосхитил появление неевклидовой геометрии. Он написал небольшую книгу "Евклид, очищенный от всяких пятен", где при помощи доказательства "методом от противного" исследовал постулат Евклида о параллельных. И все же для человечества Чева останется в первую очередь как автор знаменитой, фундаментальной *теоремы Чевы,* которая решала (и решает) многие геометрические задачи.

Заметим, что имеет место пространственный аналог теоремы Чевы. О теореме Чевы для тетраэдра можно прочитать, например, в [7].

Обычно в геометрической «табели о рангах» теоремы Чевы и Менелая стоят рядом. И это вполне справедливо. Они действительно близки по значимости, по формульному виду, по идейному смыслу. Более того, существует ряд задач, которые успешно решаются как раз совместным применением *теорем Чевы и Менелая*. Вместе с тем не забудем, что *теорема Менелая* старше примерно на полторы тысячи лет! (древнегреческий геометр Менелай жил в I веке нашей эры). Именно поэтому среди большого числа способов доказательства *теоремы Чевы* мы выберем тот, который базируется на *теореме Менелая* – своей исторической предшественнице.

Теорема Чевы. *Пусть чевианы AA_1, BB_1, CC_1 (отрезки, соединяющие соответственные вершины треугольника с точками на противоположной стороне) пересекаются в точке K (рис.1). Докажите, что в таком случае* $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$ *(1)*

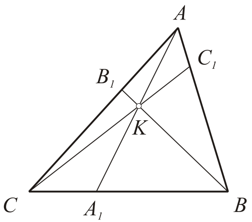


рис.1

Решение. Напомним содержание теоремы Менелая. Пусть некоторая прямая l пересекает стороны треугольника ABC (или их продолжений) в точках N, T и Q *(рис.2)*. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\frac{AT}{TB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CN}{NA}=1$$

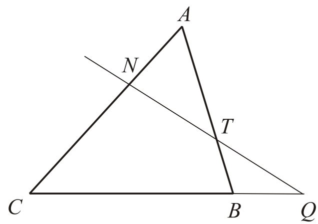


рис.2

Докажите теорему Менелая самостоятельно или же воспользуйтесь, например, [26], [27].

Вновь переходим к *рис.1*. По *теореме Менелая* для ΔACA_1 и секущей B_1-K-B имеем:

$$\frac{AK}{KA_1}\cdot\frac{A_1B}{BC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \qquad (2)$$

По той же теореме Менелая для ΔABA_1 и секущей C_1-K-C получаем:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BC}{CA_1}\cdot\frac{A_1K}{KA}=1 \qquad (3)$$

Перемножив *(2)* и *(3)* и проведя сокращение на AK, BC, A_1K, получим следующее: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$, что равносильно доказательству *теоремы Чевы*.

Замечание 1. Так же, как верна *обратная теорема Менелая,* верна и *обратная теорема Чевы:* если для чевиан AA_1; BB_1; CC_1 выполняется равенство *(1)*, то они пересекаются в одной точке *(докажите самостоятельно!)*.

Замечание 2. На ряде несложных по сути задач-примеров продемонстрируем эффективное, изящное, красивое применение *теоремы Чевы*. В дальнейшем *прямую и обратную теорему Чевы* мы будем просто называть *«теоремой Чевы»*.

Задача 1. *Через точку K на медиане AM_1 треугольника ABC проведены чевианы BB_1 и CC_1 (рис.3). При этом оказалось, что $BB_1 = CC_1$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.*

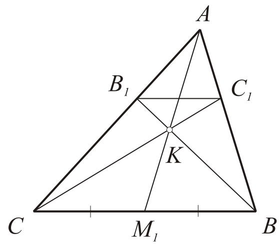


рис.3

Доказательство. Согласно теореме Чевы выполняется равенство: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BM_1}{M_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Так как $BM_1 = CM_1$, то получаем: $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AB_1}{B_1C}$, что означает: $B_1C_1 \parallel BC$ (по *теореме Фалеса*). Тогда BC_1B_1C – трапеция. Но ее диагонали равны по условию: $BB_1 = CC_1$. Значит, она равнобокая и $B = C$. Таким образом, ΔABC – равнобедренный.

Задача 2. *Докажите, что в произвольном треугольнике ABC*
а) три медианы;
б) три биссектрисы
пересекаются в одной точке.

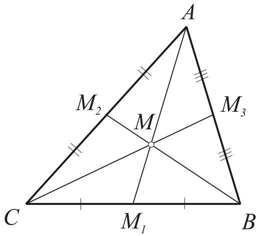


рис.4

Доказательство.

а) Пусть M_1; M_2; M_3 – середины сторон BC, AC и AB соответственно *(рис.4)*. Поскольку $AM_3 = M_3B$; $BM_1 = M_1C$; $CM_2 = M_2A$, то выполняется следующее равенство: $\frac{AM_3}{M_3B} \cdot \frac{BM_1}{M_1C} \cdot \frac{CM_2}{M_2A} = 1$. А это и означает, что медианы AM_1; BM_2; CM_3 пересекаются в одной точке – центроид *M* треугольника *ABC*.

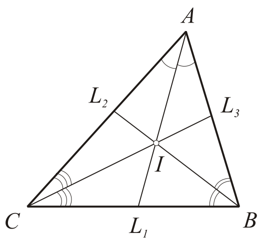


рис.5

б) Проведем биссектрисы AL_1; BL_2; CL_3 в треугольнике *ABC (рис.5)*.

Покажем, что они пересекаются в одной точке – инцентре *I* треугольника *ABC*. Для этого надо показать, согласно *теореме Чевы*, справедливость следующего равенства:

$$\frac{AL_3}{L_3B} \cdot \frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CL_2}{L_2A} = 1 \qquad (4)$$

Но $\dfrac{AL_3}{L_3B}=\dfrac{AC}{BC}$ – по свойству биссектрисы.

Аналогично $\dfrac{BL_1}{L_1C}=\dfrac{AB}{AC}$ и $\dfrac{CL_2}{L_2A}=\dfrac{BC}{AB}$.

Подставив в *(4)*, получим: $\dfrac{AC}{BC}\cdot\dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{BC}{AB}=1$, что и требовалось доказать!

Задача 3 *(Лемма о трапеции). В произвольной трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований принадлежат одной прямой. Докажите!*

Доказательство. Пусть диагонали трапеции *ABCD* *(BC||AD)* пересекаются в точке *Q*. Пусть также $T = AB \cap DC$ *(рис.6)*. Покажем, что *N* – точка пересечения прямых *TQ* и *AD* – является серединой *AD*. По *теореме Чевы* для ΔATD и чевиан *TN; AC* и *DB* имеем:

$\dfrac{TC}{CD}\cdot\dfrac{DN}{NA}\cdot\dfrac{AB}{BT}=1$. Поскольку $\dfrac{TC}{CD}=\dfrac{TB}{BA}$ $(BC \parallel AD)$, то $\dfrac{DN}{NA}=1$, или $DN = NA$. Так как $BC \parallel AD$, где $K = TQ \cap BC$. Лемма о трапеции доказана!

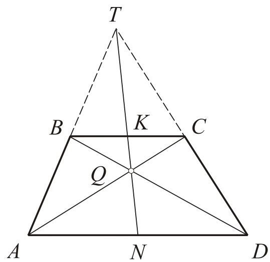


рис.6

Задача 4. *Известно, что в треугольнике ABC медиана AM_1, биссектриса BL_2 и высота CH_3 пересекаются в одной точке. Докажите, что $L_2H_3 \parallel BC$.*

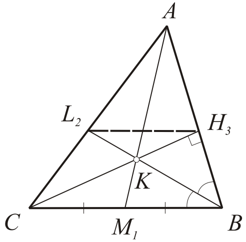


рис.7

Доказательство. Пусть AM_1, BL_2 и CH_3 пересекаются в точке *K (рис.7).* Тогда по *теореме Чевы* справедливо равенство: $\dfrac{AH_3}{H_3B}\cdot\dfrac{BM_1}{M_1C}\cdot\dfrac{CL_2}{L_2A}=1$. Однако $BM_1=M_1C$.

Следовательно, $\dfrac{AH_3}{H_3B}=\dfrac{AL_2}{L_2C}$.

А это и означает, что $L_2H_3 \parallel BC$.

Задача 5. *Три окружности с центрами в точках A, B, C попарно касаются внешним образом в точках K, N, T; как показано на рис.8. Докажите, что отрезки AN, BT и CK пересекаются в одной точке.*

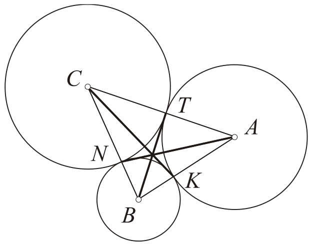


рис.8

Доказательство. Известно, что точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры *(покажите!)* Поэтому точки *A, K, B* принадлежат одной прямой. Аналогично *B, N, C* и также *C, T, A*. Следовательно, *ABC* – треугольник. Если мы докажем, что $\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CT}{TA}=1$, то это и будет означать, что *AN, BT* и *CK* пересекаются в одной точке. Пусть окружности с центрами *A, B, C* имеют радиусы r_1; r_2; r_3 соответственно. Тогда необходимо доказать, что $\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{r_3}{r_1}=1$. А это верно.

Таким образом, *AN; BT* и *CK* пересекаются в одной точке.

Задача 6. *Внутри параллелограмма ABCD на его диагонали BD взята произвольная точка K. Проведены отрезки KN||AB и KT||AD (рис.9). Докажите, что AT и CN пересекаются на диагонали BD.*

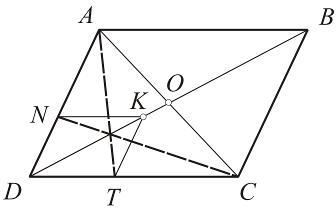


рис.9

Доказательство. Проведем диагональ *AC*. Пусть $O = AC \cap BD$. Чтобы в ΔACD отрезки *AT; CN* и *DO* пересекались в одной точке, необходимо выполнение условия теоремы Чевы: $\frac{AO}{OC}\cdot\frac{CT}{TD}\cdot\frac{DN}{NA}=1$. Так как $AO = OC$ (диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам), то остается доказать справедливость равенства: $\frac{CT}{TD}=\frac{AN}{ND}$. А это верно. Действительно, $\frac{CT}{TD}=\frac{BK}{KD}$ (теорема Фалеса для треугольника *BCD*); в то же время $\frac{AN}{ND}=\frac{BK}{KD}$ (теорема Фалеса для треугольника *ABD*).

Следовательно, прямые *AT* и *CN* пересекаются на диагонали *BD.*

Задача 7. *В треугольник ABC вписана полуокружность ω с центром на стороне BC и касающаяся AB и AC в точках K и N соответственно (рис.10). Докажите, что отрезки BN, CK и висота AH_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке.*

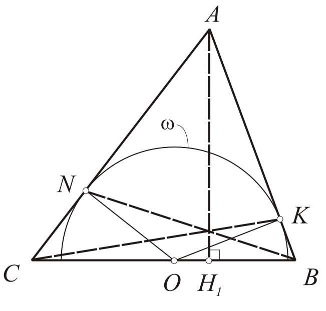


рис.10

Доказательство. Для выполнения требования задачи согласно *теореме Чевы* должно быть выполнено следующее равенство:

$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BH_1}{H_1C}\cdot\frac{CN}{NA}=1$. Поскольку $AK=AN$ (касательные к ω, проведенные из точки A), то остается показать, что $\frac{BH_1}{H_1C}\cdot\frac{CN}{KB}=1$.

Но $BH_1 = AH_1\cdot\mathrm{ctg}B$ (из ΔAH_1B) и $CH_1 = AH_1\cdot\mathrm{ctg}C$ (из ΔAH_1C).

Пусть O – центр полуокружности ω. Тогда $OK = ON = R_\omega$, а $KB = R_\omega \cdot ctg\,B$ (из ΔOKB); $CN = R_\omega \cdot ctg\,C$ (из ΔONC). Следовательно,

$\frac{BH_1}{H_1C}\cdot\frac{CN}{KB}=\frac{AH_1\cdot\mathrm{ctg}B}{AH_1\cdot\mathrm{ctg}C}\cdot\frac{R_\omega\cdot\mathrm{ctg}C}{R_\omega\cdot\mathrm{ctg}B}=1$, что и требовалось показать!

Задача 8. *Построить треугольник ABC по сторонам BC=a, AB=c, если известно, что в этом треугольнике медиана AM_1; биссектриса BL_2 и высота CH_3 пересекаются в одной точке.*

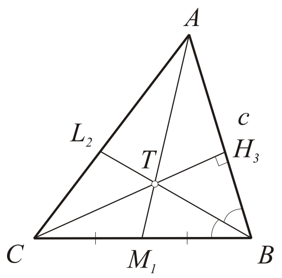


рис.11

Построение. Пусть T – точка пересечения медианы AM_1, биссектрисы BL_2 и высоты CH_3 *(рис.11)*. Тогда по *теореме Чевы* выполняется равенство $\frac{AH_3}{H_3B}\cdot\frac{BM_1}{M_1C}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}=1$. Но $BM_1=M_1C$. Следовательно, справедливо равенство $\frac{AH_3}{H_3B}=\frac{AL_2}{L_2C}$. По свойству биссектрисы $\frac{AL_2}{L_2C}=\frac{c}{a}$, то есть $\frac{AH_3}{H_3B}=\frac{c}{a}$, или

$\frac{c-H_3B}{H_3B}=\frac{c}{a}$ откуда $H_3B=\frac{ac}{a+c}$.

Окружность, построенная на BC как на диаметре, и засечка из точки B раствором циркуля , равным H_3B, дадут точку H_3. Дальнейшее очевидно.

Задача 9. *Дан треугольник ABC. На стороне BC взята точка D такая, что* $\frac{BD}{CD}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^n$*. Постройте на этой же стороне BC точку K такую, что* $\frac{BK}{CK}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^{n+1}$*.*

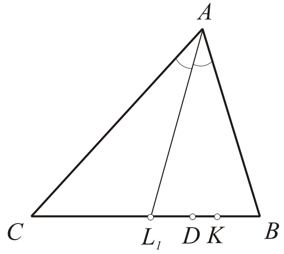


рис.12

Построение. Проведем биссектрису AL_1 в ΔABC *(рис.12)*. Тогда по свойству биссектрисы $\frac{BL_1}{CL_1}=\frac{AB}{AC}$. Запишем требование задачи в таком виде: $\frac{BK}{CK}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^n\cdot\frac{AB}{AC}$. С учетом условия и свойства биссектрисы получим: $\frac{BK}{CK}=\frac{BD}{CD}\cdot\frac{BL_1}{CL_1}$, или $\frac{BD}{CD}\cdot\frac{BL_1}{CL_1}\cdot\frac{CK}{BK}=1$ *(1)*,

что уже согласуется с условием теоремы Чевы. Поскольку все события в задаче происходят на стороне *BC*, то строим равносторонний ΔENT со стороной, равной *BC (рис.13)*.

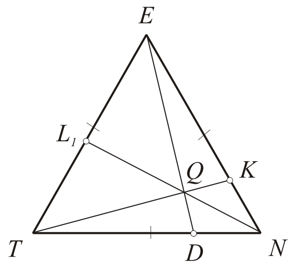


рис.13

На *NT* находим точку *D* согласно условию. На *ET* строим точку L_1 согласно построению *рис.12*. Пусть *ED* и NL_1 пересекаются в точке *Q*. Тогда луч *TQ* согласно условию *(1)* пересекает *EN* в искомой точке *K*. Так как *EN=BC*, то точка *K* построена.

Задача 10. *Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами его соответствующих высот, пересекаются в одной точке.*

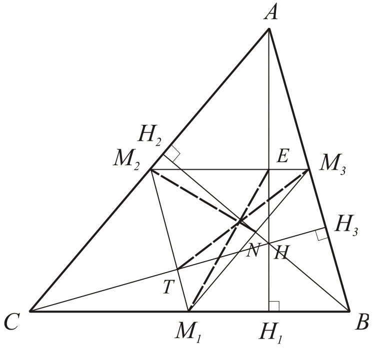


рис.14

Доказательство. Пусть M_1; M_2; M_3 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, а E, N и T – середины соответственно высот AH_1; BH_2; CH_3 в ΔABC *(рис.14)*. Очевидно, точки E, N, T принадлежат соответственно средним линиям M_2M_3; M_1M_3 и M_1M_2 треугольника ABC.

Чтобы M_1E; M_2N и M_3T пересекались в одной точке, необходимо выполнение условия *теоремы Чевы* для треугольника $M_1M_2M_3$:

$$\frac{M_2E}{EM_3}\cdot\frac{M_3N}{NM_1}\cdot\frac{M_1T}{TM_2}=1 \qquad (1)$$

Нетрудно показать с помощью подобия, что

$$\frac{M_2E}{EM_3}=\frac{CH_1}{H_1B};\ \frac{M_3N}{NM_1}=\frac{AH_2}{H_2C}\ \text{ и }\ \frac{M_1T}{TM_2}=\frac{BH_3}{H_3A}\quad \textit{(покажите!)}$$

Тогда равенство *(1)* идентично равенству $\dfrac{AH_2}{H_2C}\cdot\dfrac{CH_1}{H_1B}\cdot\dfrac{BH_3}{H_3A}=1$.

Последнее равенство верно, так как высоты AH_1; BH_2; CH_3 пересекаются в одной точке – ортоцентре H. Значит, верно и равенство *(1)*, что соответствует требованиям задачи.

Задача 11. *Чевианы AA_1; BB_1; CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке Q. Через вершину проведена прямая $l \parallel BC$ (рис.15). Пусть $N = A_1B \cap l$ и $T = A_1C_1 \cap l$. Докажите, что AN=AT.*

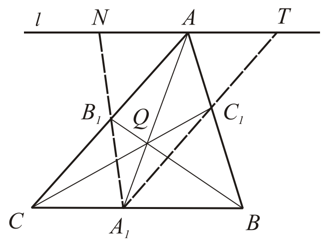


рис.15

Доказательство. Подобие треугольников NB_1A и A_1B_1C дает следующую пропорцию: $\dfrac{AN}{A_1C}=\dfrac{AB_1}{B_1C}$,

откуда $AN = A_1C\cdot\dfrac{AB_1}{B_1C}$ *(1)*

Поскольку также $\Delta AC_1T \sim \Delta BC_1A_1$, то имеем: $\dfrac{AT}{BA_1}=\dfrac{AC_1}{C_1B}$, или $\dfrac{AT}{BA_1}=\dfrac{AC_1}{C_1B}$,

или $AT = BA_1 \cdot \dfrac{AC_1}{C_1B}$ *(2)*

Разделив *(1)* на *(2)*, получим: $\dfrac{AN}{AT}=\dfrac{A_1C}{BA_1}\cdot\dfrac{BC_1}{C_1A}\cdot\dfrac{AB_1}{B_1C}$ *(3)*

Так как правая часть равенства *(3)* равна 1 по *теореме Чевы*, то $\dfrac{AN}{AT}=1$, или $AN=NT$.

Задача 12. *В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке Q. A_1T – перпендикуляр к прямой B_1C_1 (рис.16). Докажите, что TA_1 – биссектриса угла BTC.*

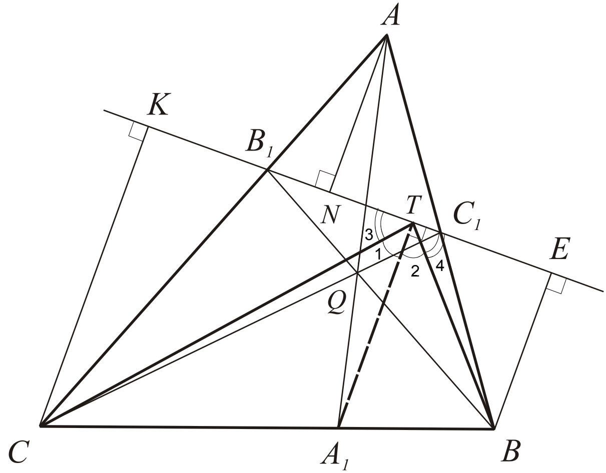


рис.16

Доказательство. Обозначим соответствующие углы цифрами 1; 2; 3; 4. $\angle CTA_1=\angle 1$; $\angle BTA_1=\angle 2$; $\angle CTB_1=\angle 3$ и $\angle BTC_1=\angle 4$. Требование задачи – показать, что $\angle 1=\angle 2$. Если мы покажем, что $\angle 3=\angle 4$, то задача решена, так как $\angle 1=90^\circ-\angle 3$ и $\angle 2=90^\circ-\angle 4$. Итак, докажем, что $\angle 3=\angle 4$. Проведем перпендикуляры *AN, BE* и *CK* к прямой B_1C_1.

Тогда $\frac{AN}{BE}=\frac{AC_1}{C_1B}$ *(1)* – из подобия треугольников ANC_1 и BEC_1,

$\frac{AN}{CK}=\frac{AB_1}{B_1C}$ *(2)* – так как $\Delta ANB_1 \sim \Delta CKB_1$.

Согласно теореме Чевы (AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке Q) имеем:

$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$ или, с учетом *(1)* и *(2)* $\frac{AN}{BE}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CK}{AN}=1$, или $\frac{BE}{CK}=\frac{BA_1}{A_1C}$.

Но по теореме Фалеса $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{ET}{TK}$, откуда $\frac{BE}{CK}=\frac{ET}{TK}$. Таким образом $\Delta BET \sim \Delta CKT$ и $\angle 3=\angle 4$. А значит, $\angle 1=\angle 2$ и TA_1 – биссектриса угла BTC.

Прежде, чем перейти к задачам для самостоятельного решения, сделаем следующие замечания:

Замечание 1. Теорема Чевы остается справедливой и для внешней точки F *(рис.17)*, когда, например, точки A_1 и B_1 лежат на продолжениях сторон BC и AC соответственно (покажите самостоятельно).

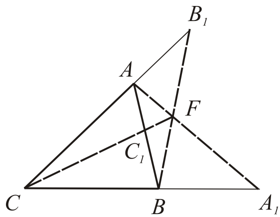


рис.17

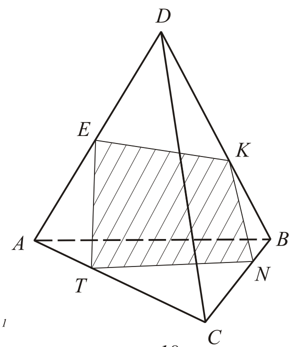


рис.18

Замечание 2. Как и теорема Менелая, теорема Чевы имеет свое стереометрическое обобщение (верное в обе стороны):
Чтобы через точки E; K; N; T, которые лежат соответственно на ребрах DA; DB; BC; AC тетраэдра $DABC$ (или на их продолжениях), необходимо и достаточно выполнение следующего условия: $\frac{DK}{KB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CT}{TA}\cdot\frac{AE}{ED}=1$.

Доказательство пространственного обобщения *теоремы Чевы* можно найти, например, в [7].

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 13. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон со вписанной окружностью, пересекаются в одной точке (*точке Жергонна*).

Задача 14. Докажите, что отрезки, проходящие через вершины треугольника и делящие его периметр пополам, пересекаются в одной точке (*точке Нагеля*).

Задача 15. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке Q. $K = AB \cap CD$, а N – середина AD. Известно, что точки $K; Q; N$ лежат на одной прямой. Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

Задача 16. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. $K = BO \cap AC$ и $N = CO \cap AB$. При этом оказалось, что $AK = AN$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

Задача 17. Дан прямоугольный треугольник ABC ($C = 90°$). На катетах AC и AB во внешнюю сторону построены квадраты $ACDN$ и $CBTK$. Докажите, что BN и AT пересекаются на высоте CH_3 треугольника ABC.

Задача 18. Известно, что в треугольнике ABC высота AH_1, биссектриса BL_2 и медиана CM_3 пересекаются в одной точке.

Докажите, что $\operatorname{tg} B = \dfrac{\sin A}{\cos C}$.

Задача 19. Пусть Q – произвольная точка на высоте AH_1 треугольника ABC. Пусть также $K = BH \cap AC$ и $N = CH \cap AB$. Докажите, что H_1K и H_1N образуют равные углы с высотой AH_1.

Задача 20. Стороны AB и BC разделены на три равные части каждая ($AK = KN = NB$ и $BD = DE = EC$). Пусть $F = AE \cap CK$ и $T = AD \cap CN$. Докажите, что точки $B; T; F$ и M_2 (середина AC) принадлежат одной прямой.

Задача 21. Три касательные к окружности образуют треугольник. Докажите, что прямые, соединяющие вершины этого треугольника с точками касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

Задача 22. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отложили отрезок $BN = AC$. Докажите, что в треугольнике ACN медиана CE, биссектриса AF и высота NT пересекаются в одной точке.

Задача 23. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке (медиана тетраэдра – это отрезок, соединяющий его вершину с центроидом противоположной грани).

Глава 20

Чева «со звездочкой»

Ниже вниманию читателей будут предложены несколько более сложные задачи с применением *теоремы Чевы*. Хотя вопрос о том, сложна или не очень та или иная задача, остается достаточно субъективным…

Задача 1. *Докажите теорему Чевы в ее тригонометрической форме:*

$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1$ *(рис.1).*

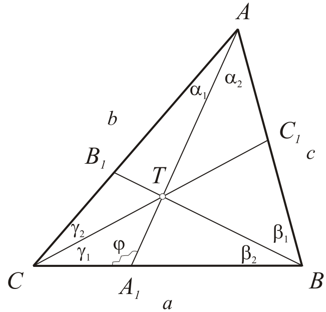


рис.1

Доказательство. Пусть стороны *BC, AC* и *AB* треугольника *ABC* соответственно равны *a; b; c*, а чевианы AA_1; BB_1; CC_1 пересекаются в точке *T*. По теореме синусов для ΔACA_1 получаем:

$$\frac{CA_1}{\sin\alpha_1}=\frac{b}{\sin\varphi} \qquad (1)$$

По той же теореме для ΔABA_1:

$$\frac{A_1B}{\sin\alpha_2}=\frac{c}{\sin(180^\circ-\varphi)} \qquad (2)$$

Из *(1)* и *(2)* следует, что $\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{b\sin\alpha_1}{c\sin\alpha_2}$ *(3)*

Аналогичным образом получим: $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{c\sin\beta_1}{a\sin\beta_2}$ *(4)*

и $\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{a\sin\gamma_1}{b\sin\gamma_2}$ *(5)*

Перемножив левые и правые части равенств *(3); (4); (5),* получим:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}.$$

Поскольку левая часть последнего равенства равна 1 *(теорема Чевы)*, то получаем требуемое: $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1$.

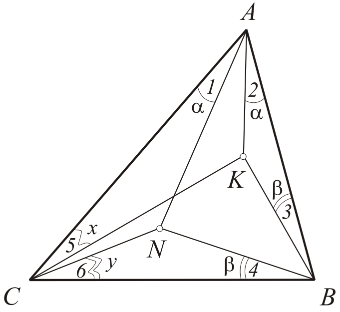


рис.2

Задача 2. *Внутри треугольника ABC находятся точки K и N такие, что* $\angle 1 = \angle 2$ *;* $\angle 3 = \angle 4$ *(рис.2). Докажите, что* $\angle 5 = \angle 6$ *.*

Доказательство. Пусть $\angle 1 = \angle 2 = \alpha$; $\angle 3 = \angle 4 = \beta$; $\angle 5 = x$ и $\angle 6 = y$.

Для чевиан *AK, BK, CK тригонометрическая форма теоремы Чевы* запишется так:

$$\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(B-\beta)}\cdot\frac{\sin(C-x)}{\sin x}=1 \qquad (1)$$

Аналогично для чевиан *AN, BN, CN*:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin(B-\beta)}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin y}{\sin(C-y)}=1 \qquad (2)$$

Перемножив левые и правые части равенств *(1)* и *(2)*, получим:

$\dfrac{\sin(C-x)}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin y}{\sin(C-y)}=1$, или $\sin x\cdot\sin(C-y)=\sin y\cdot\sin(C-x)$.

Превратив произведения синусов в сумму, после сокращения получим:

$\cos(x+C-y)=\cos(y+C-x)$, откуда $x=y$.

Задача 3. *Дан равнобедренный треугольник ABC с углом* $A=110^\circ$ *. Внутри него находится точка T такая, что* $\angle TBC = 30^\circ$ *;* $\angle TCB = 25^\circ$ *. Найдите величину* $\angle ATC = \varphi$ *.*

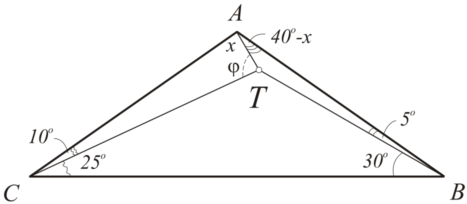


рис.3

Решение. Пусть $\angle TAC = x$, тогда $\angle TAB = 110^\circ - x$ *(рис.3)*. Очевидно, $\angle TBA = 5^\circ$ и $\angle TCA = 10^\circ$. Согласно *тригонометрической форме теоремы Чевы* для чевиан *AT, BT* и *CT* имеем: $\dfrac{\sin x}{\sin(110^\circ - x)}\cdot\dfrac{\sin 5^\circ}{\sin 30^\circ}\cdot\dfrac{\sin 25^\circ}{\sin 10^\circ}=1$. С учетом того, что $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ и $\sin 10^\circ = 2\sin 5^\circ\cdot\cos 5^\circ$,

получим: $\sin x\cdot\sin 25^\circ = \sin(110^\circ - x)\cdot\cos 5^\circ$, или

$$\frac{1}{2}(\cos(x-25°)-\cos(x+25°))=\frac{1}{2}(\sin(115°-x)+\sin(105°-x)).$$

Поскольку $\sin(115°-x)=\cos(25°-x)=\cos(x-25°)$, а $\sin(105°-x)=\cos(15°-x)$, получим следующее равенство: $\cos(x+25°)+\cos(15°-x)=0$, или $2\cos 20°\cdot\cos(x+5°)=0$, откуда $x=85°$.

Тогда из ΔATC: $\varphi=180°-85°-10°=85°$.

Задача 4. *Дан треугольник ABC со следующими углами:* $A=50°$; $B=60°$; $C=70°$. *Точка T внутри треугольника ABC такова, что* $\angle ATB=110°$; $\angle BTC=130°$. *Найдите величину угла TBC.*

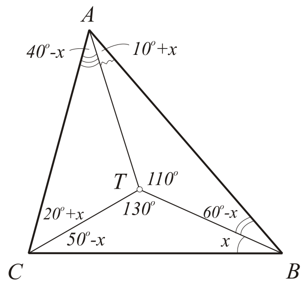


рис.4

Решение. Обозначим искомый $\angle TBC$ через x *(рис.4)*. Нетрудно тогда подсчитать, что $\angle TBA=60°-x$; $\angle TAB=10°+x$; $\angle TAC=40°-x$; $\angle TCA=20°+x$ и $\angle TCB=50°-x$.

Тригонометрическая форма теоремы Чевы для чевиан *AT*, *BT*, *CT* будет в таком случае выглядеть так:

$$\frac{\sin(40°-x)}{\sin(10°+x)}\cdot\frac{\sin(60°-x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin(50°-x)}{\sin(20°+x)}=1 \qquad (1)$$

При этом, очевидно, искомый угол $x<40°$ (точка T внутри треугольника и $\angle TAC=40°-x$). Согласно равенству *(1)* имеем:

$$\sin(40°-x)\cdot\sin(60°-x)\cdot\sin(50°-x)=\sin x\cdot\sin(10°+x)\cdot\sin(20°+x) \qquad (2)$$

Нетрудно заметить, что левая часть равенства *(2)* является убывающей функцией, а правая – возрастающей. Следовательно, уравнение *(2)* имеет не более одного решения. Его можно подобрать: $x=20°$.

Задача 5. *Из точки A вне окружности ω проведены AB и AC – касательные к ней. А также произвольные секущие* $A-D-E$ *и* $A-K-N$ *(рис.5). Докажите, что DN, KE и BC пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Обозначим цифрами от 1 до 6 соответствующие углы на *рис.5*.

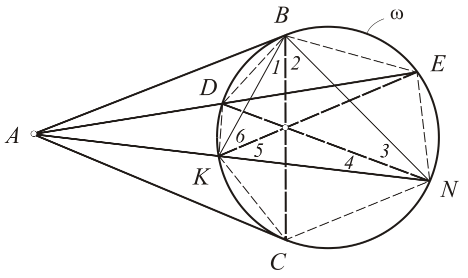


рис.5

Если для ΔBNK будет выполнена *тригонометрическая форма* теоремы Чевы:

$$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}\cdot\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4}\cdot\frac{\sin\angle 5}{\sin\angle 6}=1 \qquad (1),$$

то это и будет означать, что DN, KE и BC пересекаются в одной точке. Заметим, что синусы указанных углов пропорциональны соответствующим хордам.

Действительно, $KC = 2R_\omega\cdot\sin\angle 1$; $CN = 2R_\omega\cdot\sin\angle 2$ и так далее. Тогда доказать равенство *(1)* – это все равно, что доказать равенство

$$\frac{KC}{CN}\cdot\frac{BD}{DK}\cdot\frac{EN}{BE}=1 \qquad (2)$$

Покажем, что равенство *(2)* верно.

Так как $\Delta ABD \sim \Delta AEB$ (по двум углам), то $\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{AB}{AE}$ *(3)*

Аналогично $\Delta ACK \sim \Delta ANC$ и $\dfrac{KC}{CN}=\dfrac{AK}{AC}$ *(4)*

Из подобия ΔAEN и ΔAKD получим: $\dfrac{EN}{DK}=\dfrac{AE}{AK}$ *(5)*

Перемножив левые и правые части равенств *(3); (4); (5)* и учтя то, что $AC = AB$ (касательные к ω), получим требуемое: $\dfrac{KC}{CN}\cdot\dfrac{BD}{DK}\cdot\dfrac{EN}{BE}=1$.

Задача 6. *Пользуясь только линейкой, из точки A вне окружности ω проведите касательную к ней.*

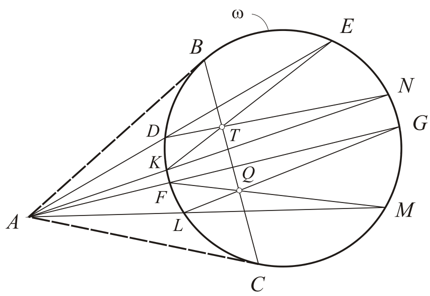


рис.6

Решение. Воспользовавшись результатом *задачи 5*, нам не составит труда это сделать.

Проведем сначала две пары произвольных секущих ($A-D-E$ и $A-K-N$); ($A-F-G$ и $A-L-M$). Затем через точки T и Q пересечения соответствующих хорд проведем прямую, пересекающую окружность ω в точках B и C *(рис.6)*. AB и AC – искомые касательные.

Задача 7. *В остроугольном треугольнике ABC высота* AH_1*; биссектриса* BL_2 *и медиана* CM_3 *пересекаются в одной точке. Докажите, что* $B > 45°$*.*

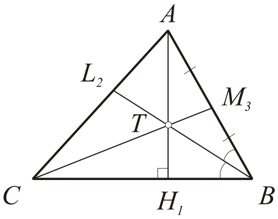


рис.7

Доказательство. Пусть AH_1; BL_2 и CM_3 пересекаются в точке *T (рис.7)*. Тогда по *теореме Чевы* имеем: $\frac{AM_3}{M_3B}\cdot\frac{BH_1}{H_1C}\cdot\frac{CL_2}{L_2A}=1$.

Но $AM_3 = M_3B$; $\frac{CL_2}{L_2A}=\frac{BC}{AB}$ (по свойству биссектрисы), и $BH_1 = AB\cdot\cos B$ (из ΔABH_1) и $CH_1 = AC\cdot\cos C$ (из ΔACH_1).

Получаем: $\frac{AB\cdot\cos B}{AC\cdot\cos C}\cdot\frac{BC}{AB}=1$. Учитывая, что $BC = 2R\cdot\sin A$ и $AC = 2R\cdot\sin B$, получим следующее: $\sin A\cdot\cos B=\sin B\cdot\cos C$, или $\operatorname{tg}B=\frac{\sin A}{\cos C}$.

Пусть $\operatorname{tg}B<1$. Тогда $\sin A<\cos C$, или $\sin A<\sin(90°-C)$. Так как функция синус при острых углах возрастает, то $A<90°-C$, или $A+C<90°$. Значит, $B>90°$; что противоречит условию (ΔABC – остроугольный). Следовательно, наше допущение неверно и $\operatorname{tg}B>1$, то есть $B>45°$.

Задача 8. *Из произвольной точки T внутри треугольника ABC проведены перпендикуляры TD, TE и TF соответственно к сторонам BC, AC и AB (рис.8).* A_1 *– середина TA,* A_2 *– середина EF. Аналогично получены точки* B_1 *и* B_2*;* C_1 *и* C_2*. Докажите, что прямые* A_1A_2*,* B_1B_2 *и* C_1C_2 *пересекаются в одной точке.*

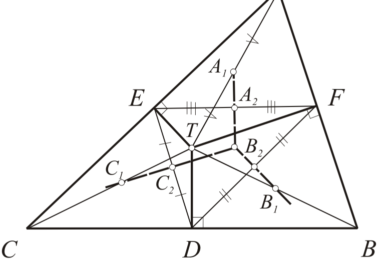


рис.8

Доказательство. *TA* – диаметр окружности, описанной около четырехугольника *AETF* ($\angle AET=\angle AFT=90°$). Значит, A_1 – центр этой окружности. Тогда A_1A_2 – серединный перпендикуляр к *EF*. Аналогично B_1B_2 и C_1C_2 – серединные перпендикуляры к *FD* и *DE* соответственно. А серединные перпендикуляры к сторонам ΔDEF пересекаются в одной точке – центре описанной около этого треугольника окружности.

Задача 9. *Чевианы AD; BE; CF треугольника ABC пересекаются в точке T внутри треугольника. Докажите, что площадь S_T чевианного треугольника DEF вычисляется по формуле $S_T = \dfrac{xyz}{2R}$, где R – радиус описанной окружности ΔABC; $AF = x$; $BD = y$; $CE = z$ (рис.9).*

Доказательство. Введем следующие обозначения:
$BC = a$; $AC = b$; $AB = c$; $BF = n$; $DC = k$; $EA = t$.

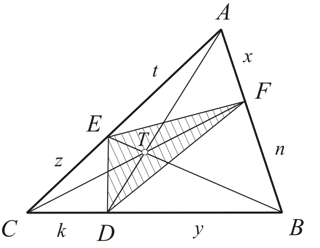


рис.9

Очевидно, $xyz = nkt$ (1) – по *теореме Чевы.*

Пусть также $S_{ABC} = S$; $S_{AEF} = S_1$; $S_{BFD} = S_2$ и $S_{DCE} = S_3$. При этом $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{xt}{bc}$ (треугольники AEF и ABC имеют общую вершину A). Аналогично
$\dfrac{S_2}{S} = \dfrac{ny}{ac}$ и $\dfrac{S_3}{S} = \dfrac{kz}{ab}$. Тогда $S_T = S\left(1 - \dfrac{xt}{bc} - \dfrac{ny}{ac} - \dfrac{kz}{ab}\right) = S\left(\dfrac{abc - axt - bny - ckz}{abc}\right)$.

Поскольку $a = k + y$; $b = z + t$ и $c = x + n$, находим значение выражения $abc - axt - bny - ckz$. После упрощений получаем:
$abc - axt - bny - ckz = xyz + nkt = 2xyz$ – с учетом равенства *(1)*. Итак,
$S_T = S \cdot \dfrac{2xyz}{abc}$. С учетом формулы $S = \dfrac{abc}{4R}$ получаем требуемое: $S_T = \dfrac{xyz}{2R}$.

Задача 10. *$AL_1; BL_2; CL_3$ – биссектрисы в треугольнике ABC. $K = BL_2 \cap L_1L_3$ и $N = CL_3 \cap L_1L_2$ (рис.10). Докажите, что биссектриса угла A треугольника ABC является также биссектрисой $\angle NAK$, или что $x = y$.*

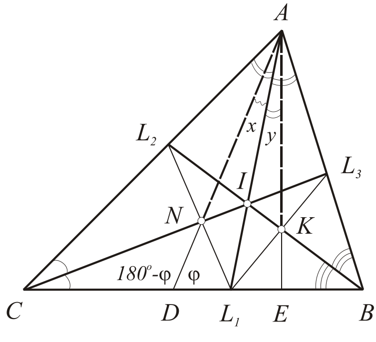


рис.10

Доказательство. Пусть лучи AN и AK пересекают сторону BC соответственно в точках D и E. Пусть также $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$ и $AL_1 = l_a$. Обозначим $\angle ADB = \varphi$, тогда $\angle ADC = 180° - \varphi$. По теореме синусов для ΔADL_1 имеем: $\dfrac{DL_1}{\sin x}=\dfrac{l_a}{\sin\varphi}$, откуда $\sin x=\dfrac{DL_1\cdot\sin\varphi}{l_a}$ *(1)*

По этой же теореме для ΔACD: $\dfrac{CD}{\sin\left(\dfrac{A}{2}-x\right)}=\dfrac{b}{\sin\left(180^\circ-\varphi\right)}$, откуда

$$\sin\left(\frac{A}{2}-x\right)=\frac{CD\cdot\sin\varphi}{b} \qquad (2)$$

Разделив *(1)* на *(2)*, получим:

$$\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{A}{2}-x\right)}=\frac{DL_1}{CD}\cdot\frac{b}{l_a} \qquad (3)$$

По теореме Чевы для ΔACL_1: $\dfrac{DL_1}{CD}\cdot\dfrac{CL_2}{L_2A}\cdot\dfrac{AI}{IL_1}=1$. С учетом того, что $\dfrac{CL_2}{L_2A}=\dfrac{a}{c}$

(свойство биссектрисы), получим $\dfrac{DL_1}{CD}=\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{IL_1}{AI}$ *(4)*

Подставим *(4)* в *(3)*. Тогда $\dfrac{\sin x}{\sin\left(\dfrac{A}{2}-x\right)}=\dfrac{bc}{al_a}\cdot\dfrac{IL_1}{AI}$ *(5)*

Аналогично записав теоремы синусов для ΔAEL_1 и ΔABE, а также *теорему Чевы* для ΔABL_1, получим: $\dfrac{\sin y}{\sin\left(\dfrac{A}{2}-y\right)}=\dfrac{bc}{al_a}\cdot\dfrac{IL_1}{AI}$ *(6)*

Тогда из *(5)* и *(6)* следует: $\dfrac{\sin x}{\sin\left(\dfrac{A}{2}-x\right)}=\dfrac{\sin y}{\sin\left(\dfrac{A}{2}-y\right)}$.

Рассмотрим функцию $f(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\alpha)}$.

$$f`(\alpha)=\frac{\cos\alpha\cdot\sin(\varphi-\alpha)-\cos(\varphi-\alpha)\cdot(-1)\sin\alpha}{\sin^2(\varphi-\alpha)}=\frac{\sin\varphi}{\sin^2(\varphi-\alpha)}.$$

Так как $0<\varphi<180^\circ$, то $\sin\varphi>0$ и $f`(\alpha)>0$.

Таким образом, функция $f(\alpha)$ строго возрастает и, следовательно, достигает каждого своего значения только при одном и том же значении α.

Значит, $x = y$, что и требовалось доказать!..

Задача 11. *Дан треугольник ABC со сторонами a, b, c. Через произвольную точку внутри него проводятся чевианы* $AA_1; BB_1; CC_1$. *Найдите среди этих точек точку T такую, для которой произведение* $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1$ *было бы максимальным (рис.11).*

Решение. По *теореме Чевы* $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A$ *(1)*

Согласно *неравенству Коши* $\sqrt{AC_1 \cdot C_1B} \le \dfrac{AC_1 + C_1B}{2} = \dfrac{c}{2}$ *(2)*

Аналогично,

$$\sqrt{BA_1 \cdot A_1C} \le \frac{BA_1 + A_1C}{2} = \frac{a}{2} \qquad (3)$$

$$\sqrt{CB_1 \cdot B_1A} \le \frac{CB_1 + B_1A}{2} = \frac{b}{2} \qquad (4)$$

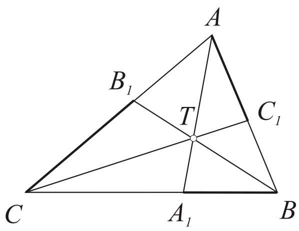


рис.11

Перемножив левые и правые части неравенств *(2); (3); (4),* с учетом равенства *(1)* получим: $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 \le \dfrac{abc}{8}$. Очевидно, равенство будет иметь место, когда точки $A_1; B_1; C_1$ будут совпадать с серединами соответствующих сторон. Тогда точка T совпадет с центром треугольника ABC ($T \equiv M$). При этом само максимальное значение произведения $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1$ будет равно $\dfrac{abc}{8}$.

Несколько задач «со звездочкой» (на наш взгляд) с применением теоремы Чевы предложим решить самостоятельно.

Задача 12. Докажите, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке (*симедианой* называется прямая, симметричная медиане треугольника относительно биссектрисы того же угла).

Задача 13. В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB* = *AC*) угол *A* равен $80°$. Внутри ΔABC взята точка *T* такая, что $\angle TBC = 30°$, а $\angle TCB = 10°$. Найдите величину угла *ATC*.

Задача 14. *ABCDEF* – вписанный в окружность шестиугольник. Известно, что выполняется равенство: $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$. Докажите, что в таком случае *AD, BE* и *CF* пересекаются в одной точке.

Задача 15. *D* – точка на гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC*. O_1 и O_2 – соответственно центры описанных окружностей треугольников *ACD* и *BCD*. Пусть $N = AO_2 \cap BO_1$. Докажите, что $\angle BCN = \angle ACD$.

Задача 16. В треугольник *ABC* вписана окружность. На ее радиусах, проведенных в точке касания, взяты точки на равных расстояниях от центра и соединены с противоположными вершинами. Докажите, что три получившиеся таким образом прямые пересекаются в одной точке.

Задача 17. *ABCD* – выпуклый четырехугольник с равными углами *B* и *D*. $AK \perp BC$ ($K \in BC$) и $AN \perp CD$ ($N \in CD$). $T = DK \cap BN$. Докажите, что $AT \perp KN$.

Задача 18. Через произвольную точку внутри треугольника *ABC* проводятся чевианы $AA_1; BB_1; CC_1$. Докажите, что площадь чевианного $\Delta A_1B_1C_1$ не превышает $\frac{1}{4}$ площади треугольника *ABC*.

Задача 19 ***(теорема Максвелла).*** Внутри треугольника *ABC* взята произвольная точка *T*. Построен треугольник *DEF* со сторонами, параллельными отрезкам *TA, TB, TC*. Через вершины треугольника *DEF* проведены прямые параллельно сторонам треугольника *ABC*. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

Задача 20. Точка *T* внутри треугольника *ABC* такова, что $\angle ATB - C = \angle ATC - B$. Пусть I_1 и I_2 – соответственно центры окружностей, вписанных в треугольники *ABT* и *ACT*. Докажите, что прямые *AT;* BI_1 и CI_2 пересекаются в одной точке.

Глава 21

Чева и Менелай. Чева и Ван-Обель

Помимо того, что *теорема Чевы* имеет широкое применение, сильна сама по себе, она бывает весьми эффективна, «работая» в паре с либо с *теоремой Менелая*, либо с *теоремой Ван-Обеля*. Продемонстрируем это.

Теорема Чевы и Менелая вместе

Задача 1. *Дан треугольник ABC с проведенной в нем внутренней биссектрисой AL_1. Наименьшим числом линий постройте точку Q – основание внешней биссектрисы угла A.*

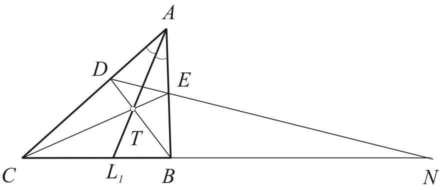


рис.1

<u>Решение</u>. Через произвольную точку T биссектрисы AL_1 проведем чевианы BD и CE *(рис.1)*. Пусть прямые DE и CB пересекаются в точке N. Покажем, что $N \equiv Q$. Согласно *теореме Чевы* справедливо равенство:

$$\frac{CL_1}{L_1B} \cdot \frac{BE}{EA} \cdot \frac{AD}{DC} = 1 \qquad (1)$$

В то же время по *теореме Менелая* для треугольника ABC и секущей $D - E - N$ имеем:

$$\frac{CN}{NB} \cdot \frac{BE}{EA} \cdot \frac{AD}{DC} = 1 \qquad (2)$$

Из равенств *(1)* и *(2)* следует, что $\frac{CL_1}{L_1B} = \frac{CN}{NB}$.

Но по свойству точки Q – основания внешней биссектрисы угла A – выполняется равенство: $\frac{CL_1}{L_1B} = \frac{CQ}{QB}$.

Следовательно, $N \equiv Q$ и для построения точки Q, нам достаточно *четырех линий*: 1) BD – произвольно и $T = BD \cap AL_1$; 2) CE (через точку T); 3) прямая DE; 4) продолжение CB пересекает прямую DE в искомой точке Q.

Задача 2. *CB – хорда в окружности ω. Точка K – середина дуги CB (рис.2). Пользуясь только линейкой, разделите хорду BC пополам.*

Решение. Проведем произвольную хорду KA (точки K и A находятся по разные стороны от BC). Соединим A с точками B и C. Очевидно, AK совпадает с биссектрисой $\angle BAC$ (так как $\cup CK = \cup BK$). Тогда точно так же, как в *задаче 1*, строим точку Q – основание внешней биссектрисы угла A (BD, где $T = BD \cap AK$; CE через точку T и, наконец, $Q = DE \cap CB$). Соединим Q и A. Тогда $\angle QAK = 90°$ (угол между биссектрисами смежных углов). Продолжим QA до пересечения с ω в точке F. Поскольку $\angle KAF = 90°$, то KF – диаметр окружности ω. Очевидно, $FK \perp BC$. Значит, FK делит хорду BC пополам.

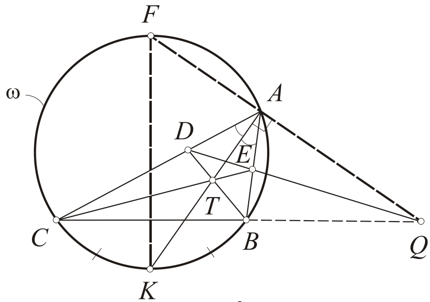


рис.2

Задача 3. *K – произвольная точка на стороне BC треугольника ABC. AD и AE – биссектрисы в треугольниках CAK и BAK соответственно. На луче AK за точку K взята точка T.* $F = TD \cap AC$ *и* $G = TE \cap AB$. $Q = BF \cap CG$ (рис.3). *Докажите, что точка* Q *лежит на биссектрисе угла* A *треугольника* ABC.

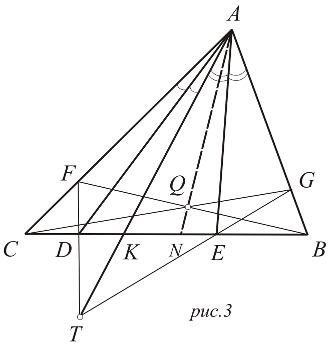


рис.3

Доказательство. По *теореме Менелая* для ΔACK и секущей $F - D - T$ получаем:

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CD}{DK} \cdot \frac{KT}{TA} = 1, \text{ откуда}$$

$$\frac{CF}{FA} = \frac{CD}{DK} \cdot \frac{KT}{TA} \qquad (1)$$

Вновь по *теореме Менелая* для ΔABK и секущей $G - E - T$: $\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BE}{BK} \cdot \frac{KT}{TA} = 1$, откуда

$$\frac{AG}{GB} = \frac{TA}{KT} \cdot \frac{EK}{BE} \qquad (2)$$

Пусть $N = AQ \cap BC$. Тогда согласно *теореме Чевы* для ΔABC имеем:

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \qquad (3)$$

Подставим значения *(1)* и *(2)* в равенство *(3)*.

С учетом того, что $\dfrac{CD}{DK}=\dfrac{AC}{AK}$ и $\dfrac{EK}{BE}=\dfrac{AK}{AB}$ (свойство биссектрисы для ΔCAK и ΔBAK соответственно), получим: $\dfrac{BN}{NC}=\dfrac{AB}{AC}$.

Последнее равенство означает: AN – биссектриса в ΔABC.
Следовательно, точка Q принадлежит биссектрисе угла A треугольника ABC.

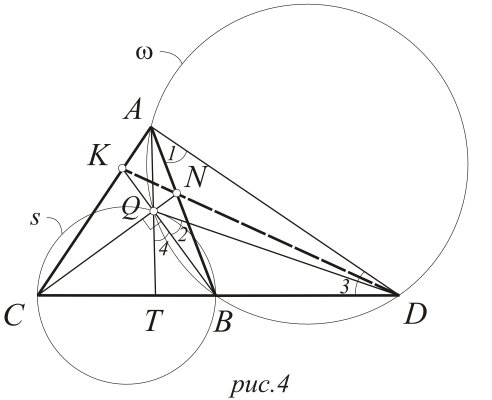


рис.4

Задача 4. *Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжении стороны CB за точку B взяли точку D такую, что* $BD=AB$. *Около* ΔABD *описали окружность ω. На BC как на диаметре построили окружность s. Окружности ω и s вторично пересекаются в точке Q (рис.4).* $K=BQ\cap AC$ *и* $N=CQ\cap AB$. *Докажите, что точки K, N и D принадлежат одной прямой.*

<u>Доказательство</u>. Пусть $T=AQ\cap BC$. Тогда по *теореме Чевы* для ΔABC:

$$\frac{CK}{KA}\cdot\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BT}{TC}=1 \qquad (1)$$

Чтобы точки K, N и D лежали на одной прямой, необходимо выполнение *обратной теореме Менелая* для ΔACD и трех точек K, N и D, то есть должно выполняться равенство: $\dfrac{CK}{KA}\cdot\dfrac{AN}{NB}\cdot\dfrac{BD}{DC}=1$ *(2)*

Или, с учетом равенства *(1)*: $\dfrac{BT}{TC}=\dfrac{BD}{DC}$, или $\dfrac{BD}{BT}=\dfrac{DC}{TC}$ *(3)*

Для этого надо доказать, что QB – внутренняя биссектриса $\angle TQD$. Тогда QC будет внешней биссектрисой ($\angle BQC=90^\circ$ – вписанный, опирается на диаметр) и окружность s будет *окружностью Аполлония* для ΔTQD. Пусть $\angle 1=\angle 2=\alpha$ – вписанные в окружность ω, опираются на одну дугу. Тогда и $\angle 3=\alpha$ ($AB=BD$ – по условию). Поскольку четырехугольник $AQBD$ вписан в ω, то $\angle AQB=180^\circ-\alpha$ А смежный с ним $\angle 4=\alpha$. Итак, $\angle 2=\angle 4=\alpha$ и QB – биссектриса в ΔTQD.

Тем самым доказана принадлежность точек K; N; D одной прямой.

Задача 5. *Окружность ω описана около треугольника ABC. Вписанная в этот треугольник окружность s касается его сторон BC, AC и AB соответственно в точках K_1; K_2; K_3 (рис.5).* $N = K_2K_3 \cap BC$ *и* Q *– середина* NK_1. *Докажите, что отрезки касательных из точки* Q *к окружностям* ω *и* s *равны.*

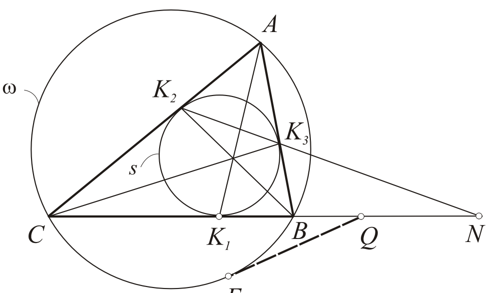


рис.5

Доказательство. Известно, что отрезки AK_1; BK_2; CK_3 пересекаются в одной точке *(точке Жергонна)*. Поэтому согласно *теореме Чевы* для ΔABC:

$$\frac{AK_3}{K_3B}\cdot\frac{BK_1}{K_1C}\cdot\frac{CK_2}{K_2A}=1 \qquad (1)$$

По *теореме Менелая* для ΔABC и секущей K_2-K_3-N имеем:

$$\frac{AK_3}{K_3B}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CK_2}{K_2A}=1 \qquad (2)$$

Из *(1)* и *(2)* получаем: $\dfrac{BN}{NC}=\dfrac{BK_1}{K_1C}$ или $\dfrac{BN}{K_1B}=\dfrac{NC}{K_1C}$ *(3)*

Далее: $NB = NQ + QB = K_1Q + QB = K_1B + 2QB$,

откуда $QB = \dfrac{NB - K_1B}{2}$ *(4)*

$NC = QC + QN = QC + QK_1 = QC + QC - K_1C = 2QC - K_1C$,

откуда $QC = \dfrac{NC + K_1C}{2}$ *(5)*

Аналогично получаем: $QK_1 = \dfrac{NB + K_1B}{2}$ *(6)*

и $QK_1 = \dfrac{NC - CK_1}{2}$ *(7)*

Разделим *(4)* на *(6)* и получим: $\dfrac{QB}{QK_1} = 1 - \dfrac{2}{\dfrac{NB}{K_1B}+1}$.

Разделим *(7)* на *(5)*: $\dfrac{QK_1}{QC} = 1 - \dfrac{2}{\dfrac{NC}{K_1C}+1}$.

С учетом равенства *(3)* получаем, что правые части последних двух равенств равны. Значит, $\frac{QB}{QK_1} = \frac{QK_1}{QC}$, или $QK_1^2 = QB \cdot QC$ *(8)*

Пусть QE – касательная из точки Q к окружности ω. Тогда по *теореме о квадрате касательной*: $QE^2 = QB \cdot QC$ *(9)*

Из *(8)* и *(9)* следует, что $QK_1 = QE$, что и требовалось доказать!..

Теорема Чевы и Ван-Обеля

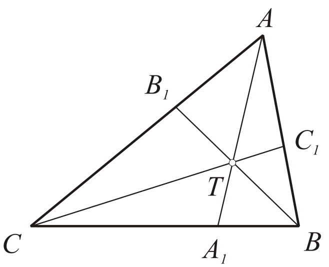


рис.6

Напомним формулировку *теоремы Ван-Обеля* бельгийского математика XIX столетья.

Пусть чевианы AA_1; BB_1; CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке T (рис.6). Тогда справедливо равенство: $\frac{AT}{TA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}$.

(Докажите самостоятельно!)

Задача 6. *На сторонах BC и AB треугольника ABC взяты соответственно точки N и Q такие, что* $BN : CN = 6 : 5$ *и* $AQ : BQ = 2 : 3$. *AN и CQ пересекаются в точке T (рис.7). Найдите отношение* $\frac{AT}{TN}$.

<u>Решение</u>. Пусть $K = BT \cap AC$. По *теореме Чевы*

$\frac{AK}{KC} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BQ}{QA} = 1$, или $\frac{AK}{KC} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} = 1$, откуда

$\frac{AK}{KC} = \frac{4}{5}$. Согласно *теореме Ван-Обеля*

$\frac{AT}{TN} = \frac{AK}{KC} + \frac{AQ}{QB}$; $\frac{AT}{TN} = \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{22}{15}$.

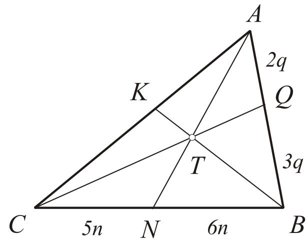


рис.7

Задача 7. *На стороне BC треугольника ABC взята точка N такая, что $3BN = CN$. В каком отношении прямая AN делит медиану BM_2?*

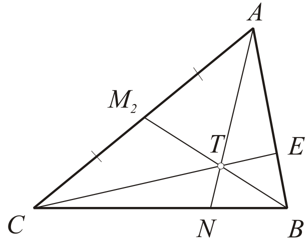


рис.8

Решение. Пусть AN и BM_2 пересекаются в точке T *(рис.8)*. Пусть также $E = CT \cap AB$.
Запишем *теорему Чевы* для треугольника ABC и чевиан AN; BM_2; CE: $\frac{AE}{BE} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CM_2}{M_2A} = 1$, или

$\frac{AE}{BE} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = 1$, откуда $\frac{AE}{BE} = \frac{3}{1}$, а $\frac{BE}{AE} = \frac{1}{3}$.

Тогда по *теореме Ван-Обеля* получаем:

$$\frac{BT}{TM_2} = \frac{BE}{AE} + \frac{BN}{CN} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Задача 8. *На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E такие, что $AD : DB = 1 : 2$ и $AE : EC = 2 : 1$. T – точка пересечения BE и CD (рис.9). Найдите отношение площадей треугольников ATB и ABC.*

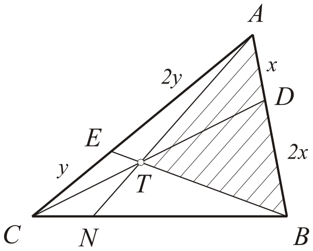


рис.9

Решение. По *теореме Ван-Обеля* находим:

$$\frac{AT}{TN} = \frac{AE}{EC} + \frac{AD}{DB} = \frac{2}{1} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Значит, $S_{NTB} = \frac{2}{5} S_{ATB}$ (основания TN и AT в этих треугольниках относятся, как 2:5, а высота у них общая). Тогда $S_{ANB} = \frac{7}{5} S_{ATB}$. *Теорема Чевы* поможет найти отношение $BN : NC$. Действительно, $\frac{BN}{NC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$, или

$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$, откуда $\frac{BN}{NC} = \frac{4}{1}$. Значит, $\frac{BN}{BC} = \frac{4}{5}$.

Поскольку $\frac{S_{ANB}}{S_{ABC}} = \frac{4}{5}$ (основания относятся, как $4 : 5$, и высота – общая), то

имеем: $\frac{\frac{7}{5} S_{ATB}}{S_{ABC}} = \frac{4}{5}$, откуда $\frac{S_{ATB}}{S_{ABC}} = \frac{4}{7}$.

Задача 9. *Медиана AM_1 и биссектриса BL_2 треугольника ABC пересекаются в точке T. Известно, что $BC = a$, $AB = c$. Докажите справедливость равенства:* $\dfrac{BT}{TL_2} - \dfrac{a}{c} = 1$.

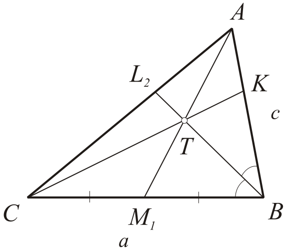


рис.10

Доказательство. Пусть $K = CT \cap AB$ *(рис.10)*. Тогда *по теореме Чевы* имеем: $\dfrac{AL_2}{L_2C} \cdot \dfrac{CM_1}{M_1B} \cdot \dfrac{BK}{KA} = 1$.

По свойству биссектрисы $\dfrac{AL_2}{L_2C} = \dfrac{c}{a}$.

Кроме того, $CM_1 = BM_1$. Получаем: $\dfrac{BK}{KA} = \dfrac{a}{c}$.

Воспользуемся теперь *теоремой Ван-Обеля*:

$\dfrac{BT}{TL_2} = \dfrac{BK}{KA} + \dfrac{BM_1}{M_1C} = \dfrac{a}{c} + 1$, откуда $\dfrac{BT}{TL_2} - \dfrac{a}{c} = 1$.

Задача 10. *В треугольнике ABC проведены чевианы BB_1 и CC_1, которые пересекаются в точке T. Получены 4 соотношения:* $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{x}{y}$; $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{z}{t}$; $\dfrac{BT}{TB_1} = \dfrac{m}{n}$ *(рис.11). Если известны два из этих отношений, то можно найти два других. Докажите!*

Доказательство. Пусть известно, что $\dfrac{x}{y} = p$ и $\dfrac{m}{n} = q$. Найдем в таком случае $\dfrac{z}{t}$ и $\dfrac{k}{f}$. Согласно *теореме Ван-Обеля* $\dfrac{m}{n} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{u}{v}$, где $\dfrac{u}{v} = \dfrac{BN}{NC}$ ($N = AT \cap BC$). Отсюда

$$\frac{u}{v} = \frac{m}{n} - \frac{y}{x} = q - \frac{1}{p} = \frac{pq-1}{p}.$$

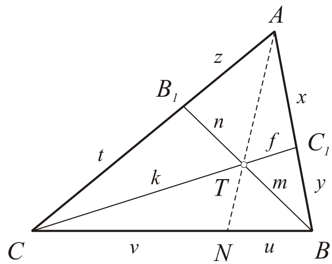


рис.11

В то же время по *теореме Чевы* $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{u}{v} \cdot \dfrac{t}{z} = 1$, или $\dfrac{z}{t} = \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{u}{v} = p \cdot \dfrac{pq-1}{p} = pq - 1$.

Для нахождения $\frac{k}{f}$ вновь воспользуемся *теоремой Ван-Обеля*:

$$\frac{k}{f}=\frac{v}{u}+\frac{t}{z}=\frac{p}{pq-1}+\frac{1}{pq-1}=\frac{p+1}{pq-1}.$$

Аналогично решаются остальные варианты известных и неизвестных пар отношений.

В заключение предложим несколько задач для самостоятельного решения, в которых теорема Чевы может быть эффективно использована в паре с теоремой Менелая или теоремой Ван-Обеля.

Задача 11. Докажите *теорему Чевы* с помощью теоремы Менелая.

Задача 11. На продолжении медианы AM_1 треугольника ABC за точку M_1 выбрана точка N. Через N проведена прямая, пересекающая отрезки CM_1 и AC в точках T и Q соответственно. $E = QM_1 \cap NB$; $K = AE \cap BC$. Докажите, что $TM_1 = M_1K$.

Задача 11. Через любую точку на чевиане AA_1 треугольника ABC проводятся чевианы BB_1 и CC_1. Докажите, что все прямые вида B_1C_1 пересекают продолжение стороны BC в одной и той же точке.

Задача 11. В треугольнике ABC точка $K \in AC$ такова, что $CK:KA=2:3$. Точка N лежит на стороне BC. Пусть $T = AN \cap BK$. Известно, что $\frac{AT}{TN}=\frac{5}{2}$. Найдите отношение $\frac{BT}{TK}$.

Ответ. $\frac{5}{2}$

Задача 11. Площадь треугольника ABC равна S. Точка $K \in AC$ такая, что $\frac{CK}{KA}=m$. Точка $N \in AB$, что $\frac{AN}{NB}=m$. $T = BK \cap CN$. Найдите площадь треугольника CTK.

Ответ. $\frac{m^2nS}{(m+1)(m+1+mn)}$

Глава 22

Параллелограмм Вариньона решает задачи

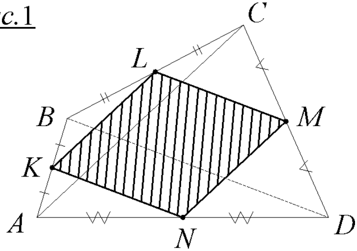
Французский математик и механик Пьер Вариньон (1654–1722), руководивший «Журналом учёных» в Париже и написавший учебник по элементарной геометрии, по-видимому, первым заострил внимание на, казалось бы, довольно очевидном факте: с*ередины сторон произвольного выпуклого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма*.

Действительно, $KLMN$ – параллелограмм (*рис*.1), поскольку $KL = MN = \frac{1}{2}AC$ (средние линии треугольников ABC и ADC). Кроме того, $KL \parallel AC$ и $MN \parallel AC$ (по той же причине), а значит, $KL \parallel MN$.

В дальнейшем мы будем называть параллелограмм $KLMN$ *параллелограммом Вариньона*, а отрезки KM и LN, соединяющие середины противоположных сторон, – *средними линиями четырёхугольника ABCD*. Отметим также, что в рассматриваемых ниже задачах все четырёхугольники выпуклые. А предлагаемая ниже подборка призвана убедить в том, что *параллелограмм Вариньона* – надёжный помощник при решении важных планиметрических задач.

***Задача 1**. Периметр параллелограмма Вариньона равен сумме длин его диагоналей. Докажите.*

<u>*Рис*.1</u>



<u>Решение</u>. $KL = MN = \frac{1}{2}AC$ и

$LM = KN = \frac{1}{2}BD$ (*рис*.1).

Тогда $P_{KLMN} = AC + BD$.

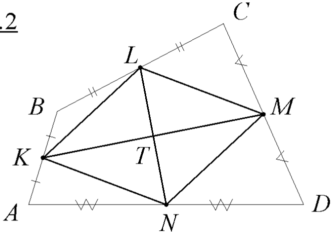
***Задача 2**. Докажите, что средние линии четырехугольника $ABCD$ в точке пересечения делятся пополам.*

Решение. Поскольку KM и LN – диагонали *параллелограмма Вариньона*, то, очевидно, что в точке пересечения они делятся пополам.

***Задача 3**. Верно ли, что из половин диагоналей и любой из средних линий четырёхугольника $ABCD$ можно составить треугольник?*

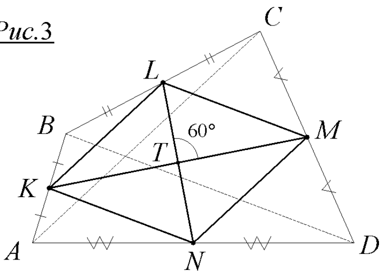
Решение. Да, так как *параллелограмм Вариньона* $KLMN$ существует для любого четырёхугольника $ABCD$. Тогда треугольники KLM и KMN – искомые (*рис*.2).

Рис.2



***Задача 4**. Средние линии четырёхугольника $ABCD$ равны a и b, угол между ними $60°$. Найти диагонали.*

Рис.3



Решение. Пусть $KM = a$ и $LN = b$ и $\angle LTM = 60°$ (*рис*.3).

Тогда $TM = \dfrac{a}{2}$ и $LT = \dfrac{b}{2}$.

Из ΔLTM по теореме косинусов:

$$LM^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos 60° .$$

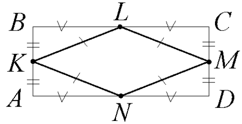
Но $LM = \dfrac{1}{2} BD$.

Поэтому $\dfrac{BD^2}{4} = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} - \dfrac{ab}{4}$, или $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$.

Аналогично из ΔTNM найдём MN, а потом и AC. $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$.

***Задача 5**. Постройте ромб с вершинами на сторонах прямоугольника $ABCD$.*

Рис.4



Решение. Поскольку диагонали прямоугольника равны, то *параллелограмм Вариньона* для прямоугольника $ABCD$ и будет искомым ромбом $KLMN$ (*рис*.4).

***Задача 6**. Сумма квадратов диагоналей четырёхугольника в 2 раза больше суммы квадратов его средних линий. Докажите.*

Решение. В *параллелограмме Вариньона* $KLMN$ *(рис.3),* как и в любом другом параллелограмме, сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон, или $KM^2 + LN^2 = 2(KL^2 + LM^2)$. Учитывая, что $KL = \frac{1}{2}AC$ и $LM = \frac{1}{2}BD$, получим: $KM^2 + LN^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2)$.

***Задача 7**. Докажите, что площадь параллелограмма Вариньона* $KLMN$ *равна половине площади четырёхугольника* $ABCD$.

Решение. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\angle 1$

$S_{KLMN} = KL \cdot KN \cdot \sin\angle 2$ (*рис.*5).

Учитывая, что $\angle 1 = \angle 2$ и $KL = \frac{1}{2}AC$; $KN = \frac{1}{2}BD$, получим требуемое.

***Задача 8**. Все четырёхугольники, имеющие общие середины сторон, равновелики. Докажите. (Всеукраинские олимпиады).*

Решение. Действительно, все эти четырёхугольники имеют один и тот же *параллелограмм Вариньона*. Поскольку его площадь равна половине площади каждого из исходных четырёхугольников (*задача 7*), то тем самым их равновеликость доказана.

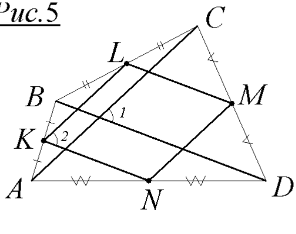
***Задача 9**. Диагонали четырёхугольника* $ABCD$ *равны* d_1 *и* d_2*, а средние линии четырёхугольника равны между собой. Найдите его площадь.*

Решение. В *параллелограмме Вариньона* $KLMN$ (*рис*.5) диагонали KM и LN равны (согласно условию). Значит, $KLMN$ – прямоугольник, и

$S_{KLMN} = KL \cdot KN$. Но $KL = \frac{1}{2}AC$ и $KN = \frac{1}{2}BD$.

Тогда $S_{KLMN} = \frac{1}{4}d_1 d_2$. Однако $S_{KLMN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (*задача 7*). Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1 d_2$.

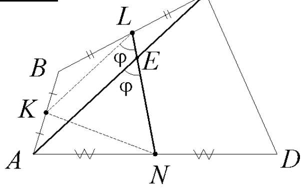
Рис.5



Задача 10. *Докажите, что площадь четырёхугольника равна произведению средней линии на одну из диагоналей и на синус угла между ними.*

Решение. Согласно *рис*.6 необходимо доказать, что $S_{ABCD} = AC \cdot LN \cdot \sin\phi$.
Треугольник KLN – половина *параллелограмма Вариньона* $KLMN$.

$S_{KLN} = \frac{1}{2} KL \cdot LN \cdot \sin\phi$ ($\angle AEN = \angle KLN = \phi$).



Но $KL = \frac{1}{2} AC$.

$S_{KLN} = \frac{1}{4} AC \cdot LN \cdot \sin\phi$, а $S_{KLMN} = \frac{1}{2} AC \cdot LN \cdot \sin\phi$.

Так как $S_{KLMN} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, то $S_{ABCD} = AC \cdot LN \cdot \sin\phi$,

что и требовалось доказать.

Задача 11. *Если диагонали четырёхугольника равны, то его площадь равна произведению средних линий. Докажите. (Всеукраинские олимпиады).*

Решение. В случае равенства диагоналей AC и BD *параллелограмм Вариньона* $KLMN$ становится ромбом, а площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S_{KLMN} = \frac{1}{2} KM \cdot LN$. Тогда $S_{ABCD} = 2S_{KLMN} = KM \cdot LN$.

Задача 12. *Одна из средних линий четырёхугольника равна* a. *Его диагонали равны* $\frac{3}{2}a$ *и* $\frac{5}{2}a$. *Найдите площадь четырехугольника.*

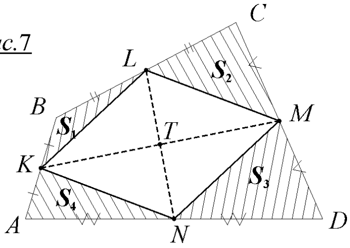
Решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ (*рис*.6) $LN = a$; $AC = \frac{3}{2}a$ и

$BD = \frac{5}{2}a$.

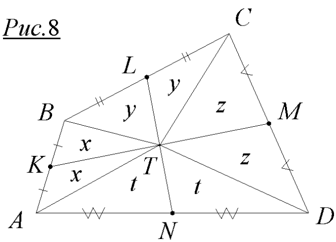
Тогда $KL = \frac{1}{2} AC = \frac{3}{4}a$ и $KN = \frac{1}{2} BD = \frac{5}{4}a$. По формуле Герона нетрудно найти площадь треугольника KLN: $S_{KLN} = \sqrt{\frac{3}{2}a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{4}} = \frac{3a^2}{8}$.

Следовательно, $S_{ABCD} = 4S_{KLN} = \frac{3a^2}{2}$.

***Задача 13**. Докажите, что $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ (рис.7).*



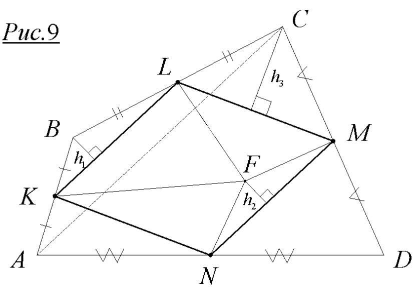
Решение. Поскольку $KLMN$ – параллелограмм и диагонали разбивают его на 4 равновеликих треугольника, то для решения задачи достаточно доказать, что $S_{TKBL} + S_{TMDN} = S_{TLCM} + S_{TNAK}$. Покажем это.



Известно, что медиана делит треугольник на две равновеликие части. Поэтому равные площади указаны соответствующими буквами на *рис*.8. При этом $S_{TKBL} + S_{TMDN} = x + y + z + t$ и $S_{TLCM} + S_{TNAK} = x + y + z + t$.

Теперь становится очевидным, что, согласно *рис*.7, $S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

***Задача 14**. Внутри четырёхугольника $ABCD$ найдите такую точку F, чтобы площади четырёхугольников, получающихся при соединении точки F с серединами сторон были равны. (Польские олимпиады).*



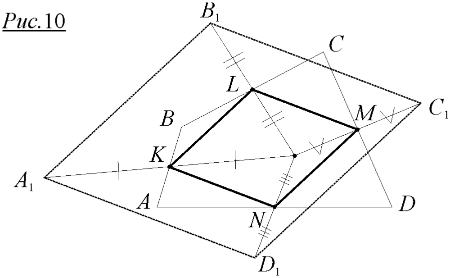
Решение. $S_{KBL} + S_{NMD} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ (*задача 13*). Но и $S_{NFMD} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ – согласно условию (*рис*.9). Тогда $S_{KBL} = S_{NFM}$ и $h_1 = h_2$. Поэтому точка F находится на прямой, параллельной MN, проведённой на расстоянии h_1 от MN.

Аналогично можно показать, что точка F находится на прямой, параллельной KN, проведенной на расстоянии h_3 от KN. Пересечение проведенных прямых даст искомую точку F.

***Задача 15**. Внутри четырехугольника $ABCD$ площади S берется точка E и отражается относительно середин всех его сторон. Получается новый четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1D_1} = 2S$. (Киевские олимпиады).*

Решение. Стороны *параллелограмма Вариньона* $KLMN$ и параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ соответственно параллельны (*рис.*10), и $KL = \frac{1}{2}A_1B_1$; $KN = \frac{1}{2}A_1D_1$ (средние линии в треугольниках A_1EB_1 и A_1ED_1).

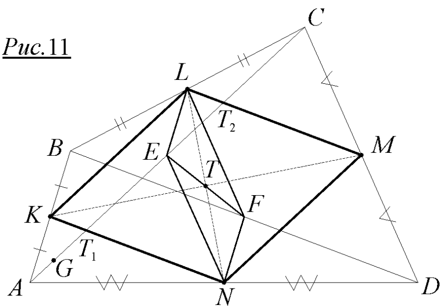
*Рис.*10



Тогда $S_{A_1B_1C_1D_1} = 4S_{KLMN} = 2S_{ABCD} = 2S$.

***Задача 16**. В четырехугольнике $ABCD$ отмечены точки E и F – середины диагоналей AC и BD соответственно (рис.11). Докажите, что $S_{ELFN} < \frac{1}{2}S_{ABCD}$. (Всероссийские олимпиады).*

*Рис.*11



Решение. Достаточно доказать, что точки E и F находятся строго внутри *параллелограмма Вариньона* $KLMN$, т.к. $S_{KLMN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Очевидно, что $T_1T_2 = KL = \frac{1}{2}AC$ и $AE = EC = \frac{1}{2}AC$. Пусть точка E совпадет с G и находится вне $KLMN$. Но тогда $GC = \frac{1}{2}AC > T_1T_2$, а $T_1T_2 = \frac{1}{2}AC$ – противоречие. Если же $E \equiv T_1$, то $T_1C = \frac{1}{2}AC = T_1T_2$, чего также быть не может. Значит, точка E находится внутри $KLMN$.

Аналогично показывается, что и точка F находится внутри параллелограмма $KLMN$. Тогда $S_{ELFN} < S_{KLMN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, что и требовалось доказать.

***Задача 17**. Средние линии четырехугольника $ABCD$ и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. (Киевские олимпиады).*

Решение. Заметим, что LN – диагональ как в *параллелограмме Вариньона* $KLMN$, так и в параллелограмме $ELFN$ – *рис*.11.

Пусть T – середина диагонали LN.

Тогда $T = LN \bigcap KM$ и $T = LN \bigcap EF$.

Тем самым доказаны оба утверждения задачи.

***Задача 18**. Сумма квадратов сторон четырёхугольника равна сумме квадратов его диагоналей, сложенной с учетверенным квадратом отрезка, соединяющего середины диагоналей.*

Решение. Согласно *рис*.11 необходимо доказать, что

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$.

По формуле медианы для ΔELN: $ET^2 = \dfrac{EF^2}{4} = \dfrac{2(EL^2 + EN^2) - LN^2}{4}$,

где $EL = \dfrac{1}{2}AB$; $EN = \dfrac{1}{2}CD$.

Откуда $LN^2 = \dfrac{AB^2 + CD^2}{2} - EF^2$.

Применив аналогично формулу медианы для треугольника KFM и учитывая, что $KF = \dfrac{1}{2}AD$, $FM = \dfrac{1}{2}BC$ и $TF = \dfrac{1}{2}EF$, получим:

$KM^2 = \dfrac{AD^2 + BC^2}{2} - EF^2$.

В *параллелограмме Вариньона* $KLMN$:

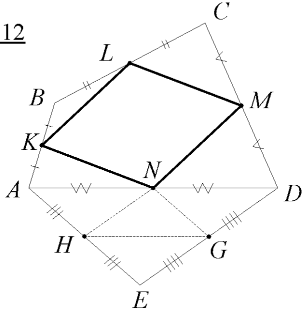
$LN^2 + KM^2 = 2(KL^2 + KN^2) = \dfrac{AC^2 + BD^2}{2}$.

Итак, получаем: $\dfrac{AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2}{2} - 2EF^2 = \dfrac{AC^2 + BD^2}{2}$, или

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$.

***Задача 19**. Восстановите 5-угольник по серединам его сторон.*

<u>*Рис.*12</u>

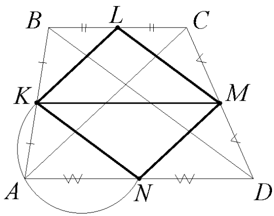


<u>Решение</u>. Пусть K, L, M, G, H – соответственно середины сторон AB, BC, CD, DE, EA в 5-угольнике $ABCDE$ (*рис*.12).
Анализ показывает, что зная точки K; L; M, мы можем построить *параллелограмм Вариньона* $KLMN$ для четырехугольника $ABCD$. Теперь нетрудно построить ΔAED по трем точкам H; N; G – серединам его сторон. Дальнейшее очевидно.

***Задача 20**. Постройте трапецию по двум диагоналям, одному из углов и отрезку, соединяющему середины оснований.*

<u>Решение</u>. Пусть в трапеции $ABCD$, которую необходимо построить, нам известны длины диагоналей AC и BD, отрезка LN и величина угла A (*рис*.13).

<u>*Рис.*13</u>



Поскольку $KL = \dfrac{1}{2}AC$ и $KN = \dfrac{1}{2}BD$, то по трем сторонам нетрудно построить ΔKLN. Далее достроим ΔKLN до *параллелограмма Вариньона* $KLMN$. На отрезке KN строим сегмент, вмещающий угол A. Через точку N проводим прямую параллельно KM, которая пересечёт сегмент в точке A. Дальнейшее построение очевидно.

Ряд задач, решаемых с помощью параллелограмма Вариньона, предложим Вашему вниманию для самостоятельного решения.

Задача 21. Восстановите параллелограмм $ABCD$ по точкам K, L, M – серединам трех его сторон.

Задача 22. Точка пересечения *средних линий* четырехугольника есть центроид системы четырех точек, лежащих в его вершинах. Докажите.

Задача 23. При последовательном соединении середин сторон трапеции образовался квадрат со стороной a. Найдите площадь трапеции.

<u>*Ответ*</u>. $2a^2$.

Задача 24. Дана трапеция $ABCD$ и точка E на её средней линии. Одной линейкой постройте *параллелограмм Вариньона* трапеции $ABCD$.

Задача 25. Вершины четырехугольника – середины сторон ромба со стороной 4 и углом $120°$. Определите вид четырехугольника и найдите его площадь.

<u>Ответ</u>. Прямоугольник. $S = 4\sqrt{3}$.

Задача 26. $KLMN$ – *параллелограмм Вариньона* произвольного четырехугольника $ABCD$ (*рис*.2). Докажите, что $S_{ABCD} \le KM \cdot LN$.

Задача 27. Восстановите ($2n+1$)-угольник по серединам его сторон.

Задача 28. Докажите, что в обозначениях *рис*.8 $S_{ATB} + S_{CTB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

(Всероссийские олимпиады).

Задача 29. В четырехугольник $ABCD$ вписываются всевозможные параллелограммы, стороны которых параллельны диагоналям этого четырехугольника. Какой из этих параллелограммов имеет наибольшую площадь? *(Всероссийские олимпиады).*
<u>Ответ</u>. Параллелограмм Вариньона!..

Литература

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть I. – М.: Учпедгиз, 1957.
2. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построения. – М.: Учпедгиз, 1950.
3. Астряб О.М., Смогоржевський О.С.та інші. Методика розв'язування задач на побудову. – К.: Радянська школа, 1960.
4. Баврин И.И., Фрибус Е.А. Старинные задачи. – М.: Просвещение, 1994.
5. Баран О.І. Математичні мініатюри. – К.: Ленвіт, 2007.
6. Бевз Г.П. Геометрія кіл. – Харків, Основа, 2004.
7. Бевз Г.П. Геометрія трикутника і тетраедра. – К.: «Вежа», 2009.
8. Боголюбов А.Н. Математики. Механики. Биографический справочник. – К.: Наукова думка, 1983.
9. Бородин А.Н., Бугай А.С. Биографический словарь деятелей в области математики. – К.: «Радянська школа», 1979.
10. Васильев А. И все-таки она вертится… – М.: «Квант» №4, 2003.
11. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые. – М.: Наука, 1978.
12. Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П., Шибасова З.Ф. За страницами учебника математики. – М.: Просвещение, 1996.
13. Возняк Г.М., Гусев В.А. Прикладные задачи на екстремум. – М.: Просвещение, 1985.
14. Вышенский В.А. и др. Сборник задач Киевских математических олимпиад. – К.: Вища школа, 1984.
15. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. – М.: МЦНМО, 2006.
16. Глейзер Г.И. История математики в школе IX–X классы. Москва, «Просвещение», 1983.
17. Глейзер Г.И. История математики в школе. – М.: Просвещение, 1964.
18. Глейзер Г.И. История математики в школе. VII–VIII классы. – М.: Просвещение, 1982.
19. Гордин Р.К. Планиметрия. Задачник. 7–9 классы. – М.: МЦНМО, 2004.
20. Готман Э.Г. Уравнения. Тождества. Неравенства. – М.: Просвещение, 1965.
21. Готман Э.Г., Скопец З.А. Решение геометрических задач аналитическим методом. – М.: Просвещение, 1979.
22. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна – решения разные. – М.: Просвещение, 2000.
23. Гурштейн А.А. Извечные тайны неба. – М.: Просвещение, 1984.
24. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986.
25. Дорофеева А.В. Рене Декарт и его «Геометрия». – М.: «Квант» №9, 1987.
26. Егоров А. Теоремы Менелая и Чевы. – М.: «Квант» №3, 2004.

27. Жидков С.І. Теореми Чеви і Менелая: від теорії – до практики. – Харків, «Основа», 2010.
28. Заславский А.А. Геометрические преобразования. – М.: МЦНМО, 2004.
29. Заславский А.А. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина. – М.: бюро «Квантум», 2009.
30. Зетель С.И. Задачи на максимум и минимум. – М.: ОГИЗ-ГОСТЕХИЗДАТ, 1948.
31. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. – Москва, "Учпедгиз", 1940.
32. Зигель Ф.Ю. Астрономическая мозаика. – М.: Наука, 1987.
33. Карпенко Д. Работа МАН «Проективная геометрия в трудах Паппа, Дезарга, Паскаля». – Киев, 2007.
34. Кирзимов В.А., Белоногова Е.М. Преобразование плоскости. – М.: Московский лицей, 2000.
35. Кованцов Н.И. Математика и романтика. – К.: Вища школа, 1980.
36. Коксетер Г.С.М., Грейцер С.Л. Новые встречи с геометрией. – Москва, "Наука", 1978.
37. Конфорович А.Г. Визначні математичні задачі. – К.; Радянська школа, 1981.
38. Крайзман М.Л. Розв'язування геометричних задач методом координат. – К.: Радянська школа, 1983.
39. Крысицкий В. Шеренга великих математиков. – Варшава: Наша ксенгарня, 1970.
40. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? М.: Просвещение, 1967.
41. Кушнир И. Координатный и векторный методы решения задач. – К.: Астарта, 1996.
42. Кушнир И.А. Геометрия на баррикадах. – К.: Факт, 2009.
43. Кушнир Исаак. Треугольник и тетраэдр в задачах. – К.: Факт, 2004.
44. Кушнір І.А. Методи розв'язання задач з геометрії. – К.: Абрис, 1994.
45. Кушнір І.А. Повернення втраченої геометрії. – К.: Факт, 2000.
46. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язання. – Львів, Євросвіт, 1999.
47. Лемэръ Методическое пособіе къ решенію геометрическихъ задачъ. Задачи на построеніе. – Москва, 1907.
48. Леонардо да Винчи Избранные произведения. – С.-Пб.: Издательский дом «Нева», М.: Олма-пресс, 1999.
49. Лоповок Л.М. Факультативные занятия по геометрии для 7–11 классов. – К.: Радянська школа, 1990.
50. Маркушевич А.И. Замечательные кривые. – М.: Наука, 1978.
51. М.: «Математика в школе» №3, 1986. *Задача 2876.*
52. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія-9 для класів з поглибленим вивченням математики. – Харків: Гімназія, 2010.

53. Мирошин В. Формулы геометрии помогают алгебре. – М.: «Квант» №3, 2007.
54. Мякишев А.Г. Элементы геометрии треугольника. – М.: МЦНМО, 2002.
55. Орач Б.Г. Підвищимо ефективність викладання математики в школі. – Львів, «Сполом», 2006.
56. Панов В.Ф. Математика древняя и юная. – М.: издат. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.
57. Пидоу Д. Геометрия и искусство. – М.: Мир, 1979.
58. Понарин Я.П. Элементарная геометрия. Том 1. – М.: МЦНМО, 2004.
59. Попов К.И. Сборник исторических задач по элементарной математике. – М.: КомКнига, 2006.
60. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Часть I. – М.: Наука, 1991.
61. Прасолов В.В., Тихоміров В.М. Евклідів світ. Евклідові пряма і площина. – «У світі математики» Том 9, вип.3, 2003.
62. Протасов В.Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. – М.: МЦНМО, 2005.
63. Сивашинский И.Х. Пособие по математике для техникумов. – М.: Высшая школа, 1970.
64. Скопец З.А., Жаров В.А. Задачи и теоремы по геометрии. – М.: Просвещение, 1962.
65. Соловьев Ю.П. Избранные статьи. – М.: Бюро Квантум, 2004.
66. Спивак А., Тихомиров В. Кеплер и винные бочки – австрийские и рейнские. – М.: «Квант» №6, 2000.
67. Тадеев В.А. От живописи к проективной геометрии. К.: Выща школа, 1988.
68. Тадеєв В.О. Рене Декарт. Геометрія і філософія. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2002.
69. Тихомиров В.М. Великие математики прошлого и их великие теоремы. – М.: МЦНМО, 2003.
70. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986.
71. Філіповський Г.Б. Геометрія та астрономія у пригодах слоненяти Лу та його Друзів. – Харків: Основа, 2007.
72. Чистяков В.Д. Старинные задачи по элементарной математике. – Минск: Высшая школа, 1966.
73. Чучаев И.И., Крюкова В.Л. Геометрические неравенства и уравнения. – «Математика в школе» №9-10, 2004.
74. Шарыгин Г. О некоторых результатах Эйлера в элементарной геометрии. – «Математика» («1 сентября») №6, 2007.
75. Шарыгин И.Ф. Геометрия, 8 класс. – М.: Рост Мирос, 1996.
76. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. – М.: Наука, 1986.
77. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. – М.: Наука, 1986.
78. Шарыгин И.Ф. Геометрия. Задачник, 9–11 классы. – М.: Дрофа, 1997.

79. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К. Сборник задач по геометрии. – М.: Астрель, 2001.
80. Шевкин А. Вокруг теорем Чевы и Менелая. – М.: «Математика» №9, 2011.
81. Шепелева З.В., Шепелев М.Н. Из истории математики. Франсуа Виет. – МШ №4-5, 1992.
82. Шибасов Л., Шибасова З. Пьер Ферма (к 400-летию со дня рождения). – М.: «Квант» №3, 2001.
83. Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. От проективной геометрии – к неевклидовой. – М.: Просвещение,1979.
84. Щетников А.И. Лука Пачоли и его трактат «О божественной пропорции». – М.: «Математическое образование», №1(41), 2007.
85. Эрдниев Б., Манцаев Н. Теоремы Чевы и Менелая. – М.: «Квант» №3, 1990.
86. Юзбашев А.В. Свойства геометрических фигур – ключ к решению любых задач по планиметрии. – М.: Просвещение, 2009.
87. Юшкевич А.П. История математики в средние века. – М.: ГИФМЛ, 1961.

Григорий Филипповский

Авторская школьная геометрия.
Часть 3

Верстка: Алексей Глушич
Обложка: Лейла Наврозашвили

Бумага офсетная, формат 60х84 1/16. Печать лазерная

g.filippovsky@yandex.ua

Киев, 2013