А.ГАЙШТУТ

МАТЕМАТИКА. ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

В ПОМОЩЬ ПОВТОРЯЮЩИМ МАТЕМАТИКУ ПО СПРАВОЧНИКАМ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 3. Содержание

Текстовые задачи на экстремум

При решении задач на экстремум следует придерживаться такого плана:

1) выбрать независимое переменное и установить область его изменения;
2) выразить исследуемую величину через выбранное независимое переменное;
3) решить задачу на экстремум.

Часто из условия задачи следует, что существует экстремум определенного вида (скажем максимум). Поэтому часто не требуется специального исследования поведения функции в критических точках.

Пример 3.316. Автомобиль едет из пункта A в пункт B. От пункта A до пункта C, расположенного между A и B, он едет с начальной скоростью 60 км/ч. В пункте C он уменьшает свою скорость на a км/ч ($0 < a < 60$) и с этой скоростью едет $\frac{1}{4}$ пути CB. Оставшиеся $\frac{3}{4}$ пути CB он едет со скоростью, которая на $3a$ (км/ч) превышает начальную. При каком значении a автомобиль быстрее всего преодолеет путь от A до B?

Решение. Согласно условию задачи находим, что общее время движения автомобиля из пункта A в пункт B

$$t(a) = \frac{1}{60}AC + \frac{1}{4}\cdot\frac{CB}{60-a} + \frac{3}{4}\cdot\frac{CB}{60+3a};$$

$$t'(a) = \frac{1}{4}CB\left(\frac{1}{(60-a)^2} - \frac{1}{(20+a)^2}\right);$$

$$(t'(a) = 0) \Leftrightarrow (a = 20).$$

Убедитесь самостоятельно, что $a = 20$ — точка наименьшего значения функции $t(a)$.

Ответ: $a = 20$ (км/ч).

Пример 3.317. Четвертый член арифметической прогрессии равен 4. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений первых трех членов прогрессии будет наименьшей?

Решение. Пусть $a_1 = a$, $a_2 = a + d$, $a_3 = a + 2d$, $a_4 = a + 3d = 4$. Имеем $S = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = a\,(a + d) +$

$$+ (a+d)(a+2d) + (a+2d)\,a = 3a^2 + 6ad + 2d^2.$$

Получаем следующую задачу. Найти наименьшее значение функции $S\,(d) = 3a^2 + 6ad + 2d^2$ при условии, что $(a + 3d = 4) \Leftrightarrow (a = 4 - 3d)$. Тогда $S(d) = 3\,(4 - 3d)^2 +$

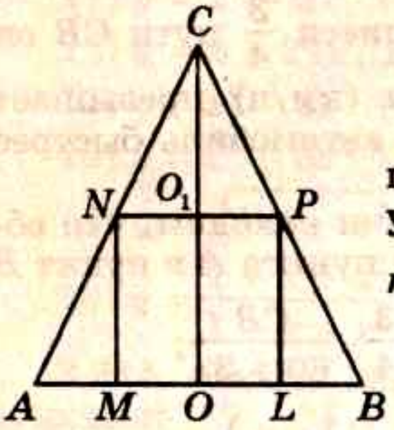
$$+ 6\,(4-3d)\,d + 2d^2 = 11d^2 - 48d + 48.$$

$$S'(d) = 22d - 48.\ (S'(d) = 0) \Leftrightarrow \left(d = 2\frac{2}{11}\right).$$

Из содержания задачи следует, что это точка наименьшего значения функции.

Ответ: $d = 2\frac{2}{11}$.

Пример 3.318. Длина высоты конуса равна H, радиус основания — R. В конус вписан цилиндр. Найти размеры цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.



Решение.

$$S_{бок} = 2\pi rh, \qquad (1)$$

где r и h — соответственно радиус основания и высота цилиндра. $r = \frac{1}{2}NP$, $h = PL$. Пусть $NP = x = 2r$;

$$(\Delta CNP \sim \Delta CAB) \Rightarrow \left(\frac{NP}{AB} = \frac{CO_1}{CO}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2R} = \frac{H - PL}{H}\right) \Rightarrow \left(PL = \frac{H}{2R}(2R - x) = h\right).$$

Теперь из формулы (1) получаем

$$S_{бок} = S(x) = 2\pi\frac{x}{2}\cdot\frac{H}{2R}(2R - x) = \pi\left(Hx - \frac{H}{2R}x^2\right).$$

$$(S'(x) = 0) \Leftrightarrow (x = R) \text{ или } r = \frac{1}{2}R.$$

При этом $h = \frac{1}{2}H$.

Ответ: $r = \frac{1}{2}R$, $h = \frac{1}{2}H$.

Пример 3.319. Найти радиус основания цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

Решение. $V = \pi r^2 H$, где r и H — соответственно радиус основания и высота цилиндра.

$$S_п = 2\pi r(r + H) = 2\pi r\left(r + \frac{V}{\pi r^2}\right) = S(r),$$

$$S'(r) = 2\pi\left(2r - \frac{V}{\pi r^2}\right), \quad (S'(r) = 0) \Leftrightarrow \left(r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right).$$

Пример 3.320. Площадь сферы равна 27π. Какова высота цилиндра наибольшего объема, вписанного в эту сферу?

Решение. Площадь сферы равна $4\pi R^2$, где R — радиус сферы. По условию $(4\pi R^2 = 27\pi) \Rightarrow \left(R^2 = \frac{27}{4}\right)$. Пусть r и H — соответственно радиус основания и высота цилиндра. Тогда $r^2 = R^2 - \frac{1}{4}H^2 = \frac{27 - H^2}{4}$,

$$V_ц = \pi r^2 H = \pi \cdot \frac{27 - H^2}{4} \cdot H = V(H),$$

$$V'(H) = \frac{\pi}{4}(27 - 3H^2), \quad (V'(H) = 0) \Rightarrow (H = 3).$$

Упражнения

3.321. Число 18 разбить на два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

3.322. Данное положительное число a разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

3.323. Найти число, которое превышало бы свой квадрат на максимальное значение.

3.324. Найти длины сторон прямоугольника с периметром 72 см, имеющего наибольшую площадь.

3.325. Какое положительное число при сложении с обратным ему числом дает наименьшую сумму?

3.326. Число 180 разбить на три слагаемых так, чтобы два из них относились, как 1 : 2, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

3.327. Кусок проволоки данной длины l согнуть в виде прямоугольника так, чтобы площадь последнего была наибольшей.

3.328. Проволоку, имеющую длину l, предполагается разрезать на две части, из которых одну требуется согнуть в окружность, а другую — в квадрат. Как следует ее разрезать, чтобы сумма площадей круга и квадрата была наименьшей?

3.329. В круг какого радиуса можно вписать прямоугольник наибольшей площади с периметром, равным 56 см?

3.330. Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной a указать треугольник наибольшей площади.

3.331. На окружности радиуса R дана точка A. Провести хорду BC параллельно касательной в точке A так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

3.332. Каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

3.333. Статуя высотой 4 м стоит на постаменте, высота которого 5,6 м. На каком расстоянии должен стать наблюдатель, рост которого (до уровня глаз) 1,6 м, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

3.334. В полукруг вписана трапеция, основанием которой является диаметр полукруга. Определить угол трапеции так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

3.335. Какой из прямоугольных треугольников с заданным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

3.336. Требуется изготовить закрытый ящик, площадь основания которого 1 м^2. Сумма длин всех ребер должна быть равна 20 м. Найти размеры ящика, при которых площадь его поверхности наибольшая.

3.337. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 м^3, причем стороны основания относились бы как 1 : 2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

3.338. Требуется изготовить коническую воронку с образующей $l = 20$ см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

3.339. Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

3.340. Какой должна быть высота конуса, вписанного в шар радиуса R, для того чтобы его боковая поверхность была наибольшей?

3.341. Из всех треугольников, у которых сумма основания и высоты равняется a найти тот, у которого наибольшая площадь.

3.342. Около данного цилиндра описать конус наименьшего объема (плоскости оснований цилиндра и конуса совпадают).

3.343. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

3.344. Определить отношение высоты конического шатра к радиусу основания при условии, что его боковая поверхность наименьшая при данной вместимости.

3.345. В шар вписан цилиндр наибольшего объема. Определить отношение объема шара к объему цилиндра.

3.346. Какой из цилиндров с данным объемом имеет наименьшую полную поверхность?

3.347. Открытый жестяной бак с квадратным основанием должен вмещать V литров. При каких размерах на изготовление бака потребуется наименьшее количество жести?

3.348. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какой должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

3.349. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

3.350. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a - 2 = 0$ будет наименьшей?

3.351. При каких действительных значениях m сумма квадратов корней уравнения $x^2 - mx + m - 1 = 0$ будет наименьшей?

3.352. При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (m - 2)\,x - (m + 3) = 0$ будет наименьшей?

3.353. Пусть x_1 и x_2 — точки экстремумов функции $f(x) = -x^3 + 3mx^2 - 6\,(2m^2 - 3m - 1)\,x - 5$. При каком m выражение $x_1^2 + x_2^2$ имеет наибольшее значение?

3.354. Написать уравнения касательных к кривой $y = (x^2 + 1)\,(x - 2)$ в точках ее экстремумов.

Построение графика функции

Построению графика с помощью производной предшествует исследование функции по так называемой общей схеме.

1. **Область определения функции. (Вертикальные асимптоты).**
2. **Четность.**
3. **Периодичность.**
4. **Корни и промежутки знакопостоянства.**

5. Монотонность и экстремумы.
6. Выпуклость.
7. Невертикальные асимптоты.
8. Табличка частных значений.

Исследовать функции и построить графики:

Пример 3.355. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

1) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Ось Oy — вертикальная асимптота;
2) функция нечетная;
3) функция непериодическая, так как имеет только одну вертикальную асимптоту;
4) распределение знаков функции видно из таблицы:

x	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
y	—	+

Корней нет;

5) $y'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$. Функция имеет 2 критические точки $x = -1$, $x = 1$. Составляем таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$y'(x)$	+	0	—	—	0	+
$y(x)$	↗	-2	↘	↘	2	↗
		max			min	

6) $y'' = \dfrac{1}{x^2}$. При $x < 0$ $y''(x) < 0$. Функция выпуклая, при $x > 0$ $y''(x) > 0$, функция вогнутая. Составляем таблицу.

x	$(-\infty; 0)$	$(0; \infty)$
$y''(x)$	—	+
$y'(x)$	∩	∪

7) функция имеет невертикальную асимптоту $y = x$;

8)

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	$2\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$

Используя все полученные данные, строим график (рис. 3.1).

Заметим, что не всегда пункты общей схемы должны следовать в таком порядке, как мы указали.

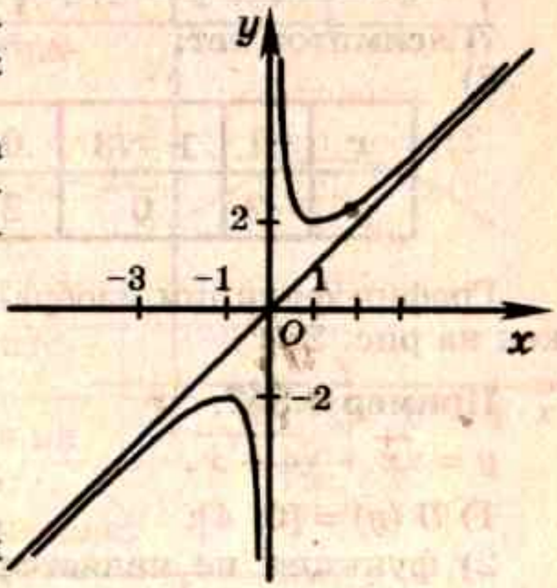


Рис. 3.1

Пример 3.356.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) $D\,(f(x)) = \mathbf{R}$.

2) $f(-x) = -x^3 - 3x^2 + 2$. Функция не является ни четной, ни нечетной;

3) функция периодическая;

4) $f(x) = (x - 1)\,(x^2 - 2x - 2)$. Функция имеет 3 корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$, $x_3 = 1 + \sqrt{3}$;

x	$(-\infty;\ 1-\sqrt{3})$	$1-\sqrt{3}$	$(1-\sqrt{3};\ 1)$	1	$(1;\ 1+\sqrt{3})$	$1+\sqrt{3}$	$(1+\sqrt{3};\ \infty)$
y	—	0	+	0	—	0	+

5) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x\,(x - 2)$. Функция имеет 2 критические точки: $x = 0$, $x = 2$;

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ \infty)$
$y'(x)$	+	0	—	0	+
$y(x)$	↗	2	↘	−2	↗
		max		min	

6) $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$;

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; \infty)$
$y''(x)$	—	0	+
$y'(x)$	$\cap$	точка перегиба	$\cup$

7) асимптот нет;

8)

x	-1	$1-\sqrt{3}$	0	1	2	$1+\sqrt{3}$	3
y	-2	0	2	0	-2	0	2

График функции изображен на рис. 2.

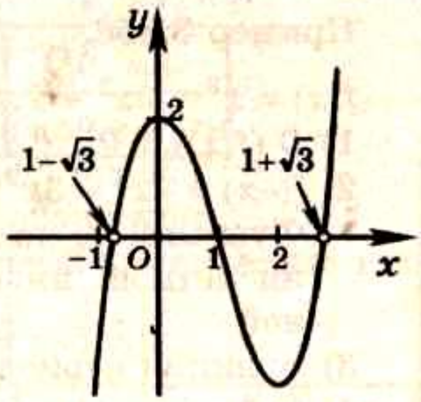


Рис. 3.2

Пример 3.357.

$y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$.

1) $D(y) = [0; 4]$;

2) функция не является ни четной, ни нечетной;

3) функция непериодическая;

4) функция положительна на всей области определения;

5) $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$, $(y'(x) = 0) \Leftrightarrow (\sqrt{4 - x} = \sqrt{x}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x = x, \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x = 2);$$

x	$(0; 2)$	2	$(2; 4)$
$y'(x)$	+	0	—
$y(x)$	↗	$2\sqrt{2}$	↘
		max	

6) $y''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} - \frac{1}{2(4-x)\sqrt{4-x}}$, $y''(x) < 0$ при $x \in$

$\in (0; 4)$. Функция выпуклая;

7) асимптот нет;

x	0	1	2	3	4
$y(x)$	2	$1+\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	$1+\sqrt{3}$	0

График функции изображен на рис. 3.3.

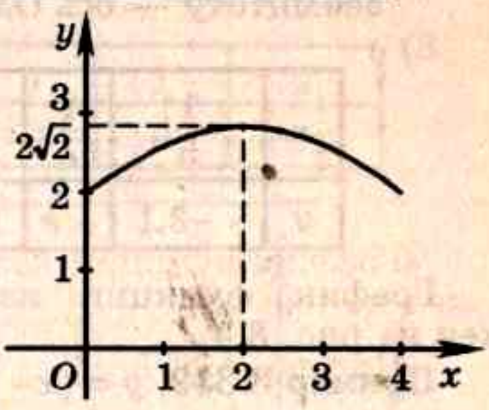


Рис. 3.3

Пример 3.358. $y = \frac{1}{x \ln x}$.

1) $D(y) = (0; 1) \cup (1; \infty)$.

Прямые $x = 0$, $x = 1$ — вертикальные асимптоты;

2) функция не является ни четной, ни нечетной;

3) функция непериодическая;

4)

x	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
y	—	+

5) $y' = \frac{-(\ln x + 1)}{x^2 \ln^2 x}$.

Существует одна критическая точка $x = \frac{1}{e}$.

x	$\left(0; \frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e}; 1\right)$	$(1; \infty)$
$y'(x)$	+	0	—	—
$y(x)$	↗	$-e$	↘	↘
		max		

6) $y'' = \frac{-x\ln^2 x + 2x\ln x(\ln x + 1)^2}{x^4 \ln^4 x} =$

$= \frac{x\ln x(2(\ln x + 1)^2 - \ln x)}{x^4 \ln^4 x} = \frac{x\ln x(2(\ln^2 x + 3\ln x + 2)}{x^4 \ln^4 x}$,

$y''(x) < 0$ при $x \in (0; 1)$, $y''(x) > 0$ при $x \in (1; \infty)$;

x	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
$y''(x)$	—	+
$y'(x)$	$\cap$	$\cup$

7) $\lim\limits_{x \to \infty} y = 0$. Функция имеет горизонтальную асимптоту — ось Ox.

8)

x	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{4}{5}$	1,5	2	3
y	$\approx -3{,}1$	$-e$	$\approx -5{,}7$	$\approx 1{,}6$	$\approx 0{,}7$	$\approx 0{,}33$

График функции изображен на рис. 3.4.

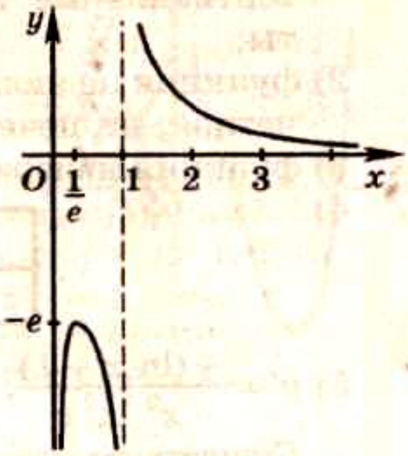


Рис. 3.4

Пример 3.359. $y = (x-1)\,e^x$.

1) $D(y) = \mathbf{R}$;
2) Функция не является ни четной, ни нечетной;
3) Функция непериодическая;
4)

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; \infty)$
y	—	0	+

5) $y'(x) = e^x + (x-1)\,e^x = xe^x$;

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; \infty)$
$y'(x)$	—	0	+
$y(x)$	↘	−1	↗
		min	

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; \infty)$
$y''(x)$	—	0	+
$y'(x)$	$\cap$	точка перегиба	$\cup$

7) $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 0$. Функция имеет горизонтальную асимптоту на $-\infty$ — ось Ox;

8)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\approx -0,4$	$\approx -0,7$	-1	0	$\approx 7,3$

График изображен на рис. 3.5.

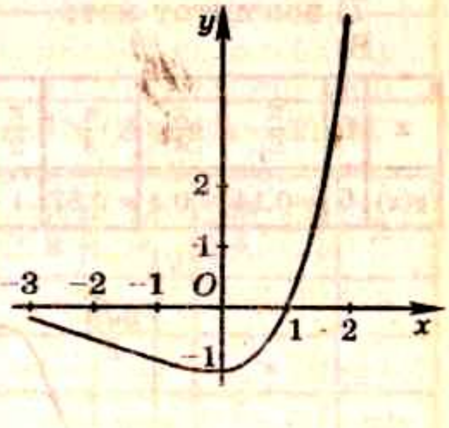


Рис. 3.5

Пример 3.360.

$y = 2\sin x - \sin 2x$.

1) $D(y) = R$;

2) $y(-x) = 2\sin(-x) - \sin 2(-x) = -2\sin x + \sin 2x = -y(x)$.
Функция нечетная;

3) Функция периодическая с периодом 2π, поэтому будем исследовать ее на промежутке $[0; 2\pi]$;

4) $y = 2\sin x\,(1 - \cos x)$;

x	0	$(0; \pi)$	π	$(\pi; 2\pi)$	2π
y	0	+	0	—	0

5) $y' = 2\cos x - 2\cos 2x = 2(-2\cos^2 x + \cos x + 1) = 2(1 - \cos x)(2\cos x + 1)$;

x	0	$\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$	$\frac{2\pi}{3}$	$\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right)$	$\frac{4\pi}{3}$	$\left(\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right)$	2π
$y'(x)$	0	+	0	—	0	+	0
$y(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	0
			max		min		

Замечание. Точки 0 и 2π не являются точками экстремумов, так как при переходе через эти точки производная функция не меняет знака.

6) $y''(x) = -2\sin x + 4\sin 2x = 2\sin x\,(4\cos x - 1)$;

x	0	$\left(0;\ \arccos\frac{1}{4}\right)$	$\arccos\frac{1}{4}$	$\left(\arccos\frac{1}{4};\ \pi\right)$	π
$y''(x)$	0	+	0	—	0
$y'(x)$	точка перегиба	$\cup$	точка перегиба	$\cap$	точка перегиба

7) асимптот нет;

8)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π
$y(x)$	0	$\approx 0{,}14$	$\approx 0{,}4$	$\approx 0{,}87$	1	$\approx 2{,}6$	$\approx 2{,}4$	$\approx 1{,}86$	0	$\approx -1{,}86$	$\approx -2{,}4$	0

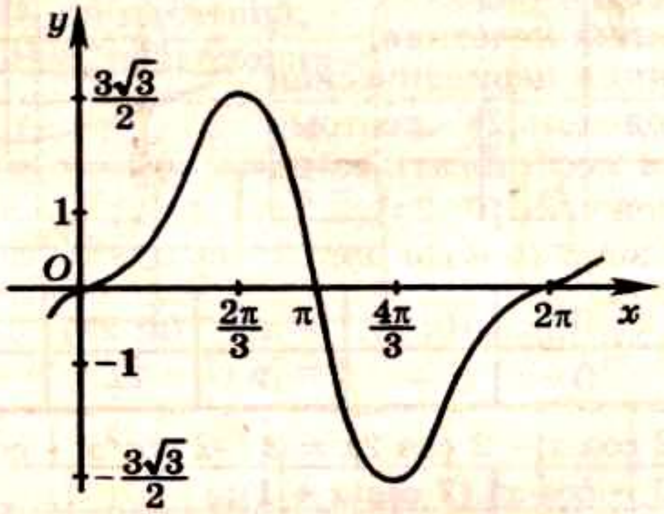


Рис. 3.6

График изображен на рис. 3.6, каждая точка вида $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, является центром симметрии графика. Далее нужно повторить график периодически.

Пример 3.361. $y = 2\cos x - \cos 2x$.

1) $D(y) = \mathbf{R}$;

2) функция четная, так как $y(-x) = y(x)$;

3) функция периодична с периодом 2π. Далее рассмотрим свойства при $x \in [0; 2\pi]$;

4) $\begin{cases} y = 0, \\ x \in [0; 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0, \\ x \in [0; 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{или} \quad x = 2\pi - \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right);$

x	y	x	y
$\left(0; \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$	+	$2\pi - \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	0
$\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	0	$\left(2\pi - \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 2\pi\right)$	+
$\left(\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 2\pi - \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$	—		

5) $y' = -2\sin x + 2\sin 2x = 2\sin x\,(2\cos x - 1)$;

x	0	$\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$	π	$\left(\pi; \frac{5\pi}{3}\right)$	$\frac{5\pi}{3}$	$\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$	2π
$y'(x)$	0	+	0	—	0	+	0	—	0
$y(x)$	1	↗	1,5	↘	−3	↗	1,5	↘	1
	min		max		min		max		min

6) исследование функции на выпуклость проводить не будем;

7) асимптот нет;

8)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	1	≈1,2	≈1,4	1,5	1	−0,5	≈−1,4	≈−2,2	-3	1,5	1

График функции симметричен относительно любой прямой вида $x = \pi k$. Все данные используем для построения графика (рис. 3.7).

Пример 3.362. Исследовать функцию $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ и построить эскиз ее графика.

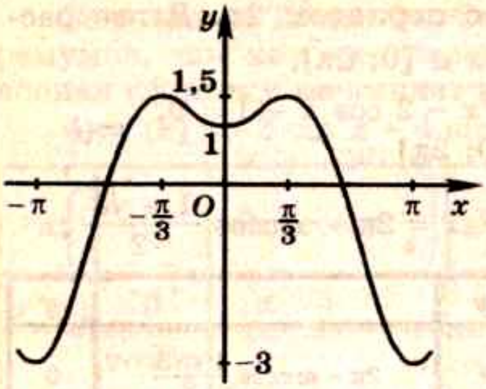


Рис. 3.7

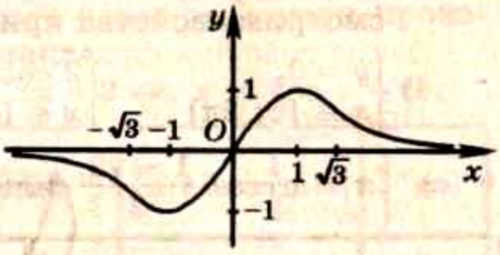


Рис. 3.8

Решение. **1. Область определения — вся числовая ось.**

2. Функция нечетная, график симметричен относительно начала координат.

3. Функция непериодическая.

4. При $x < 0$ $y < 0$, при $x = 0$ $y = 0$, при $x > 0$ $y > 0$.

5. $y' = \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
$y'(x)$	—	0	+	0	—
$y(x)$	↘	-1	↗	1	↘
		min		max	

Функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$, $[1; \infty)$; возрастает на промежутке $[-1; 1]$.

$$y_{\min} = y(-1) = -1, \quad y_{\max} = y(1) = 1.$$

6. $y'' = \dfrac{-4x(1 + x^2)(3 - x^2)}{(1 + x^2)^4}$.

x	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 0)$	0	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; \infty)$
$y''(x)$	—	0	+	0	—	0	+
$y'(x)$	∩	Точка перегиба	∪	Точка перегиба	∩	Точка перегиба	∪

7. График имеет горизонтальную асимптоту — ось Oy.

Эскиз графика функции показан на рис. 3.8.

Пример 3.363. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ и построить эскиз ее графика.

Решение.

1. Область определения $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.
2. Функция не является ни четной, ни нечетной.
3. Функция непериодическая.
4. Функция корней не имеет; при $x < 1$ $y < 0$; при $x > 1$ $y > 0$.
5. $y' = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; 2)$	2	$(2; \infty)$
$y'(x)$	+	0	—	—	0	+
$y(x)$	↗	−2	↘	↘	2	↗
		max			min	

Функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0]$, $[2; \infty)$; убывает на каждом из промежутков $[0; 1)$, $(1; 2]$. $y_{\min} = y(2) = 2$, $y_{\max} = y(0) = -2$.

6. $y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$.

x	$(-\infty; 1)$	$(1; \infty)$
$y''(x)$	—	+
$y'(x)$	∩	∪

7. $y = \dfrac{(x-1)^2 + 1}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$, поэтому график функции имеет наклонную асимптоту $y = x - 1$. Кроме того, существует вертикальная асимптота $x = 1$. Эскиз графика функции показан на рис. 3.9.

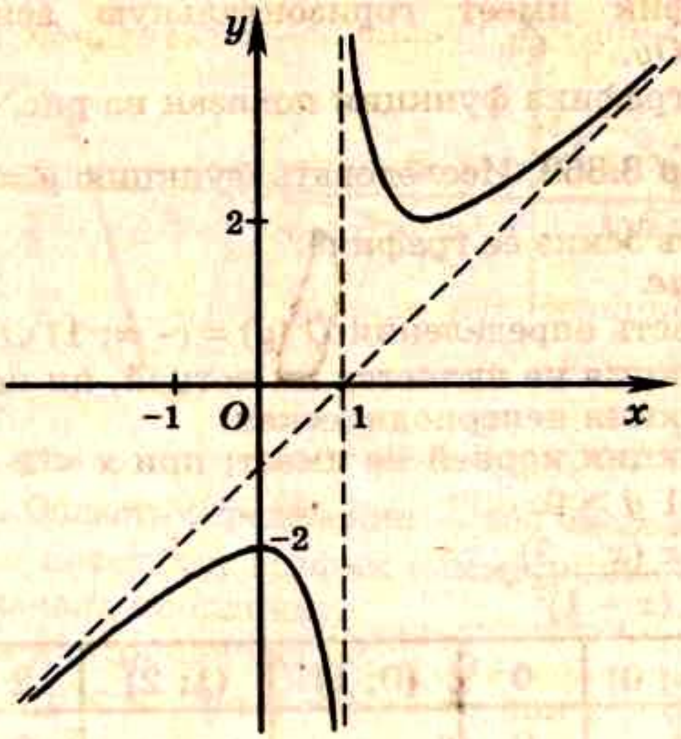


Рис. 3.9.

Упражнения

Исследовать функции и построить эскизы график

3.364. 1) $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$;

2) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$;

3) $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 24x + 7$;

4) $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 12x)$;

5) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 2$;

6) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x - 1\frac{1}{3}$;

7) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$;

8) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 5$;

9) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$.

3.365. 1) $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$; 2) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$; 4) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x+1}$.

3.366. 1) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x}$;

2) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-x}$.

Интеграл и его применение

Понятие первообразной и интеграла

Определение. *Функция F называется* ***первообразной*** *на заданном промежутке для функции f, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$. Множество первообразных для функции f называется* ***неопределенным интегралом*** *от функции f и обозначается* $\int f(x)\,dx$.

Табличные интегралы

1. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \in \mathbf{R},\ n \neq -1.$

2. $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C.$ 4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$ 5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

Формула Ньютона—Лейбница

Определение. *Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной f этой функции*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Если F есть первообразная для f на интервале, содержащем отрезок $[a; b]$, то $S = F(b) - F(a)$, т.е. интеграл от неотрицательной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции.

Три правила вычисления интеграла:

1. Интегрирование суммы

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. Вынесение постоянного множителя за знак интеграла $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, k — постоянная.

3. Замена переменной по формуле $t = kx + p$, k и p — постоянные: $\int_a^b f(kx+p)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ka+p}^{kb+p} f(t)\,dt$.

Пример 3.367. Найти первообразные для функции $f(x) = 1 - 3\sin 3x$.

Решение. $\int (1 - 3\sin 3x)\,dx = \int dx - 3\int \sin 3x\,dx =$

$$= x + \cos 3x + C.$$

Проверка. $(x + \cos 3x + C)' = 1 - 3\sin 3x$.

Пример 3.368. Найти первообразные для функции $f(x) = \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - x$, $x \in (0; \infty)$.

Решение. $\int f(x)\,dx = 4\int x^{-\frac{1}{4}}\,dx - \int x\,dx =$

$$= 4 \cdot \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Проверка. $\left(\frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{2}x^2 + C\right)' =$

$$= \frac{16}{3}\cdot\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - x = \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - x.$$

Упражнения

3.369. Доказать, что функция F является первообразной для функции f на указанном промежутке:

1) $F(x) = x^5$, $f(x) = 5x^4$, $x \in (-\infty; \infty)$;

2) $F(x) = x^{-3}$, $f(x) = -3x^{-4}$, $x \in (0; \infty)$;

3) $F(x) = \frac{1}{7}x^7$, $f(x) = x^6$, $x \in (-\infty; \infty)$.

3.370. Является ли функция F первообразной для функции f на указанном промежутке?

1) $F(x) = 3 - \sin x$, $f(x) = \cos x$, $x \in (-\infty; \infty)$;

2) $F(x) = 5 - x^4$, $f(x) = -4x^3$, $x \in (-\infty; \infty)$;

3) $F(x) = \cos x - 4$, $f(x) = -\sin x$, $x \in (-\infty; \infty)$;

4) $F(x) = x^{-2} + 2$, $f(x) = \dfrac{1}{2x^3}$, $x \in (0; \infty)$.

3.371. Найти одну из первообразных для функции f на множестве действительных чисел:

1) $f(x) = 2{,}4$;
2) $f(x) = \cos x$;
3) $f(x) = 2x$;
4) $f(x) = \sin x$;
5) $f(x) = -\sin x$;
6) $f(x) = -x$;
7) $f(x) = -2$;
8) $f(x) = -\cos x$.

3.372. Найти общий вид первообразных:

1) $f(x) = 5 - x^4$;
2) $f(x) = 4x$;
3) $f(x) = x + \cos x$;
4) $f(x) = -6$.

3.373. Найти общий вид первообразных:

1) $f(x) = 5 - x^2 + \dfrac{1}{x^3}$;
2) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \cos x$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \sin x$;
4) $f(x) = 4x^3 - 7x + 1$;
5) $f(x) = \sin (ax + b)$;
6) $f(x) = \cos (ax + b)$.

Справочный отдел

Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде

$$F(x) + C,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I, а C — произвольная постоянная.

Графики любых двух первообразных для функции f получаются один из другого параллельным переносом вдоль оси Oy.

3.374. Найти общий вид первообразной:

1) $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$;

2) $f(x) = a^x$;

3) $f(x) = (ax+b)^n$;

4) $f(x) = \dfrac{a}{\sin^2 bx}$;

5) $f(x) = \dfrac{a}{\cos^2 bx}$;

6) $f(x) = \dfrac{a}{\sqrt{bx+d}}$;

7) $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$;

8) $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$;

9) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$;

10) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{7-3x}}$;

11) $f(x) = e^{2-5x}$;

12) $f(x) = \dfrac{1}{1-\cos x}$.

Площадь криволинейной трапеции

Пример 3.375. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $f(x) = x^2$, прямыми $y = 0$ и $x = 3$.

Решение. Для функции $f(x) = x^2$ одной из первообразных является функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$. Следовательно,

$$S = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

(рис. 3.10).

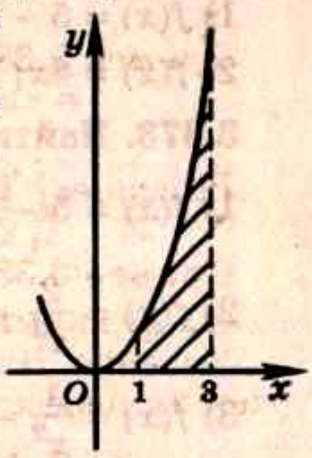


Рис. 3.10

Справочный отдел

Правила нахождения первообразных

- $(F+G)' = f + g$
- $(kF)' = kf$
- $\dfrac{1}{k}F'(kx+b) = f(kx+b)$

Упражнения

3.376. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, параболой $y = 2x^2 + 3x + 2$ и прямыми $x = -1$, $x = 1$.

3.377. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной координатными осями, параболой $y = 5 + 4x - x^2$ и ее осью симметрии.

3.378. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2 - 3x - 4$ для $x > 0$, координатными осями и прямой $x = 3$.

3.379. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной координатными осями, параболой $y = 4x - x^2 + 6$ и ее осью симметрии.

3.380. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, графиком

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x \le 1, \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

и прямыми $x = -1$, $x = 2$.

Пример 3.381. Вычислить $\int\limits_{-1}^{3} x^2\,dx$.

Решение. $\int\limits_{-1}^{3} x^2\,dx = \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_{-1}^{3} = \dfrac{3^3}{3} - \dfrac{(-1)^3}{3} = \dfrac{28}{3}$.

Пример 3.382. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x$ и $y = 3 - 2x - x^2$.

Решение. Начертим эти графики и найдем абсциссы точек их пересечения из уравнения

$$1 - x = 3 - 2x - x^2,$$

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Искомая площадь равна разности площадей криволинейной трапеции *BADC* и треугольника *BAC*.

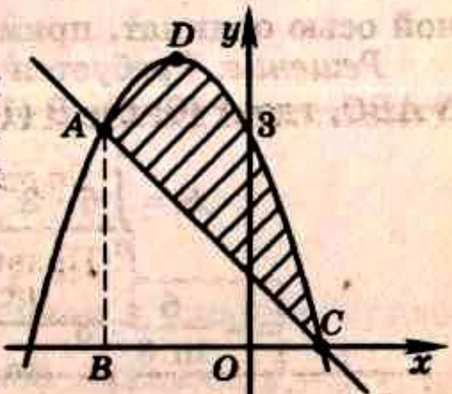


Рис. 3.11

$$S_{BADC} = \int\limits_{-2}^{1} (3 - 2x - x^2)\,dx =$$

$$= \left.\left(3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-2}^{1} =$$

$$= 3 - 1 - \frac{1}{3} - 3\,(-2) + (-2)^2 + \frac{(-2)^3}{3} = 9;$$

$$S_{BAC} = \frac{1}{2}\,AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2};$$

$$S = S_{BADC} - S_{BAC} = \frac{9}{2}.$$

Пример 3.383. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y = \frac{1}{3}x^3$.

Решение. Абсциссы точек пересечения парабол находим из уравнения $\left(x^2 = \frac{1}{3}x^3\right) \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 3)$.

$$S = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4\right)\Bigg|_0^3 = 2\,\frac{1}{4}.$$

Пример 3.384. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x$, $y = 4x - x^2$.

Решение. Абсциссы точек пересечения указанных линий находим из уравнения

$$(4 - x = 4x - x^2) \;\Leftrightarrow\; (x = 1 \vee x = 4).$$

$$S = \int_1^4 (4x - x^2 - (4 - x))\, dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4)\, dx =$$

$$= \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Bigg|_1^4 = 4{,}5.$$

Пример 3.385. Найти площадь фигуры, ограниченной осью ординат, прямой $y = x + 1$ и кривой $y = 6 \cdot 3^{-x}$.

Решение. Требуется найти площадь криволинейного $\Delta\,ABC$, где $A\,(0;\,6)$, $B\,(1;\,2)$, $C\,(0;\,1)$.

$$S = \int_0^1 6 \cdot 3^{-x}\, dx - \int_0^1 (x + 1)\, dx =$$

$$= -\frac{6}{\ln 3} \cdot 3^{-x}\Bigg|_0^1 - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{\ln 3} - \frac{3}{2}.$$

Рекомендуем к примерам 3.383—3.385 самостоятельно построить графики.

Упражнения

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

3.386. $y = x^2;\ y = 0;\ x = 3.$

3.387. $y = x^2;\ y = \sqrt[3]{x}.$

3.388. $y = x^2;\ y = x + 2.$

3.389. $y = 2 - x - x^2;\ y = 0.$

3.390. $y = \sqrt{x};\ y = \sqrt{4 - 3x};\ y = 0.$

3.391. $y = \frac{6}{x};\ x + y = 7.$

3.392. $y = \frac{2}{x};\ y = x + 1;\ x = 3.$

3.393. $y = x^2;\ y = \sqrt{x}.$

3.394. $y = x - x^2\sqrt{x};\ y = 0.$

3.395. $y = e^x;\ y = e^{-x};\ x = 1.$

3.396. $y = 4x - x^2;\ y = 0.$

3.397. $y = x^3;\ y = 8;\ x = 0.$

3.398. $y = 2x - x^2;\ y = x.$

3.399. $y = \frac{x^2}{3};\ y = 4 - \frac{2}{3}x^2.$

3.400. $y = \sqrt{x};\ y = 2;\ x = 9.$

3.401. $y = x^4;\ y = x.$

3.402. $y = x^3;\ y = 1;\ x = 2.$

3.403. $y = \frac{5}{x};\ y = 6 - x.$

3.404. $y = \cos x;\ y = 0;\ x = -\frac{\pi}{4};\ x = \frac{\pi}{4}.$

3.405. $y = \sin x;\ y = 0;\ x = 0;\ x = \pi.$

3.406. $y = 1 - x;\ y = 3 - 2x - x^2.$

3.407. $y = -x^2 + 3x + 4;\ y = x^2 - 5x + 10.$

3.408. $y = x^2 - 2x + 3;\ y = 3x - 1.$

3.409. При каком положительном a площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{x}{6} + \frac{1}{x^2}$, $y = 0,\ x = 0,\ x = a,\ x = 2a$, принимает наименьшее значение?