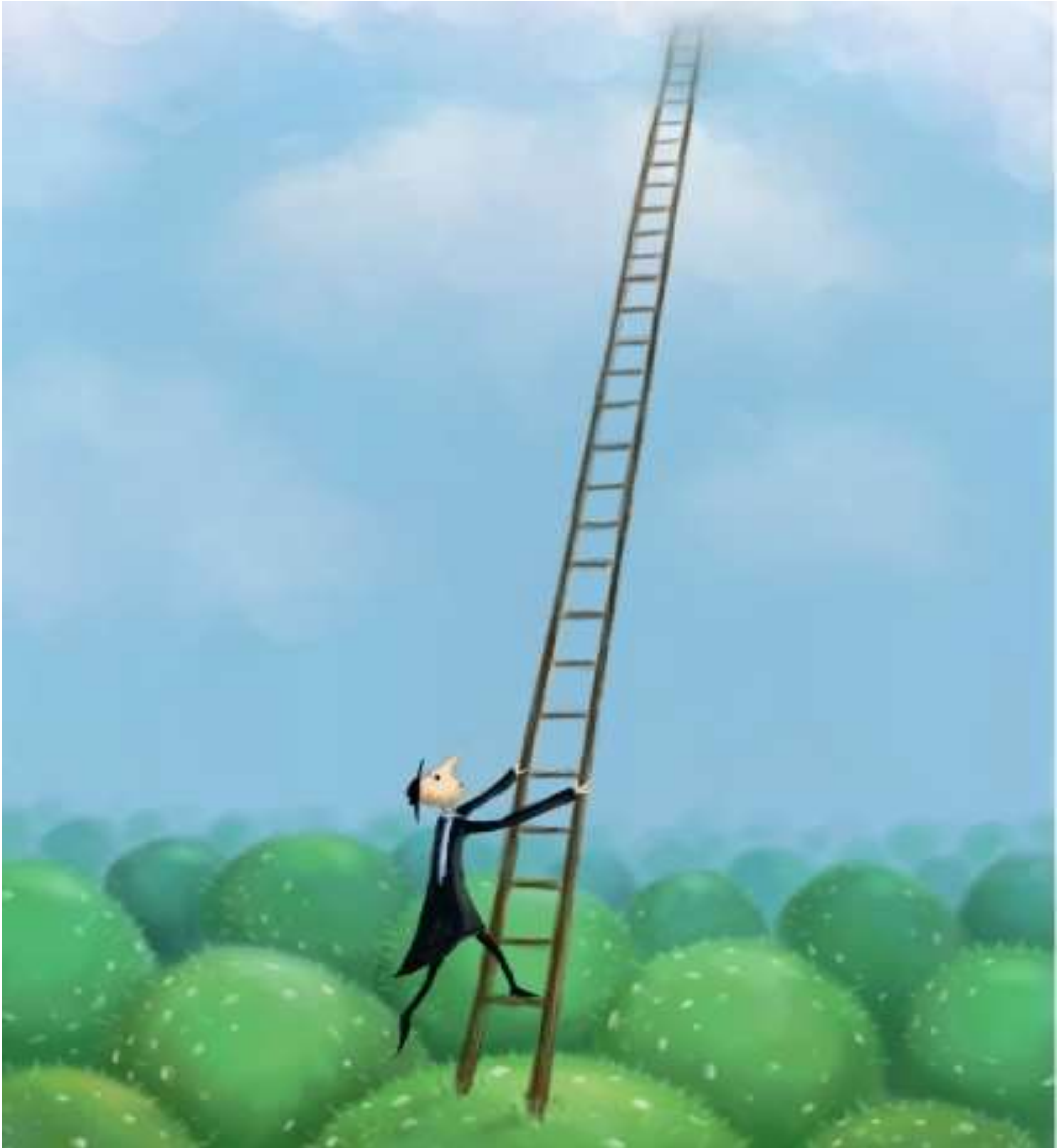

МАТЕМАТИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

В ПОМОЩЬ ПОВТОРЯЮЩИМ МАТЕМАТИКУ ПО СПРАВОЧНИКАМ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть1. Содержание

Индукция

***Индукция** — это переход от общего к частному.*

Если число случаев конечно и все можно перебрать и проверить, то индукция называется полной.

Пример 1. Например, докажем перебором всех случаев, что выражение $n^3 + 5n$ делится без остатка на 6.

Решение. При делении n на 6 возможны случаи:

1) n кратно 6, $n = 6k$;
2) в остатке получится число 1, $n = 6k + 1$;
3) в остатке получится число 2, $n = 6k + 2$;
4) в остатке получится число 3, $n = 6k + 3$;
5) в остатке получится число 4, $n = 6k + 4$;
6) в остатке получится число 5, $n = 6k + 5$.

Докажем, что для всех случаев $n^3 + 5n$ делится без остатка на 6.

Пусть $n^3 + 5n = n\,(n^2 + 5) = A$.

1) При $n = 6k$ очевидно, что $A = 6k\,(36k^2 + 5)$ делится на 6.
2) При $n = 6k + 1$ $\quad A = (6k + 1)\,(36k^2 + 12k + 6) = 6\,(6k + 1)\,(6k^2 + 2k + 1)$ делится на 6.
3) При $n = 6k + 2$ $\quad A = (6k + 2)\,(36k^2 + 24k + 9) = 6\,(3k + 1)\,(12k^2 + 8k + 3)$ делится на 6.
4) При $n = 6k + 3$ $\quad A = (6k + 3)\,(36k^2 + 36k + 14) = 6\,(2k + 1)\,(18k^2 + 18k + 7)$ делится на 6.
5) При $n = 6k + 4$ $\quad A = (6k + 4)\,(36k^2 + 48k + 21) = 6\,(3k + 2)\,(12k^2 + 16k + 7)$ делится на 6.
6) При $n = 6k + 5$ $\quad A = (6k + 5)\,(36k^2 + 60k + 30) = 6\,(6k + 5)\,(6k^2 + 10k + 5)$ делится на 6.

Итак, доказали перебором всех случаев, что $n^3 + 5n$ делится без остатка на 6.

Доказать полной индукцией, что:

2. $n^3 - 7n + 6$ делится без остатка на 6;
3. $n^3 + 11n$ делится без остатка на 6.

Если количество всех случаев рассмотреть не представляется возможным и доказательство утверждения проводится для отдельных частных случаев (неполная индукция), то утверждение не может заменить доказательства, поскольку среди неразобранных случаев могут быть и противоречащие данному утверждению. Однако неполная индукция позволяет угадать еще неизвестный результат. А потом уже надо доказать этот результат.

Метод математической индукции

Чтобы доказать некоторое утверждение, в формулировку которого входит переменная n, пробегающая все множество натуральных чисел, надо сначала проверить, что оно верно при $n = 1$.

После этого доказывают, что из справедливости этого утверждения при $n = k$ вытекает его справедливость при $n = k + 1$. А тогда доказана справедливость этого утверждения для всех значений n.

В самом деле, из того, что утверждение верно при $n = 1$, вытекает его справедливость при $n = 1 + 1 = 2$, но тогда оно верно и при $n = 2 + 1 = 3$, $n = 3 + 1 = 4$ и т.д. В конце концов мы дойдем до любого натурального числа n.

Значит, утверждение верно для всех натуральных n.

Итак:

> Утверждение $A(n)$, где $n \in \mathbf{N}$ справедливо, если:
>
> 1. Оно справедливо при $n = 1$.
> 2. Из справедливости утверждения при $n = k$ следует его справедливость при $n = k + 1$.

Пример 4. Доказать справедливость формулы общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d\,(n - 1)$.

Решение.

1. Проверим справедливость при $n = 1$:

   $a_1 = a_1 + d\,(1 - 1)$, формула верна.

2. Предположим, что она верна при $n = k$, т.е. $a_k = a_1 + d\,(k - 1)$ и докажем, что она верна при $n = k + 1$, т.е.

   $a_{k+1} = a_1 + dk = a_1 + d\,(k - 1) + d = a_k + d$.

Справедливость формулы доказана.

Пример 5. Доказать методом математической индукции формулу

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

1. Проверим справедливость формулы при $n = 1$:

   $S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{1 \cdot 2}$, формула верна.

2. Предположим, что она верна при $n = k$, т.е. $S_k = \frac{k}{k+1}$ и докажем, что при этом утверждении она будет верна при $k + 1$: $S_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots +$

   $+ \frac{1}{k\,(k+1)} + \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$;

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} =$$

$$= \frac{1}{k+1}\left(k + \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k^2 + 2k + 1}{k+2} =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)\,(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Из справедливости формулы при $n = k$ вытекает, что она верна и при $n = k + 1$. Значит, формула верна для всех значений n.

Применение метода математической индукции к доказательству свойств чисел натурального ряда

Доказать:

1. Сумма n первых чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

Решение.

При $n=1$ утверждение справедливо, так как $1=1$. Допустим, что утверждение справедливо для $n=k$, и докажем его справедливость для $n=k+1$; $S_{k+1}=S_k+(k+1)$, но $S_k=\frac{k(k+1)}{2}$ по предположению, значит,

$$S_{k+1}=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

2. Чему равна сумма первых n нечетных натуральных чисел?

Решение.

Непосредственным вычислением устанавливаем: $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$ и т. д. Выскажем предположение: сумма первых n нечетных чисел равна квадрату числа их. При $n=1$ предположение верно, так как $1=1$; допустим, что оно верно и для $n=k$, докажем справедливость его для $n=k+1$:

$S_{k+1}=S_k+(2k+1)$, но $S_k=k^2$ по предположению, значит, $S_{k+1}=(k+1)^2$.

3. Сумма квадратов n первых натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, где n — любое натуральное число.

5. Сумма кубов n первых чисел натурального ряда равна $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

6. Для любого натурального числа n справедливо равенство $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

7. $1\cdot4+2\cdot7+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$, где n — любое натуральное число.

8. Для любого натурального n

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

9. При натуральном n

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

10. При натуральном n

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

11. При натуральном n справедливо тождество

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Доказать, что для любого натурального n справедливо равенство:

12. $$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)};$$

13. $$\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(n+5)(n+6)}=\frac{n}{6(n+6)};$$

14. $$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=$$
$$=\frac{n}{3(2n+3)};$$

15. $$\frac{1}{1\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 19}+\frac{1}{19\cdot 28}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(9n-8)(9n+1)}=\frac{n}{9n+1};$$

16. $$\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\frac{1}{15\cdot 19}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(4n+3)(4n+7)}=\frac{n}{7(4n+7)};$$

17. $$\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 23}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(6n-1)(6n+5)}=\frac{n}{5(6n+5)};$$

18. $2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\ldots+(n+1)\cdot 2^{n+1}=n\cdot 2^{n+2};$

19. $2\cdot 2^0+3\cdot 2^1+4\cdot 2^2+\ldots+(n+1)\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^n;$

Доказать, формулы для любого натурального *n*.

20. $S_n = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 4^2 + \ldots + (n-1)\,n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}.$

21. $S_n = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 4^2 + \ldots + (n-1)\,n^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

22. $S_n = 2\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 3^2 + \ldots + n(n-1)^2 + (n+1)\,n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

23. $S_n = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$

24. $S_n = 1 + 4 + 10 + 20 + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$

25. $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2.$

26. $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 3\cdot 8 + \ldots + n(3n-1) = n^2(n+1).$

27. $S_n = 1 + 7 + 19 + 37 + \ldots + (3n^2 - 3n + 1) = n^3.$

28. $S_n = 1 + 5 + 15 + 35 + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

29. $S_n = 1 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot 6\cdot 7 + \ldots + 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)(2n-1) = 2^n\,n! - 1.$

30. $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$

31. $S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$

Применение метода математической индукции к решению вопросов делимости чисел

32. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

33. Доказать, что при любом целом n:

а) $n^3 + 5n$ делится на 6;
б) $n^3 + 11n$ » » 6;
в) $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ » » 24;
г) $n^6 - 3n^5 + 6n^4 - 7n^3 + 5n^2 - 2n$ » » 24.

34. Доказать, что при любом целом неотрицательном n:

а) $7^n + 3n - 1$ делится на 9;
б) $4^n + 15n - 1$ » » 9;
в) $3^{2n+2} - 8n - 9$ » » 64;
г) $3^{2n+1} + 40n - 67$ » » 64;
д) $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ » » 25;
е) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ » » 11.

Доказать, используя метод математической индукции, что при любом натуральном n справедливо утверждение:

35. $5^{2n} - 1$ делится без остатка на 24.

36. $3^{2n+1} + 1$ делится без остатка на 4.

37. $5^{2n-1} + 1$ делится без остатка на 6.

38. $n^3 + 5n$ делится без остатка на 6.

39. $n^3 - 7n + 6$ делится без остатка на 6.

40. $n^3 - n$ делится без остатка на 6.

41. $n^3 + 11n$ делится без остатка на 6.

42. $7^n + 3n - 1$ делится без остатка на 9.

43. $4^n + 15n - 1$ делится без остатка на 9.

44. $3^{2n+2} - 8n - 9$ делится без остатка на 64.

45. Доказать, что число $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^n$ делится на 100 при любом натуральном n, кратном 4.

46. Доказать, что произведение двух последовательных четных чисел делится на 8.

47. Доказать, что произведение четырех последовательных натуральных чисел делится на 24.

48. Доказать, что произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на 120.

49. Доказать, что разность между кубом натурального числа и самим числом делится на 6.

50. Доказать, что разность между кубом нечетного числа и самим числом делится на 24.

51. Доказать, что квадрат всякого нечетного числа, уменьшенный на единицу, делится на 8.

52. Доказать, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

53. Доказать, что разность квадратов двух нечетных чисел делится на 8.

54. Доказать, что произведение квадрата натурального числа на натуральное число, предшествующее этому квадрату, делится на 12.

55. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

56. Доказать, что сумма двух последовательных натуральных степеней числа 2 делится на 6.

Арифметическая прогрессия.

Числовые последовательности

Пример 1. Написать первые десять членов последовательности $x_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$.

Решение. Вычисляя значение дроби $\dfrac{n+1}{2n+1}$ при n, равных 1, 2, 3, ..., 10, получим:

$$x_1 = \frac{2}{3};\ x_2 = \frac{3}{5};\ x_3 = \frac{4}{7};\ x_4 = \frac{5}{9};\ x_5 = \frac{6}{11};$$

$$x_6 = \frac{7}{13};\ x_7 = \frac{8}{15};\ x_8 = \frac{9}{17};\ x_9 = \frac{10}{19};\ x_{10} = \frac{11}{21}.$$

Упражнения

Написать 4 первых члена последовательности с общими членами:

2. $x_n = \dfrac{n^2+4}{n^2}$.
3. $x_n = \dfrac{4n-1}{7n+1}$.
4. $x_n = \dfrac{5n}{3n-2}$.
5. $x_n = \dfrac{n^3}{2n^2-5}$.
6. $x_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$.
7. $x_n = 2^n$.
8. $x_n = \dfrac{1}{(5n-1)(5n+1)}$
9. $x_n = \dfrac{n^2}{n+1}$.
10. $x_n = \log_{2n}(n+1)$.
11. $x_n = \sin nx$.

Пример 12. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$ монотонно убывает.

Решение. Найдем x_{n+1}, заменив n на $n+1$:

$$x_{n+1} = \frac{n+1+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+2}{2n+3}.$$

Сравним величины дробей $x_n = \frac{n+1}{2n+1}$ и $x_{n+1} = \frac{n+2}{2n+3}$, для чего рассмотрим их разность: $x_{n+1} - x_n =$

$$= \frac{n+2}{2n+3} - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{(n+2)(2n+1) - (n+1)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} =$$

$$= \frac{(2n^2+5n+2) - (2n^2+5n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-1}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Очевидно, что $\frac{-1}{(2n+3)(2n+1)} < 0$, $x_{n+1} - x_n < 0$. Последовательность монотонно убывающая.

13. Доказать, что последовательность с общим членом:

а) $x_n = \frac{n}{2n+1}$ — монотонно возрастающая;

б) $x_n = \frac{n-1}{n}$ — монотонно возрастающая;

в) $x_n = \frac{n}{4n-3}$ — монотонно убывающая;

г) $x_n = 2^n$ — монотонно возрастающая.

14. 1) Написать первые пять членов последовательности чётных чисел.

2) Написать первые пять членов последовательности чисел, кратных пяти.

4) Написать первые десять членов последовательности простых чисел.

15. а) Написать первые пять членов числовой последовательности, общий член которой выражается формулой:

1) $a_n = 2n - 1$; 2) $a_n = n^2$; 3) $a_n = \frac{1}{n}$; 4) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

5) $a_n = -n^2 - 1$; 6) $a_n = -2^n$; 7) $a_n = \frac{n}{n+1}$; 8) $a_n = (-1)^n$.

Арифметическая прогрессия

16. Показать, что следующие числовые последовательности являются арифметическими прогрессиями:

1) $a_n = 4n + 3$; 3) $a_n = \dfrac{8n+1}{3}$.

2) $a_n = \dfrac{3n+2}{5}$;

17. Найти 10-й член прогрессии: 8; 11; 14; ...

18. Найти 20-й член прогрессии: 15; 13; 11; ...

19. $a_3 = 12$; $a_6 = 27$. Найти d.

20. $a_5 = 19$; $a_9 = 35$. Найти d.

Справочный отдел

Прогрессия

Арифметическая | Геометрическая

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему,

сложенному с одним и тем же числом | умноженному на одно и то же число $\neq 0$

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_{n-1};\ a_n;\ a_{n+1}$$

$\div\ a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = d$	$∺\ \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \ldots = q$
$d > 0$ возр.; $d < 0$ убыв.; $d = 0$ пост.	$q > 1$ возр.; $0 < q < 1$ убыв.; $q = 0$ пост.; $q < 0$ колебл.
$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$a_n = a_1 q^{n-1}$
$S_n = \left(\dfrac{a_1 + a_n}{2}\right) n$	$S_n = \dfrac{a_n q - a_1}{q - 1} = \dfrac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}$
$S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$	

216. Определить последний член арифметической прогрессии:

1) $a_1 = 3$, $d = 4$, $n = 15$; 2) $a_1 = 2$, $d = -\frac{1}{2}$, $n = 12$.

22. Вычислить число членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 3$, $d = -5$, $a_n = -37$.

23. Найти сумму n членов арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_1 = 3$, $d = 2$, $n = 8$; 2) $a_1 = -10$, $d = 5$, $n = 20$.

24. Найти сумму всех нечетных натуральных чисел от 17 до 95 включительно.

25. Между числами 7 и 35 поместить 6 чисел, которые вместе с данными числами составляли бы арифметическую прогрессию.

26. Пятый член арифметической прогрессии, состоящей из 10 членов, равен 11, а восьмой ее член равен 17. Найти сумму всех членов этой прогрессии.

27. Четвертый член арифметической прогрессии равен 10, а седьмой ее член равен 19. Найти первый член и разность этой прогрессии.

28. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, в которой:

1) $\begin{cases} a_2 + a_8 = 10, \\ a_3 + a_{14} = 31; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a_2 + a_5 - a_3 = 10, \\ a_1 + a_6 = 17; \end{cases}$

2) $\begin{cases} a_3 + a_5 + a_8 = 18, \\ a_4 + a_2 = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a_7 - a_3 = 8, \\ a_2 \cdot a_7 = 75; \end{cases}$

5) $\begin{cases} a_2 + a_4 + a_6 = 36, \\ a_2 \cdot a_3 = 54; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} a_5 - a_3 = -4, \\ a_2 \cdot a_4 = -3. \end{cases}$

29. Написать первые три члена арифметической прогрессии:

1) $a_n = \frac{3n-1}{6}$; 3) $a_n = \frac{8n-3}{5}$; 5) $S_n = 7n^2 - 5n$;

2) $a_n = \frac{5n+7}{3}$; 4) $S_n = 5n^2 + 3n$; 6) $S_n = 3n^2$.

30. Длины сторон многоугольника составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 3 см. Наибольшая сторона многоугольника содержит 38 см. Найти число сторон многоугольника, если его периметр равен 258 см.

31. Поезд, отходя от станции, равномерно увеличивает скорость и через 20 мин достигает скорости 60 км/ч. Чему равно ускорение поезда в минуту?

32. Шар, скатывающийся по наклонному желобу, в первую секунду проходит 0,6 м, а в каждую следующую секунду его скорость увеличивается на 0,6 м. Сколько времени будет двигаться шар по шестиметровому желобу?

33. Четвёртый член арифметической прогрессии равен 10, а седьмой член её равен 19. Найти первый член и разность этой прогрессии.

34. Сумма всех членов арифметической прогрессии равна 28, третий член её равен 8, четвёртый 5. Найти крайние члены и число членов этой прогрессии.

35. Сумма второго и четвёртого членов арифметической прогрессии равна 16, а произведение первого и пятого членов её равно 28. Найти первый член и разность этой прогрессии.

36. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_2+a_5-a_3=10,$ $a_1+a_6=17;$ 2) $S_2-S_4+a_2=14,$ $S_3+a_3=17;$

3) $5a_1+10a_5=0,$ $S_4=14.$

37. Определить первый член, разность и число членов арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_n=55,$ $a_2+a_5=32{,}5,$ $S_{15}=412{,}5;$ 2) $S_3=30,$ $S_5=75,$ $S_n=105.$

38. Определить первый член и разность арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_7-a_3=8,$ $a_2\cdot a_7=75;$ 2) $a_4:a_6=-1,$ $a_2\cdot a_8=-1;$ 3) $a_4^2+a_{12}^2=1170,$ $a_7+a_{15}=60.$

39. Найти x из уравнения:

1) $1+4+7+\ldots+x=117;$

2) $1+7+13+\ldots+x=280;$

3) $(x+1)+(x+4)+(x+7)+\ldots+(x+28)=155.$

40. Написать первых три члена арифметической прогрессии, для которой общий член выражается формулой:

1) $a_n=\frac{3n-1}{6}$; 2) $a_n=\frac{5n+7}{3}$; 3) $a_n=\frac{8n-3}{5}$.

41. Написать первых три члена арифметической прогрессии, у которой сумма любого числа членов выражается формулой:

1) $S_n=5n^2+3n;$ 2) $S_n=7n^2-5n;$ 3) $S_n=3n^2.$

42. Во сколько часов велосипедист проедет 54 *км*, если в первый час он проезжает 15 *км*, а в каждый следующий час на 1 *км* меньше, чем в предыдущий?

43. Амфитеатр состоит из 10 рядов, причём в каждом следующем ряду на 20 мест больше, чем в предыдущем, а в последнем ряду 280 мест. Сколько человек вмещает амфитеатр?

44. Поезд, отходя от станции, равномерно увеличивает скорость и через 11 мин. достигает скорости 30 *км* в час. Найти ускорение поезда в минуту.

45. Шары расположены в форме треугольника так, что в первом ряду 1 шар, во втором 2, дальше 3 шара и т. д. Во сколько рядов размещены шары, если число их равно 15?

46. Отец дарит каждому из своих сыновей в день его рождения, начиная с пяти лет, столько книг, сколько сыну лет. Лета пяти сыновей составляют арифметическую прогрессию, разность которой равна 3. Сколько лет было каждому сыну, когда у них составилась библиотека в 325 книг?

47. Брёвна сложены в груду следующим образом: в нижнем слое уложено 15 брёвен, брёвна второго слоя уложены на промежутки нижнего слоя и т. д. Последний ряд составляет 1 бревно. Определить число брёвен в этой груде.

48. Шар, движущийся по наклонной плоскости, проходит в первую секунду 0,5 *м*, а в каждую следующую секунду — на 0,8 *м* больше, чем в предыдущую. Найти расстояние, пройденное шаром в течение 10 сек.

49. Из пункта A выехал велосипедист, который в первый час проехал 10 *км*, а в каждый следующий час проезжал на 1 *км* больше, чем в предыдущий. Одновременно вслед за ним из пункта B, находящегося от A на расстоянии 7,5 *км*, выехал второй велосипедист, который в первый час проехал 12 *км*, а в каждый следующий час проезжал на 1,5 *км* больше, чем в предыдущий. Определить, через сколько часов второй велосипедист догонит первого.

50. Два тела, находясь на расстоянии 153 *м* друг от друга, движутся навстречу одно другому. Первое тело проходит 10 *м* в сек., а второе в первую секунду прошло 3 *м* и в каждую следующую на 5 *м* больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд они встретятся?

51. Периметр некоторого многоугольника равен 158 *см*, причём длины сторон его составляют арифметическую прогрессию, разность которой 3 *см*. Наибольшая сторона многоугольника равна 44 *см*. Сколько сторон имеет многоугольник?

52. Для поливки 20 деревьев, расположенных по прямой линии на расстоянии 2 м друг от друга, садовник приносит воду для каждого отдельного дерева из колодца, находящегося на той же прямой линии в 10 м от первого дерева. Сколько всего метров пройдет садовник, чтобы полить все деревья и вернуться к колодцу?

53. За сколько часов велосипедист проедет 54 км, если за первый час он проезжает 15 км, а за каждый последующий час — на 1 км меньше, чем за предыдущий?

54. Поезд, отходя от станции, равномерно увеличивает скорость, и через 10 мин достигает скорости 30 км/ч. Найти ускорение поезда в минуту.

Геометрическая прогрессия

1. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если:

а) $a_4 = 20$, $a_5 = 30$; б) $a_3 = \sqrt{2}$, $a_4 = 2$.

2. Восьмой член геометрической прогрессии равен 256, знаменатель прогрессии 4. Найти первый член этой прогрессии.

3. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если:

1) $\begin{cases} a_4 - a_2 = 18, \\ a_5 - a_3 = 36; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a_1 - a_3 + a_5 = -65, \\ a_1 + a_7 = -325; \end{cases}$

2) $\begin{cases} a_5 - a_1 = 15, \\ a_4 - a_2 = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a_2 + a_5 - a_4 = 10, \\ a_3 + a_6 - a_5 = 20. \end{cases}$

4. В геометрической прогрессии с положительными членами $S_2 = 4$, а $S_3 = 13$. Найти S_5.

5. Разность между шестым и четвертым членами геометрической прогрессии равна 72, а между третьим и первым равна 9. Найти сумму 8 членов этой прогрессии.

6. Определить 4 числа, составляющие убывающую геометрическую прогрессию, зная, что сумма крайних членов этой прогрессии 27, а сумма средних 18.

7. Три числа, сумма которых равна 21, составляют арифметическую прогрессию. Если из второго числа вычесть единицу, а к третьему числу прибавить единицу, то эти три числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

8. Между числами 9 и 243 поместить два числа, которые образовали бы вместе с данными числами геометрическую прогрессию.

9. Между числами 160 и 5 поместить четыре средних геометрических.

10. Между числами 1 и 7 поместить шесть средних геометрических.

11. Определить первый член и знаменатель геометрической прогрессии, в которой:

1) $a_3 - a_1 = 15$, $a_4 - a_2 = 6$; 2) $a_2 + a_5 - a_4 = 10$, $a_3 + a_6 - a_5 = 20$.

12. Определить первый член, знаменатель и число членов геометрической прогрессии, в которой:

1) $a_7 - a_3 = 48$, $a_6 + a_5 = 48$, $S_n = 1023$; 2) $a_6 - a_4 = 216$, $a_3 - a_1 = 8$, $S_n = 40$.

13. Найти геометрическую прогрессию, состоящую из 6 членов, зная, что сумма трёх первых её членов равна 168, а сумма трёх последних 21.

14. Определить 4 числа, составляющие убывающую геометрическую прогрессию, зная, что сумма крайних членов этой прогрессии 27, а сумма средних 18.

15. Найти три числа, образующие возрастающую геометрическую прогрессию, зная, что сумма их 26, а сумма квадратов этих чисел 364.

16. Найти арифметическую и геометрическую прогрессии, если известно, что первый член каждой прогрессии равен единице, третьи члены обеих прогрессий равны между собой, а 21-й член арифметической прогрессии равен пятому члену геометрической.

17. Первый член арифметической прогрессии и первый член геометрической — равны. Первый член арифметической прогрессии равен 3, а второй член её больше второго члена геометрической на 6; третьи члены прогрессий одинаковы. Найти эти прогрессии, если все члены обеих прогрессий положительны.

18. Сумма трёх чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 30. Если от первого числа отнять 5, от второго 4, а третье число оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

19. Три положительных числа, дающие в сумме 21, составляют арифметическую прогрессию. Если к ним соответственно прибавить 2, 3 и 9, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

20. Три положительных числа, составляющие арифметическую прогрессию, дают в сумме 15. Если к первому и второму из них прибавить по единице, а к третьему числу прибавить 4, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

21. Сумма трёх чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 65. Если от меньшего из этих чисел отнять 1, а от большего 19, то полученные три числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

22. Сумма трёх чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 26. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 6 и 3, то вновь полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

23. Найти четыре целых числа, из которых первые три составляют арифметическую, а последние три геометрическую прогрессию; известно, что сумма двух крайних чисел равна 37, а сумма двух средних 36.

24. Четыре числа составляют арифметическую прогрессию. Если из них вычесть соответственно 2, 6, 7 и 2, то вновь полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

25. Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Если из них вычесть соответственно 2, 1, 7 и 27, то вновь полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

26. *а*) $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \ldots;$ *в*) $3\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \frac{\sqrt{2}}{3};\ \ldots;$

б) $6\frac{2}{3};\ 1\frac{1}{3};\ \frac{4}{15};\ \ldots;$ *г*) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1};\ 1;\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1};\ \ldots.$

27. Найти первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой:

а) сумма четырех членов равна $33\frac{3}{4}$, а сумма прогрессии 36;

б) сумма прогрессии равна 14,4, а знаменатель прогрессии $\frac{3}{8}$.

28. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой первый член равен 66, а сумма прогрессии 110.

29. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12,5, а сумма первого и второго членов ее 12. Найти эту прогрессию.

30. Каждую из периодических десятичных дробей записать в виде обыкновенной дроби:

а) 0,444...; *б*) 0,42323...; *в*) 0,13888...; *г*) 2,6444...

Справочный отдел

$S = \frac{a_1}{1-q}$, где S — сумма членов бесконечно убывающей прогрессии,

a_1 — первый член,

q — знаменатель ($|q| < 1$).

Нахождение пределов.
Функции непрерывного аргумента

Найти предел:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+5}{x^2-3}$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2-3x+1}{x-4}+1\right)$.

3. $\lim\limits_{x \to 2} (4x+3)$.

4. $\lim\limits_{x \to -1} (x^2-3)$.

5. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{x+3}{2x-1}$.

6. $\lim\limits_{x \to \frac{4}{5}} \dfrac{5x+4}{x-3}$.

7. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin 2x$.

8. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{3}} \cos x$.

9. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

10. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{ctg} x$.

11. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x}$.

12. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{x^2+1}$.

13. $\lim\limits_{x \to \pi} (\sin 2x - \cos x)$.

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x}$.

15. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^5-1}{x^2+3}$.

Неопределенности. Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

Пример 16. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2+5n+7n^2}{7+9n^2}$.

Решение. При $n \to \infty$ числитель и знаменатель выражения бесконечно большие. Обычно в этом случае поступают так: числитель и знаменатель дроби делят на наивысщую степень n, встречающуюся в членах дроби.

Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2+5n+7n^2}{7+9n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n}+7}{\frac{7}{n^2}+9} = \dfrac{7}{9}$, так как

при $n \to \infty$ величины $\dfrac{2}{n^2}$, $\dfrac{5}{n}$, $\dfrac{7}{n^2}$ бесконечно малы.

Пример 17. **Найти** $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{6n+7}{3n-1}}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{6n+7}{3n-1}} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+7}{3n-1}} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6+\frac{7}{n}}{3-\frac{1}{n}}} =$

$= 2^{\frac{6}{3}} = 4.$

Найти предел:

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-2n^2-n+1}{5n^3+7n^2+4}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2-4}{2n^2+1}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-4}{3n^3+1}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^2-3n+1}{n+5}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{6n^2+3n-4}{5n^2-n+10}\right)$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^3-3n}{3n^3-2n+4}\right)$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(2-\dfrac{3}{n}\right)^2\left(\dfrac{7}{n^2}-1\right)$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{2n^2+1}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3-n+1}{5n^3+n^2-1}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n-1)^3}{n^3-1}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2n-1}}{n-2}$.

30. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n^2 + 4n}}{\sqrt[3]{n^3 - 3n^2}}$.

31. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{1 + n^2} - \sqrt{4 + n^2}}{n}$.

32. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{1 + 9n^2} + \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{1 + 9n^2} - \sqrt{n^2 - 1}}$.

33. $\lim\limits_{n \to \infty} 5^{\frac{3n}{6n - 2}}$.

34. $\lim\limits_{n \to \infty} 6^{\frac{n - 7}{n^2 + 3}}$.

Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$

Пример 35. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$. При $x = 2$ числитель и знаменатель дроби обращается в нуль.

Но определение предела функции содержит оговорку: при отыскании предела функции $f(x)$ при $x \to a$ значение функции $f(a)$ при $x = a$ можно не рассматривать. От функции $f(x)$ это определение не требует, чтобы точка $x = a$ входила в область существования функции. Эти соображения и дадут возможность решить задачу:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = 3.$$

Мы имеем право сократить на $x - 2$, так как значение $x = 2$ не рассматривается и $x - 2 \neq 0$.

Для того, чтобы определить предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \to a$ числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю, надо числитель и знаменатель дроби разделить на $x - a$ *и перейти к пределу.*

Если и после этого числитель и знаменатель новой дроби имеют пределы, равные нулю при $x \to a$, то надо произвести повторное деление на $x - a$.

Пример 36. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$.

Решение. Когда $x \to 0$, числитель и знаменатель имеют своим пределом нуль, а потому они бесконечно малые.

Для того чтобы решить вопрос о пределе их отношения, перенесем иррациональность в знаменатель, умножив для этого числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{4+x} + 2$. Будем иметь

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{4+x} - 2)(\sqrt{4+x} + 2)}{x(\sqrt{4+x} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Деление числителя и знаменателя дроби на x возможно, так как при $x \to 0$ значение x не становится равным нулю.

Чтобы найти предел дроби, содержащей иррациональные выражения, в случае, когда предел и числителя, и знаменателя дроби равен нулю, надо перенести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и после этого сделать необходимые упрощения и перейти к пределу.

Найти предел:

37. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$.

38. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 2x}$.

39. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$.

40. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 27}{2x^2 - 3x - 27}$.

41. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{2x^2 + x - 21}$.

42. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

43. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{6}{x^2 - 9}\right)$.

44. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x^2}$.

45. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{2-\sqrt{4+x+x^2}}$.

46. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{2x+1}}$.

47. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$.

48. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$.

49. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

50. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

51. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

52. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

53. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

Замечательные пределы

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1}$$

Найти предел:

54. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x}$.

55. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$.

56. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$.

57. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$.

58. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$.

59. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$.

60. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x + \sin 4x}{x}$.

61. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{2x^2}$.

62. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3-\sqrt{2x+9}}$.

64. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

63. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$.

Вычислить предел:

Пример 65. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2+x-x^2}{x^2-4}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2+x-x^2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(2-x)(x+1)}{(x-2)(x+2)} =$

$$= -\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x+2} = -\frac{3}{4}.$$

Пример 66. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-x-(1+x)}{x\left(\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}\right)} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}} = -2\cdot\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Пример 67. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(5-x-4)(\sqrt{2-x}+1)}{(2-x-1)(\sqrt{5-x}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Пример 68. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} =$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x - 3}{x - 1} = -1.$$

Пример 69. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{6x}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{6x} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x}$.

Положим $3x = y$, тогда $\lim\limits_{x \to 0} y = 0$ и

$$\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{1}{2} \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Пример 70. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x + 9} - 4}{x^2 - 49}$.

Решение.

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x + 9} - 4}{x^2 - 49} = \lim_{x \to 7} \frac{(\sqrt{x + 9} - 4)(\sqrt{x + 9} + 4)}{(x^2 - 49)(\sqrt{x + 9} + 4)} =$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{x - 7}{(x - 7)(x + 7)(\sqrt{x + 9} + 4)} =$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{1}{(x + 7)(\sqrt{x + 9} + 4)} = \frac{1}{14\,(4 + 4)} = \frac{1}{112}.$$

Пример 71. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1.$

Пример 72. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 5x - 6}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 5x - 6} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 6)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 6} = \frac{3}{7}.$$

Пример 73. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} =$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2-4)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+2}+2)(x+7-9)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{3+3}{2+2} = 1{,}5.$$

Упражнения

Найти предел:

74. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-9x+14}{x-2}$.

75. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

76. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

77. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

78. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

79. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

80. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x(x^2-4)}$.

81. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+7x+3}$.

Область определения функции

Найти область определения функции:

1. $y = \dfrac{1}{x^2+6x+9}$.

2. $y = \dfrac{x^2+4}{x^2-9x+8}$.

3. $y = \dfrac{5x+3}{x^4-16}$.

4. $y = \sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^2+5x+4}}$.

5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

6. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

7. $y = \dfrac{\sqrt{2x-7}}{\sqrt{12-3x}}$.

8. $y = \sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$.

9. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}}$.

10. $y = \sqrt{|x| - 6}$.

11. $y = \sqrt{10 - x}$.

12. $y = \sqrt{25x - 100}$.

13. $y = \sqrt{4 - x^2}$.

14. $y = \sqrt{x^2 - 10x + 9}$.

Четность

Определить, какие из функций четные, нечетные, какие не являются ни четными, ни нечетными:

1. $f(x) = 3x^2 + x^4$.
2. $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{2x^3}$.
3. $f(x) = \dfrac{3x}{x^6 + 2}$.
4. $f(x) = x^2\,(2x - x^3)$.
5. $f(x) = x\,(5 - x^2)$.
6. $f(x) = 2^x - 2^{-x}$.
7. $f(x) = \dfrac{x^5}{\cos x}$.
8. $f(x) = \dfrac{x^6}{\sin x}$.
9. $f(x) = \cos\,(x - 1)$.
10. $f(x) = 2x\ \mathrm{tg}\ x$.
11. $f(x) = \cos^3 x + \cos x - 2$.
12. $f(x) = 4x^6 - x^2$.
13. $f(x) = x^2 \cos x$.
14. $f(x) = x^5 \sin x$.
15. $f(x) = x^3 + x^2$.
16. $f(x) = x + 5$.
17. $f(x) = \dfrac{x \sin x}{x + 1}$.
18. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$.

Справочный отдел

Областью определения аналитически заданной функции называют множество всех значений x, для которых имеет смысл формула, задающая функцию.

Функция может потерять смысл, если эта формула приводит к делению на нуль или к извлечению корня четной степени из отрицательного числа.